ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 3, 1989 Механика

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С РЕБРАМИ

АКОПЯН А. С., ЗАРГАРЯН С. С.

Переход в задачах теории упругости от областей с гладкой граничной поверхностью к областям с ребрами или иными нерегулярностями на границе приводит к определенным трудностям в построении алгоритмов численного решения граничных интегральных уравнений, порожденных этими задачами, что связано с изменениями при таком переходе функционально-аналитических свойств различных потенциалов, представляющих решения краевых задач. Как показали исследования [1, 2], решения интегральных уравнений гармонических задач и задач плоской теории упругости оказываются негладкими или имеют особенности вблизи угловых точек контура в зависимости от раствора угла, которые представляются степенными (степенно-логарифмическими) функциями.

В настоящей работе выводятся асимптотики решений граничных интегральных уравнений осесимметричных задач теории упругости, порожденные системой уравнений Ламе, при заданных на границе смещениях (задача I) или напряжениях (задача II), когда граничная поверхность имеет ребра и не содержит конических точек. Получены формулы для коэффициентов в асимптотиках решений интегральных уравнений. Рассматриваются случаи отсутствия кратных корней трансцендентных уравнений, характеризующих поведение решений краевых задач вблизи ребер поверхности вращения.

Пусть $\partial\Omega$—замкнутая поверхность, образованная вращением вокруг оси простой кусочно-гладкой кривой L с конечным числом угловых точек $p_1, p_2, \ldots, p_m$, и не имеющая конических точек. Ограниченную область, лежащую внутри $\partial\Omega$, обозначим через Ω^i, а область, внешнюю по отношению к $\partial\Omega$—через Ω^0.

Обозначим через γ_j, $j=1, 2, \ldots, m$ ребро на $\partial\Omega$, образованное вращением точки p_j, и через $2\alpha_j$ двухгранный угол между касательными плоскостями к $\partial\Omega$ в точке $x\in\gamma_j$, со стороны Ω^i.

1. Рассмотрим сначала первую внутреннюю задачу теории упругости

$$Au^i \equiv \mu\Delta u^i+(\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u^i=0 \quad \text{в} \quad \Omega^i, \quad u^i|_{\partial\Omega}=g \tag{1.1}$$

где u^i—вектор смещений, λ, μ—коэффициенты Ламе, g—заданная на $\partial\Omega$ вектор-функция.

Представление решения задачи (1.1) в виде обобщенного упругого потенциала двойного слоя [3]

$$(W\varphi)(x)=\int\limits_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*\varphi(y)dS_y \tag{1.2}$$

приводит почти всюду на $\partial\Omega$ к системе сингулярных интегральных уравнений относительно вектора плотности

$$-\varphi(x)+\int\limits_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*\varphi(y)dS_y=g(x),\ x\in\partial\Omega\setminus K \tag{1.3}$$

где $K=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\gamma_j$—множество ребер граничной поверхности,

$\Gamma(y-x)=\|\Gamma_{ij}\|_{3\times 3}$—матрица фундаментальных решений Кельвина-Сомильяна с элементами

$$\Gamma_{ij}=\frac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\delta_{ij}|y-x|^{-1}+\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{|y-x|^3}$$

$T(\partial_y, n)=\|T_{ij}\|_{3\times 3}$—матричный дифференциальный оператор напряжений

$$T_{ij}=\lambda n_i\frac{\partial}{\partial y_j}+\mu n_j\frac{\partial}{\partial y_i}+\mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n},\quad n=(n_1, n_2, n_3)$$

n—орт нормали к $\partial\Omega$ в точке y.

Согласно [4], система (1.3) однозначно разрешима в пространстве $C_\beta^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ предельных значений на $\partial\Omega\setminus K$ функций из $C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^i)$, имеющих конечную норму

$$\|f; C_\beta^{1,\alpha}(\Omega^i)\|\sup_{x,y\in\partial\Omega}\frac{|(d^\beta\nabla f)(x)-(d^\beta\nabla f)(y)|}{|x-y|^\alpha}+\sup_{x\in\Omega^i}|x|\,|f(x)| \tag{1.4}$$

если $g\in C_\beta^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ и $0<1-\beta+\alpha<1/2$.

