ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 3, 1989 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ НА СВОЕЙ ГРАНИЦЕ КОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НАКЛАДКАМИ

АГАБЕКЯН П. В.

Пусть упругая полуплоскость усилена на своей границе двумя накладками малой постоянной толщины, одна из которых полубесконечна и деформируется под действием сил, приложенных на концах накладок. Модуль упругости конечной накладки равен E_1, а полубесконечной—E_2. Как и в [1, 2, 3], предполагается, что под накладками действуют только тангенциальные контактные напряжения. Задача заключается в определении тангенциальных напряжений, действующих на месте соединения накладок с полуплоскостью.

В силу вышесказанного, уравнение равновесия накладок запишется в виде

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{P}{E_1h}\delta(x)-\frac{X}{E_1h}\delta(x-a)+\frac{X}{E_2h}\delta(x-b)-\frac{\tau_1(x)}{E_1h}-\frac{\tau_2(x)}{E_2h} \tag{1}$$

где

$$U^{(1)}(x)=[\Theta(x)-\Theta(x-a)]\frac{du^{(1)}}{dx}+\Theta(x-b)\frac{du^{(1)}}{dx}$$

$$\tau_1(x)=[\Theta(x)-\Theta(x-a)]\tau(x);\quad \tau_2(x)=\Theta(x-b)\tau(x)$$

$$\tau_1(x)+\tau_2(x)=[\Theta(x)-\Theta(x-a)+\Theta(x-b)]\tau(x)=\tau^+(x)$$

$\delta(x)$—функция Дирака, $\Theta(x)$—функция Хевисайда, $\tau(x)$—интенсивность тангенциальных контактных напряжений, $u^{(1)}$—горизонтальные перемещения точек накладок, h—толщина накладок, P, X—интенсивности сосредоточенных сил, действующих на концах накладок.

С другой стороны, для граничных точек упругой полуплоскости имеем

$$\frac{du^{(2)}}{dx}=-\frac{1}{2\pi\mu(1-\varepsilon^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau^+(s)}{s-x}ds;\qquad \varepsilon^2=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2}$$

где $u^{(2)}$—горизонтальные перемещения граничных точек полуплоскости, μ—модуль сдвига материала полуплоскости, ν—коэффициент Пуассона.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\Theta(x)A(x)=A_+(x); \quad \Theta(-x)A(x)=A_-(x); \quad \overline{A}_\pm(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}A_\pm(x)\exp(i\sigma x)\,dx$$

Далее представим $du^{(2)}/dx$ в виде

$$\frac{du^{(2)}}{dx}=\frac{G(x)}{2\mu(1-\varepsilon^2)}+U^{(2)}(x)+U_-^{(2)}(x)$$

где

$$G(x)=[\Theta(x-a)-\Theta(x-b)]g(x), \quad g(x)=2\mu(1-\varepsilon^2)\frac{du^{(2)}}{dx}$$

$$U_-^{(2)}(x)=\Theta(-x)\frac{du^{(2)}}{dx}, \quad U^{(2)}(x)=[\Theta(x)-\Theta(x-a)+\Theta(x-b)]\frac{du^{(2)}}{dx}$$

Тогда условие контакта между полуплоскостью и накладками будет следующее:

$$U^{(2)}(x)=U^{(1)}(x) \tag{3}$$

Теперь, применив к (1), (2) преобразование Фурье и имея в виду (3), получим функциональное уравнение

$$(\lambda_2+|\sigma|)\overline{\tau}^+(\sigma)+2\mu(1-\varepsilon^2)i\sigma\overline{U}_-^{(2)}(\sigma)=(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\tau}_1(\sigma)-$$
$$-i\sigma\overline{G}(\sigma)+\lambda_1P+\overline{f}(\sigma) \tag{4}$$

$$\overline{f}(\sigma)=\lambda_2X\exp(i\sigma b)-\lambda_1X\exp(i\sigma a), \quad \overline{\tau}^+(\sigma)=\overline{\tau}_1(\sigma)+\overline{\tau}_2(\sigma)$$

Таким образом, задача свелась к решению функционального уравнения (4).