Следуя [2], выразим решение системы (1.3) через решение некоторой вспомогательной краевой задачи. Пусть v^0—решение задачи

$$Av^e=0\quad\text{в}\quad\Omega^e,\quad Tv^e=\frac{1}{2}(Tu^i-Tu^e)\quad\text{на}\quad\partial\Omega\setminus K \tag{1.5}$$

где u^e—решение задачи

$$Au^e=0\quad\text{в}\quad\Omega^e,\quad u^e\big|_{\partial\Omega}=g \tag{1.6}$$

При $x\in\partial\Omega\setminus K$ на основании формулы Бетти имеем

$$u^i(x)=-\int\limits_{\partial\Omega}\{[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*u^i(y)-\Gamma(y-x)[T(\partial_y, n)u^i]\}dS_y$$

$$u^e(x)=\int\limits_{\partial\Omega}\{[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^*u^e(y)-\Gamma(y-x)[T(\partial_y, n)u^e]\}dS_y \tag{1.7}$$

Складывая интегральные представления (1.7) и учитывая граничные условия задач (1.1) и (1.6), получим

$$g(x)=\int_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)\frac{1}{2}\{T(\partial_y, n)u^i-T(\partial_y, n)u^e\}dS_y \tag{1.8}$$

Из интегрального представления для v^e при $x\in\partial\Omega\setminus K$

$$v^e(x)=\int_{\partial\Omega}\{[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* v^e(y)-\Gamma(y-x)[T(\partial_y, n)v^e]\}dS_y$$

учитывая (1.8) и граничное условие задачи (1.5), находим

$$-v^e(x)+\int_{\partial\Omega}[T(\partial_y, n)\Gamma(y-x)]^* v^e(y)dS_y=g(x)$$

Сравнивая полученное уравнение с (1.3), окончательно

$$\psi(x)=v^e(x),\quad x\in\partial\Omega \tag{1.9}$$

На основании равенства (1.9) можно теперь вывести асимптотики решений интегрального уравнения (1.3).

Введем локальную ортогональную систему координат ρ, φ, s, где ρ, φ—полярные координаты в меридианальном сечении с центром в точке $p_j\in\gamma_j$, а s—дуговая координата вдоль ребра γ_j. Уравнение Ламе в введенных координатах дает следующую систему уравнений относительно компонент смещения u_ρ, u_φ, u_s [5]:

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\frac{k_1}{\rho k}-u_\rho\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{\cos^2\varphi}{k^2}\right)\right]+(\lambda+3\mu)\left[\frac{\partial u_s}{\partial s}\frac{R\cos\varphi}{k^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right]+u_\varphi\frac{\sin\varphi}{\rho k^2}[(\lambda+3\mu)\rho\cos\varphi-R\mu]+(\lambda+\mu)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho\partial\varphi}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}\frac{\sin\varphi}{k}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial\rho\partial s}\frac{R}{k}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial s^2}\frac{R^2}{k^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{\rho k}\right]=0$$

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho k}+u_\rho\frac{R\sin\varphi}{\rho k^2}\right]-(\lambda+3\mu)\frac{\partial u_s}{\partial s}\frac{R\sin\varphi}{k^2}+$$
$$+\frac{1}{\rho^2 k}\left\{\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\left[(\lambda+3\mu)k-(\lambda+\mu)\rho\cos\varphi\right]+u_\varphi\left[(\lambda+3\mu)\frac{\rho R\cos\varphi}{k}-\mu\frac{R^2}{k}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-(\lambda+2\mu)\frac{\rho^2}{k}\right]\right\}+(\lambda+\mu)\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\varphi}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial\varphi\partial s}\frac{R}{\rho k}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial s^2}\frac{R^2}{k^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}\frac{k_1}{\rho k}\right]=0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{R^2}{k^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2}+(\lambda+3\mu)\frac{R\sin\varphi}{k^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial s}+(\lambda+\mu)\frac{R}{k}\left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi\partial s}\right]+$$

$$+\frac{R}{k}\frac{\partial u_\varphi}{\partial s}\left[(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}-(\lambda+3\mu)\frac{\cos\varphi}{k}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u_s}{\partial\rho}\frac{k_1}{\rho k}-\frac{u_s}{k^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial\varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_s}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho k}\right]=0 \qquad (1.10)$$

где R—радиус кривизны ребра, $k=R-\rho\cos\varphi$, $k_1=R-2\rho\cos\varphi$.