Для решения этого функционального уравнения $\lambda_2+|\sigma|$ представим в виде [4]

$$\lambda_2+|\sigma|=\frac{\overline{K}_+(\sigma)}{\overline{K}_-(\sigma)}$$

где

$$\overline{K}_+(\sigma)=(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}\overline{M}_+(\sigma), \quad \overline{K}_-(\sigma)=(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}\overline{M}_-(\sigma)$$

$$\overline{M}_+(\sigma)=\exp[\overline{R}_+(\sigma)], \quad \overline{M}_-(\sigma)=\exp[-\overline{R}_-(\sigma)]$$

$$(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}=i\sigma_-^{\frac{1}{2}}+\sigma_+^{\frac{1}{2}}, \quad (\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}=i\sigma_-^{-\frac{1}{2}}+\sigma_+^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_+^{\alpha}=\Theta(x)\sigma^{\alpha}, \quad \sigma_-^{\alpha}=\Theta(-\sigma)|\sigma|^{\alpha}$$

$$R(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\lambda_2+|\sigma|}{|\sigma|}\exp(-i\sigma x)dx$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\overline{K}_+(\sigma)\overline{\tau}^+(\sigma)+2i\mu(1-\varepsilon^2)\sigma\overline{K}_-(\sigma)\overline{U}_-^{(2)}(\sigma)=(\lambda_2-\lambda_1)\overline{K}_-(\sigma)\overline{\tau}_1(\sigma)-$$
$$-\overline{K}_-(\sigma)\overline{G}(\sigma)i\sigma+\lambda_1 P\overline{K}_-(\sigma)+\overline{K}_-(\sigma)\overline{f}(\sigma)$$

Так как

$$\overline{\varphi}(\sigma)=\overline{K}_-(\sigma)\overline{\tau}_1(\sigma)=\overline{\varphi}_+(\sigma)+\overline{\varphi}_-(\sigma)$$
$$\overline{\Psi}(\sigma)=i\sigma\overline{K}_-(\sigma)\overline{G}(\sigma)=\overline{\Psi}_+(\sigma)+\overline{\Psi}_-(\sigma)$$
$$\overline{\gamma}(\sigma)=\overline{K}_-(\sigma)\overline{f}(\sigma)=\overline{\gamma}_+(\sigma)+\overline{\gamma}_-(\sigma)$$

где

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K}_-(\sigma)\overline{\tau}_1(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}i\sigma\overline{K}_-(\sigma)\overline{G}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

$$\gamma(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K}_-(\sigma)\overline{f}(\sigma)\exp(-i\sigma x)d\sigma$$

то

$$\overline{Q}_1^+(\sigma)=\overline{K}_+(\sigma)\overline{\tau}^+(\sigma)-(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varphi}_+(\sigma)+\overline{\psi}_+(\sigma)-\overline{\gamma}_+(\sigma)=$$
$$=-2i\mu(1-\varepsilon^2)\sigma\overline{K}_-(\sigma)\overline{U}_-^{(2)}(\sigma)+\lambda_1 P\overline{K}_-(\sigma)+(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varphi}_-(\sigma)-$$
$$-\overline{\psi}_-(\sigma)+\overline{\gamma}_-(\sigma)=\overline{Q}_2^-(\sigma) \tag{5}$$

Применив к (5) обратное преобразование Фурье, получим

$$Q_1^+(x)\equiv Q_2^-(x)$$

которое может иметь место только при [4]

$$Q_1^+(x)\equiv Q_2^-(x)=a_0\delta(x)+a_1\delta^{(1)}(x)+\ldots+a_n\delta^{(n)}(x) \tag{6}$$

Здесь $\delta^{(n)}(x)$—n-ая производная функции Дирака, n—любое конечное целое число.