В случае осесимметричной нагрузки, как известно [6, 7]

$$u_\rho=u_\rho(\rho,\varphi),\quad u_\varphi=u_\varphi(\rho,\varphi),\quad u_s=0 \qquad (1.11)$$

Рассмотрим уравнения (1.10) в малой окрестности ребра, так что $0<\rho<\delta$, где $\delta\ll R$. Следуя [8], пренебрегая членами порядка ρ/R, приходим к уравнениям

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}-\frac{u_\rho}{\rho^2}\right]-(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho\partial\varphi}+$$

$$+\mu\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}+(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\varphi}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho^2}\right]=0 \qquad (1.12)$$

Полученные уравнения совпадают с системой Ламе на плоскости в полярных координатах ρ, φ.

Пусть $0<\alpha_j<\pi/2$. Для решений задач (1.1) и (1.6) имеем при $\rho\to 0$

$$u^i=g(0)+O(\rho) \qquad (1.13)$$

$$u^e=g(0)+e_\rho C\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_u+1)\varphi-\sin(\lambda_u-1)\varphi\right\}+$$

$$+e_\varphi\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}C\rho^{\lambda_u}\left\{-\frac{\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_u+1)\varphi+\cos(\lambda_u-1)\varphi\right\}+O(\rho)$$

$$(1.14)$$

где $\varkappa=3-4\nu$, ν—коэффициент Пуассона, λ_u—корень уравнения $\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)=\lambda_u\sin 2(\pi-\alpha)$ с наименьшей положительной действительной частью. Подставив в граничные условия задачи (1.5) решения (1.13) и (1.14), для v^e получаем

$$v^e-v^e(0)\sim e_\rho B_4\rho^{\lambda_t}\left\{\frac{\lambda_t+1}{\varkappa-\lambda_t}\frac{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_t+1)\varphi+\right.$$

$$\left.+\cos(\lambda_t-1)\varphi\right\}+e_\varphi\frac{1}{\varkappa-\lambda_t}B_4\rho^{\lambda_t}\left\{-(\lambda_t-1)\frac{\sin(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\lambda_t+1)\varphi+(\varkappa+\lambda_t)\cos(\lambda_t-1)\varphi\right\},\quad -(\pi-\alpha)\leqslant\varphi\leqslant(\pi-\alpha)$$

$$+\frac{R}{h}\frac{\partial u_\rho}{\partial s}\left[(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}-(\lambda+3\mu)\frac{\cos\varphi}{k}\right]+\mu\left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial\rho^2}+\frac{\partial u_s}{\partial\rho}\frac{k_1}{\rho k}-\frac{u_s}{k^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial\varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_s}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho k}\right]=0 \qquad (1.10)$$

где R—радиус кривизны ребра, $k=R-\rho\cos\varphi$, $k_1=R-2\rho\cos\varphi$.

В случае осесимметричной нагрузки, как известно [6, 7]

$$u_\rho\equiv u_\rho(\rho,\varphi),\quad u_\varphi\equiv u_\varphi(\rho,\varphi),\quad u_s\equiv 0 \qquad (1.11)$$

Рассмотрим уравнения (1.10) в малой окрестности ребра, так что $0<\rho<\delta$, где $\delta\ll R$. Следуя [8], пренебрегая членами порядка ρ/R, приходим к уравнениям

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}-\frac{u_\rho}{\rho^2}\right]-(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho\partial\varphi}+$$

$$+\mu\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\varphi^2}=0$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\varphi^2}+(\lambda+3\mu)\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+(\lambda+\mu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\varphi}+\mu\left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\rho^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho^2}\right]=0 \qquad (1.12)$$

Полученные уравнения совпадают с системой Ламе на плоскости в полярных координатах ρ, φ.

Пусть $0<\alpha_j<\pi/2$. Для решений задач (1.1) и (1.6) имеем при $\rho\to 0$

$$u^i=g(0)+O(\rho) \qquad (1.13)$$

$$u^e=g(0)+e_\rho C\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_u+1)\varphi-\sin(\lambda_u-1)\varphi\right\}+$$

$$+e_\varphi\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}C\rho^{\lambda_u}\left\{-\frac{\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_u+1)\varphi+\cos(\lambda_u-1)\varphi\right\}+O(\rho)$$

$$(1.14)$$

где $\varkappa=3-4\nu$, ν—коэффициент Пуассона, λ_u—корень уравнения $\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)=\lambda_u\sin 2(\pi-\alpha)$ с наименьшей положительной действительной частью. Подставив в граничные условия задачи (1.5) решения (1.13) и (1.14), для v^e получаем

$$v^e-v^e(0)\sim e_\rho B_4\rho^{\lambda_t}\left\{\frac{\lambda_t+1}{\varkappa-\lambda_t}\frac{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_t+1)\varphi+\right.$$

$$\left.+\cos(\lambda_t-1)\varphi\right\}+e_\varphi\frac{1}{\varkappa-\lambda_t}B_4\rho^{\lambda_t}\left\{-(\lambda_t-1)\frac{\sin(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\lambda_t+1)\varphi+(\varkappa+\lambda_t)\cos(\lambda_t-1)\varphi\right\},\quad -(\pi-\alpha)\leqslant\varphi\leqslant(\pi-\alpha)$$

где λ_I—корень уравнения $\sin 2\lambda_I(\pi-\alpha)+\lambda_I\sin 2(\pi-\alpha)=0$ с наименьшей положительной действительной частью. На основании (1.9), учитывая, что $\lambda_I<\lambda_{II}$ при $0<\alpha<\pi/2$, получаем

$$\psi-\psi(0)\sim e_\rho\frac{B_4}{2}\rho^{\lambda_I}\left\{\frac{\lambda_I+1}{\varkappa-\lambda_I}\cos(\lambda_I-1)(\pi-\alpha)+\cos(\lambda_I-1)(\pi-\alpha)\right\}+$$

$$+e_\varphi\frac{B_4}{2}\rho^{\lambda_I}\left\{\mp\frac{\lambda_I-1}{\varkappa-\lambda_I}\sin(\lambda_I-1)(\pi-\alpha)\pm\frac{\varkappa+\lambda_I}{\varkappa-\lambda_I}\sin(\lambda_I-)(\pi-\alpha)\right\} \tag{1.15}$$

где верхние знаки соответствуют лучу $\varphi=\pi-\alpha$, нижние—лучу $\varphi=-(\pi-\alpha)$. Заметим, что плотность ψ обладает осевой симметрией, т. е. $\psi_\theta\equiv 0$, $\psi_\rho\equiv\psi(\rho,\varphi)$, $\psi_\varphi\equiv\psi_\varphi(\rho,\varphi)$. Это непосредственно следует из осевой симметрии краевых задач (1.1) и (1.6), а также из граничных условий вспомогательной задачи (1.5) и формулы (1.9).

Перейдем теперь к определению коэффициента B_4 в асимптотике (1.15). Используя метод работы [9], применим формулу Бетти к функциям v^e и ζ^e по области $\Omega^e_\varepsilon=\Omega^e\cap\{x:|x-y|>\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to 0$, $y\in\gamma_I$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega^e_\varepsilon}\{v^eA\zeta^e-\zeta^eAv^e\}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\Omega^e_\varepsilon}\{v^eT\zeta^e-\zeta^eTv^e\}dS \tag{1.16}$$

Здесь ζ^e—решение задачи

$$A\zeta^e=0 \quad \text{в} \quad \Omega^e,\quad T\zeta^e|_{\partial\Omega\setminus K}=0 \tag{1.17}$$

имеющее в окрестности γ_I асимптотику

$$\zeta^e\sim e_\rho\rho^{-\lambda_I}\left\{-\frac{\lambda_I-1}{\varkappa+\lambda_I}\frac{\cos(\lambda_I+1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_I-1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_I-1)\varphi+\cos(\lambda_I+1)\varphi\right\}+$$

$$+e_\varphi(\varkappa+\lambda_I)^{-1}\rho^{-\lambda_I}\left\{-(\lambda_I-1)\frac{\sin(\lambda_I+1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_I-1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_I-1)\varphi-\right.$$

$$\left.-(\varkappa-\lambda_I)\sin(\lambda_I+1)\varphi\right\}$$

В левой части (1.16) имеем тождественный нуль, учитывая (1.17) и (1.5), а в правой части, так как $\zeta^e_\theta=v^e_\theta=0$, для подынтегральной функции будем иметь

$$v^eT\zeta^e=v^e_\rho(T\zeta^e)_\rho+v^e_\varphi(T\zeta^e)_\varphi\equiv[v^eT\zeta^e]_2$$

$$\zeta^eTv^e=\zeta^e_\rho(Tv^e)_\rho+\zeta^e_\varphi(Tv^e)_\varphi=[\zeta^eTv^e]_2$$

Поэтому

$$\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\{v^eT\zeta^e-\zeta^eTv^e\}dS=2\pi\int\limits_{\Delta\Omega_\varepsilon}\{[v^eT\zeta^e]_2-[\zeta^eTv^e]_2\}dS \tag{1.18}$$