Из (6) следует, что

$$\overline{K}_+(\sigma)\overline{\tau}^+(\sigma)-(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varphi}_+(\sigma)+\overline{\psi}_+(\sigma)-\overline{\gamma}_+(\sigma)=$$
$$=A_0+A_1\sigma+\ldots+A_n\sigma^n \tag{7}$$

Далее, ввиду того, что $\tau^+(x)$—суммируемая функция, из (7) $\overline{\tau}^+(\sigma)$ определится в виде

$$\overline{\tau}^+(\sigma)=\frac{A_0}{[\overline{K}_+^*(\sigma)]^{-1}}+(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\overline{\varphi}_+(\sigma)}{[\overline{K}_+^*(\sigma)]^{-1}}-\frac{\overline{\psi}_+(\sigma)}{[\overline{K}_+^*(\sigma)]^{-1}}+\frac{\overline{\gamma}_+(\sigma)}{[\overline{K}_+^*(\sigma)]^{-1}} \tag{8}$$

$$\overline{K}_+^*(\sigma)=[\overline{K}_+(\sigma)]^{-1}$$

Здесь A_0 — неизвестная постоянная, которая определяется из условия $\overline{\tau}(0)=P$ и имеет вид

$$A_0=\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_2}\,(1+i)P-(\lambda_2-\lambda_1)\overline{\varphi}_+(0)+\overline{\psi}_+(0)-\overline{\gamma}_+(0)$$

поскольку

$$\overline{K}^*_+(\sigma)\big|_{\sigma\to 0}=[\overline{K}_+(\sigma)]^{-1}\big|_{\sigma\to 0}=\frac{1-i}{\sqrt{2\lambda_2}}$$

Теперь применив к (8) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau^+(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^a L(x,s)\tau(s)ds-\int_a^b L^*(x,s)g(s)ds+$$

$$+X[\lambda_2 L(x,b)-\lambda_1 L(x,a)]+A_0K^*_+(x) \qquad (9)$$

где

$$L(x,s)=\int_0^a K^*_+(x-t)K_-(t-s)dt,\quad (0<x<\infty;\ \ 0<s<a)$$

$$L^*(x,s)=\frac{d}{ds}\int_0^b K^*_+(x-t)K_-(t-s)dt,\ (0<x<\infty;\ a<s<b)$$

Отметим, что при $\lambda_1=\lambda_2$ и $a\to b$ из (9) получим решение задачи Койтера для полубесконечной однородной накладки в виде [5]

$$\tau^+(x)=\frac{1}{2}\sqrt{2\lambda_2}(1+i)PK^*_+(x)$$

Имея в виду, что $\tau^+(x)=0$ при $a<x<b$, из (9) получим разрешающую систему интегральных уравнений следующего вида:

$$\tau(x)=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^a L(x,s)\tau(s)ds-\int_a^b L^*(x,s)g(s)ds+$$

$$+X[\lambda_2 L(x,b)-\lambda_1 L(x,a)]+A_0K^*_+(x),\ (0<x<a) \qquad (10)$$

$$0=(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^a L(x,s)\tau(s)ds-\int_a^b L^*(x,s)g(s)ds+$$

$$+X[\lambda_2 L(x,b)-\lambda_1 L(x,a)]+A_0K^*_+(x),\quad (a<x<b)$$

при условии $\int_0^a \tau(s)ds=P-X.$

После решения (10) значения $\tau(x)$ при $x>b$ определяются из уравнения (9).

Заметим, что поставленную задачу при предположении, что X неизвестно и определяется из условия

$$\int_b^\infty \tau(x)dx = X \tag{11}$$

можно трактовать как задачу для полуплоскости с полубесконечной кусочно-однородной накладкой, которая по каким-то причинам оторвана от полуплоскости на участке $a<x<b$.

При $E_1=E_2$ задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_a^b L^*(x, s)g(s)ds = \lambda_1[L(x, b) - L(x, a)]X + A_0K_+^*(x)$$

$$(a<x<b) \tag{12}$$

которая совместно с условием (11) разрешает задачу для упругой полуплоскости с полубесконечной однородной накладкой с вышеуказанным дефектом крепления.