где $\Delta\Omega_\varepsilon$—образующая поверхности вращения $\partial\Omega_\varepsilon$. Переходя в (1.16) к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая (1.18), будем иметь

$$B_4 = K_1^{-1}(a)\int\limits_L [\zeta^e T u^i]_2 ds$$

или

$$B_4=[2\pi K_1(a)]^{-1}\int\limits_{\partial\Omega}\zeta^e T u^i\,dS, \quad (dS=2\pi\rho ds) \tag{1.19}$$

где $$K_1(a)=\frac{\mu}{\varkappa+\lambda_t}\Big\{\Big[\nu_3+\nu_4-\frac{2+\lambda_t(\varkappa+1)}{\varkappa+\lambda_t}\Big]\sin\lambda_t(\pi-a)+$$

$$+\Big[\nu_4-\nu_3+\frac{\lambda_t^2(1-4\lambda_t)-\lambda_t(\varkappa-1)}{\varkappa+\lambda_t}\Big]\sin 2(\pi-a)+2(\pi-a)\Big[(\lambda_t+1)\times$$

$$\times\Big[\nu_4-1+\frac{\lambda_t^2}{\varkappa+\lambda_t}\Big]\frac{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}+(\lambda_t-1)\Big[\nu_3-1+$$

$$+\frac{\lambda_t(2\lambda_t+\varkappa-1)}{\varkappa+\lambda_t}\Big]\frac{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}\Big]\Big\},\quad \nu_1=\frac{\varkappa+\lambda_t}{\varkappa-\lambda_t},\quad \nu_2=\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}$$

$$\nu_3=\frac{1+\nu(\lambda_t-1)(1+\nu_2)}{1-2\nu},\quad \nu_4=\frac{\nu_1-\nu(\lambda_t+1)(1+\nu_1)}{\nu_1(1-2\nu)}$$

Продолжая ζ^e в Ω^i путем решения задачи

$$Az^i=0 \quad \text{в} \quad \Omega^i,\quad z^i=\zeta^e \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

получим окончательно

$$B_4=[2\pi K_1(\alpha)]^{-1}\int\limits_{\partial\Omega}(g-g(0))Tz^i dS \tag{1.20}$$

Формулы (1.15) и (1.20) определяют главный член асимптотики вектор-функции $\psi-\psi(0)$ в случае $0<\alpha<\pi/2$.

Пусть теперь $\pi/2<\alpha<\pi$. В окрестности ребра решения задач (1.1), (1.6) имеют при $\rho\to 0$ асимптотики

$$u^i=g(0)+e_\rho A_3\rho^{\lambda_u}\Big\{\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin(\lambda_u+1)\varphi-\sin(\lambda_u-1)\varphi\Big\}+$$

$$+e_\varphi A_3\rho^{\lambda_u}\Big\{\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\cos(\lambda_u+1)\varphi+\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}\cos(\lambda_u-1)\varphi\Big\}+O(\rho)$$

$$u^e=g(0)+O(\rho)$$

Подставив эти решения в (1.5), определим асимптотику для v^e

$$v^e-v^e(0)\sim e_\rho\rho^{\lambda_u}\{D_1\sin(\lambda_u+1)\varphi-D_2\sin(\lambda_u-1)\varphi\}+$$

$$+e_\varphi\rho^{\lambda_u}\{D_1\cos(\lambda_u+1)\varphi+\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}D_2\cos(\lambda_u-1)\varphi\},\quad -(\pi-\alpha)\leqslant\varphi\leqslant\pi-\alpha$$

где

$$D_1=(\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)-\lambda_u\sin(\pi-\alpha))^{-1}\left\{\lambda_u\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin[\pi(\lambda_u-1)+2\alpha]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}\sin[\pi(\lambda_u-1)-2\alpha\lambda_u]+\frac{\lambda_u^2-1}{2\lambda_u}(1-\nu_2)\sin[\pi(\lambda_u-1)]\right\}A_3$$

$$D_3=2\lambda_u(\sin 2\lambda_u(\pi-\alpha)-\lambda_u\sin(\pi-\alpha))^{-1}\left\{2\lambda_u\frac{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\lambda_u+1)\pi+\frac{2\lambda_u^2}{\varkappa-\lambda_u}\sin[\pi(\lambda_u+1)-2\alpha]-\frac{2\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}\sin[\pi(\lambda_u+1)-2\alpha\lambda_u]\right\}A_3$$

В силу (1.3) имеем

$$\psi-\psi(0)\sim\pm e_\rho\frac{1}{2}\rho^{\lambda_u}\{D_1\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)-D_3\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)\}+$$

$$+e_\varphi\frac{1}{2}\rho^{\lambda_u}\left\{D_1\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)+\frac{\varkappa+\lambda_u}{\varkappa-\lambda_u}D_3\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)\right\}\tag{1.21}$$

Здесь верхний знак соответствует лучу $\varphi=\pi-\alpha$, а нижний лучу $\varphi=-(\pi-\alpha)$. Постоянная A_3 определяется аналогично предыдущему случаю

$$A_3=-[2\pi K_2(\alpha)]^{-1}\int_{\partial\omega}(g-g(0))T\zeta^l\,dS\tag{1.22}$$

где ζ^l—решение задачи

$$A\zeta^l=0 \text{ в } \Omega^l,\quad \zeta^l|_{\partial\Omega}=0$$

имеющее при $\rho\to 0$ асимптотику

$$\zeta^l\sim e_\rho\rho^{-\lambda_u}\left\{-\frac{\sin(\lambda_u+1)\alpha}{\sin(\lambda_u-1)\alpha}\sin(\lambda_u-1)\varphi+\sin(\lambda_u+1)\varphi\right\}+$$

$$+e_\varphi\rho^{-\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u+1)\alpha}{\sin(\lambda_u-1)\alpha}\cos(\lambda_u-1)\varphi+\nu_2\cos(\lambda_u+1)\varphi\right\},\quad -\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha$$

$$K_2(\alpha)=\left(1-\frac{\varkappa+\lambda_u^2}{\varkappa^2-\lambda_u^2}(\sin 2\alpha\lambda_u+\lambda_u\sin 2\alpha)+\frac{\nu_7-\nu_8}{2\lambda_u}(\sin 2\alpha\lambda_u-\sin 2\alpha)+\right.$$

$$+\alpha\left[(\nu_5-\nu_8+1)\frac{\sin(\lambda_u-1)\alpha}{\sin(\lambda_u+1)\alpha}+(\nu_6+\nu_7-1)\frac{\sin(\lambda_u+1)\alpha}{\sin(\lambda_u-1)\alpha}\right]+\left(\frac{\nu_5+\nu_8-1}{2(\lambda_u+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu_6-\nu_7+1}{2(\lambda_u-1)}\right)\sin 2\alpha\lambda_u-\left(\frac{\nu_5+\nu_8-1}{2(\lambda_u+1)}-\frac{\nu_6-\nu_7+1}{2(\lambda_u-1)}\right)\sin 2\alpha$$

$$\nu_5=\frac{\lambda_u(\varkappa-2\lambda_u-1)}{\varkappa+\lambda_u},\quad\nu_6=\frac{\lambda_u(\varkappa+2\lambda_u-1)}{\varkappa-\lambda_u},\quad\nu_7=\frac{1+\nu(\lambda_u-1)(1+\nu_2)}{1-2\nu}$$

$$\nu_8=\frac{\nu_2-\nu(\lambda_u+1)(1+\nu_2)}{\nu_2(1-2\nu)}$$

Формулы (1.21), (1.22) определяют главный член асимптотики $\psi-\psi(0)$ в случае $\pi/2<\alpha<\pi$.

2. Перейдем теперь к второй задаче теории упругости для внешней области

$$Av^e=0 \quad \text{в} \quad \Omega^e, \quad Tv^e=h \quad \text{на} \quad \partial\Omega\setminus K \tag{2.1}$$

где h—гладкая на $\partial\Omega\setminus K$ вектор-функция.

Решение задачи (2.1) будем искать в виде обобщенного упругого потенциала простого слоя [3]

$$(V\psi)(x)=\int\limits_{\partial\Omega}\Gamma(y-x)\,\psi(y)\,dS_y \tag{2.2}$$

Учитывая граничные свойства вектора $(TV)(\psi)$ и граничные условия задачи (2.1), получим интегральное уравнение относительно ψ

$$-\psi(x)+\int\limits_{\partial\Omega}T(\partial_x, n)\Gamma(y-x)\,\psi(y)\,dS_y=h(x), \quad x\in\partial\Omega\setminus K \tag{2.3}$$

Пусть v^i—решение задачи

$$Av^i=0 \quad \text{в} \quad \Omega^i, \quad v^i=v^e \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{2.4}$$

Ввиду непрерывности предельных значений обобщенного упругого потенциала простого слоя и в силу формулы скачка для предельных значений оператора напряжений от потенциала (2.2), имеем

$$\psi=\frac{1}{2}[Tv^i-Tv^e] \tag{2.5}$$

Асимптотика решений системы интегральных уравнений (2.3) вблизи ребра γ_j на $\partial\Omega$ выводится из равенства (2.5).