Теперь приступим к исследованию ядер $L(x, s)$ и $L^*(x, s)$. Для этого заметим, что имеет место следующее разложение функции $K_+^*(x)$ [4]:

$$K_+^*(x)=K^*(x_+) = \frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{4}}x_-^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi^3}\lambda_2 e^{-i\frac{\pi}{4}}x_+^{\frac{1}{2}}\Big| \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)-\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\ln(\lambda_2x)_+ \Big| - \frac{1}{4\pi^3}\lambda_2^2 e^{-i\frac{\pi}{4}}x_+^{\frac{3}{2}}\Big| (3\pi^2-2)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)- \tag{13}$$

$$-4\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-2\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)+4\left(\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\ln(\lambda_2x)_+ -$$

$$-2\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\ln^2(\lambda_2x)_+ \Big| + 0x_+^{\frac{5}{2}}\{1+\ln(\lambda_2x)_+ + \ln^2(\lambda_2x)_+ + \ln^2(\lambda_2x)_+\}$$

$\Gamma(z)$—известная гамма-функция $\ln(\lambda_2x)_- = \Theta(x)\ln|\lambda_2x|$. Отметим, что $K_-(x)=\overline{K^*(x_-)}$.

Далее, поскольку

$$L(x, s)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^s K^*(x-t)\overline{K^*(s-t)}\,dt, & x>s\\ \displaystyle\int_0^x K^*(x-t)\overline{K^*(s-t)}\,dt, & x<s\end{cases}$$

то используя (13), можно вычислить $L(x, s)$. В итоге получим

$$L(x, s)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}+\frac{2}{\pi}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{s})+L_1(x, s) \tag{14}$$

$$(0<x<a), \quad (0<s<a)$$

где производные функции $L_1(x, s)$ по x и s—квадратично суммируемые функции в квадрате $0<x, s<a$. Что касается $L^*(x, s)$, то она представится в виде

$$L^*(x, s)=\frac{\partial}{\partial s}L(x, s)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{s-x}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{x}+\sqrt{s})}+\frac{\partial}{\partial s}L_1(x, s)$$

$$(a<x<b), \quad (a<s<b) \tag{15}$$

Из представления ядер (14), (15) следует, что с помощью полиномов Чебышева систему интегральных уравнений (10) можно свести к решению квазивполне регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений. Из (15) следует также, что тангенциальные контактные напряжения в точках a и b имеют корневую особенность. Очевидно, что $\tau(x)$ и при $x\to 0$ имеет корневую особенность.

CONTACT PROBLEM FOR ELASTIC SEMI-PLANE STRENGTHENED ON ITS BOUNDARY WITH THE FINITE AND SEMI-INFINITE STRINGERS

P. V. AGABEKIAN

ԵԶՐՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՎ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Պ. Վ. ԱՂԱԲԵԿՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է եզրում փոքր հաստատուն հաստությամբ երկու վերադիրներով ուժեղացված առաձգական կիսահարթության համար խնդիր։ Վերադիրներից մեկը կիսաանվերջ է և դեֆորմացվում է ծայրերում կիրառված ուժերի ազդեցության տակ։ Վերադիրների առաձգականության մոդուլները տարբեր են։

Խնդիրը Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ և ֆակտորիզացիայի եղանակով բերված է վերջավոր վերադիրի տակ գործող շոշափող կոնտակտային լարումների և վերադիրների միջև միջանկյալ հատվածում եղած դեֆորմացիաների նկատմամբ ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծմանը։

Մասնավոր դեպքում, երբ վերադիրները նույն նյութից են, խնդիրը բերված է վերադիրների միջև միջանկյալ հատվածում եղած դեֆորմացիաների նկատմամբ առաջին սեռի եզակի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.—Ingenieur Archiv. 1932, Bd. 3, Heft 2, s. 123—129.
2. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением.—ПММ, 1968, т. *32*, №4, с. 632—646.
3. *Саркисян В. С.* Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1983.
4. *Григорян Э. Х.* О контактной задаче для упругой полуплоскости, усиленной полубесконечной кусочно-однородной накладкой.—Межвузовск. сб. н. т. «Механика», Ереван, 1982, №1, с. 66—72.
5. *Koiter W. T.* On the diffusion of load from a stiffener into a sheet.—The Quarterly of Mechanics and Applied Mattematics. 1955, vol. 8, part. 2, p. 164—178.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
31. III. 1967