Пусть $0<\alpha<\pi/2$. Решения задач (2.1) и (2.4) при $\rho\to 0$ имеют асимптотику

$$v^e-v^e(0)=O(\rho)$$

$$v^i-v^e(0)\sim e_\rho C_3\rho^{\lambda_u}\left\{\frac{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_u+1)\varphi-\sin(\lambda_u-1)\varphi\right\}+$$

$$+e_\varphi\nu_2C_3\rho^{\lambda_u}\left\{-\frac{\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_u+1)\varphi+\cos(\lambda_u-1)\varphi\right\}$$

$$-(\pi-\alpha)\leqslant\varphi\leqslant\pi-\alpha$$

Отсюда и из (2.5) получаем

$$\psi\sim e_\rho\frac{1}{2}C_3\rho^{\lambda_u-1}[\mp 2\mu\lambda_u\pm\mu(\lambda_u+1)(1-\nu_2)]\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)+$$

$$+e_\varphi\frac{1}{2}C_3\rho^{\lambda_u-1}[-2\mu\lambda_u\nu_2-\mu(\lambda_u-1)(1-\nu_2)]\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha) \tag{2.6}$$

где верхние знаки соответствуют лучу $\varphi=\pi-\alpha$, а нижние — лучу $\varphi=-(\pi-\alpha)$. Пользуясь вышеописанным методом, для постоянной C_3 получаем следующую формулу:

$$C_3=-[2\pi K_2(\pi-\alpha)]^{-1}\int_{\partial\Omega} v^i\, T\zeta^i\, dS_y \tag{2.7}$$

где ζ^i — решение задачи

$$A\zeta^i=0 \quad \text{в} \quad \Omega^i, \quad \zeta^i=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\setminus K$$

имеющее асимптотику

$$\zeta^i\sim e_\rho\rho^{-\lambda_u}\left\{-\frac{\sin(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}{\sin(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}\sin(\lambda_u-1)\varphi+\sin(\lambda_u+1)\varphi\right\}+$$
$$+e_\varphi\nu_2^{-1}\rho^{-\lambda_u}\left\{-\frac{\cos(\lambda_u+1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_u-1)(\pi-\alpha)}\cos(\lambda_u-1)\varphi+\cos(\lambda_u+1)\varphi\right\}$$

Непрерывно продолжая ζ^i в Ω^e путем решения задачи

$$Az^e=0 \quad \text{в} \quad \Omega^e, \quad Tz^e=T\zeta^i \quad \text{на} \quad \partial\Omega\setminus K \tag{2.8}$$

формулу (2.7) с учетом (2.4) перепишем так

$$C_3=-[2\pi K_2(\pi-\alpha)]^{-1}\int_{\partial\Omega} v^e\, Tz^e dS_y$$

Применяя формулу Бетти к решениям задач (2.1) и (2.8), окончательно получаем

$$C_3=-[2\pi K_2(\pi-\alpha)]^{-1}\int_{\partial\Omega} z^e\, h dS_y \tag{2.9}$$

Перейдем к случаю $\pi/2<\alpha<\pi$. Решения задач (2.1) и (2.4) имеют асимптотику при $\rho\to 0$

$$v^e-v^e(0)\sim e_\rho A_4\rho^{\lambda_t}\left\{-(1-\nu_1)\frac{\lambda_t+1}{2\lambda_t}\frac{\cos(\lambda_t-1)\alpha}{\cos(\lambda_t+1)\alpha}\cos(\lambda_t+1)\varphi+\right.$$
$$\left.+\cos(\lambda_t-1)\varphi\right\}+e_\varphi A_4\rho^{\lambda_t}\left\{(1-\nu_1)\frac{\lambda_t+1}{2\lambda_t}\frac{\cos(\lambda_t-1)\alpha}{\cos(\lambda_t+1)\alpha}\sin(\lambda_t+1)\varphi+\right.$$
$$\left.+\nu_1\sin(\lambda_t-1)\varphi\right\}, \quad -\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha \tag{2.10}$$

$$v^i-v^e(0)\sim e_\rho\rho^{\lambda_t}\{B_2\cos(\lambda_t+1)\varphi+B_4\cos(\lambda_t-1)\varphi\}+$$
$$+e_\varphi\rho^{\lambda_t}\{-B_2\sin(\lambda_t+1)\varphi+\nu_1B_4\sin(\lambda_t-1)\varphi\}$$
$$-(\pi-\alpha)\leqslant\varphi\leqslant(\pi-\alpha) \tag{2.11}$$

где

$$B_1 = A_4\left\{(\lambda_t+1)\frac{\cos(\lambda_t-1)\alpha}{\cos(\lambda_t+1)\alpha}\sin(\lambda_t+1)\pi+\varkappa\sin[\pi(\lambda_t+1)-2\alpha\lambda_t]-\right.$$

$$\left.-\lambda_t\sin[\pi(\lambda_t+1)-2\alpha]\right\}$$

$$B_2 = A_4\left\{-(1-\nu_1)\frac{\lambda_t+1}{2\lambda_t}\frac{\cos(\lambda_t-1)\alpha}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}+\frac{\cos(\lambda_t-1)\alpha}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}\right\}-$$

$$-B_4\frac{\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)}{\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)}$$

Подставив (2.10) и (2.11) в (2.5), получаем

$$\psi\sim\frac{1}{2}\rho^{\lambda_t-1}\{e_\rho[-2\mu\lambda_t B_2\cos(\lambda_t+1)(\pi-\alpha)-(\lambda_t+1)\mu(1-\nu_1)B_4\times$$

$$\times\cos(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)+A_4 2\mu\lambda_t(\lambda_t+1)(\varkappa-\lambda_t)^{-1}\cos(\lambda_t-1)\alpha+$$

$$+A_4\mu(\lambda_t+1)(1-\nu_1)\cos(\lambda_t-1)\alpha]\pm e_\varphi[-2\mu\lambda_t B_2\sin(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)-$$

$$-B_4\mu(\lambda_t-1)(1-\nu_1)\sin(\lambda_t-1)(\pi-\alpha)-A_4 2\mu\lambda_t(\lambda_t-1)(\varkappa-\lambda_t)^{-1}\sin(\lambda_t-1)\alpha-$$

$$-A_4\mu(\lambda_t-1)(1-\nu_1)\sin(\lambda_t-1)\alpha]\}$$

Здесь верхний знак соответствует $\varphi=-\alpha$, а нижний $-\varphi=\alpha$. Постоянная A_4 равна

$$A_4=[2\pi K_1(\pi-\alpha)]^{-1}\int_{\partial\Omega}\zeta^e h\,dS_y$$

где ζ^e—та же функция, что в (1.17).

Аналогично можно построить асимптотику решений системы сингулярных интегральных уравнений осесимметричных задач теории упругости в окрестности ребер, порожденной уравнениями Ламе для внешней области при заданных на границе внешних силах. Применение полученных асимптотик к численному решению интегральных уравнений с использованием априорной информации об асимптотиках можно провести так же, как в работе [10].

ON THE SOLUTION OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF TWO ELASTICITY PROBLEMS FOR AXISYMMETRIC BODIES IN DOMAINS WITH EDGES

A. S. HAKOBYAN, S. S. ZARGARYAN

ԿՈՂԵՐՈՎ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԱՌԱՆՑՔԱՀԱՄԱՉԱՓ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Ոչ ողորկ եզրերի դեպքում առաձգականության տեսության եզրային ինտեգրալ հավասարումների թվային լուծման ալգորիթմները դժվարություններ են պարունակում: Դրանք առաջանում են ինտեգրալ օպերատորների հատկություններից՝ կապված եզրային մակերեսի ոչ ողորկությունից: Աշխատանքում ստացված են առաձգականության տեսության երկու առանցքահամաչափ խնդիրների Լյամեի համակարգից առաջացած ինտեգրալ հավասարումների լուծումների ասիմպտոտիկան եզրային մակերեսի կողերի շրջակայքում: Ստացված են նաև բանաձևեր ասիմպտոտիկայի գործակիցների համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заргарян С. С., Мазья В. Г.* Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек контура.—ПММ, 1984, т. *48*, №1, с. 169—173.
2. *Заргарян С. С.* Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе, в окрестности угловых точек контура.—Докл. АН АрмССР, 1983, т. 77, №1, с. 30—35.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости—М.: Наука, 1976. 663 с.
4. *Мазья В. Г.* К теории потенциала для системы Ламе в области с кусочно-гладкой границей. В кн. Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложения: Тр. Всесоюз. симпоз. в Тбил. (21—23 апреля 1982 г.) Тбилиси, 1984, с. 123—129.
5. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра—ПММ, 1967, т. *31*, вып. 1, с. 178—186.
6. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к интегральным уравнениям. Сб: Проблемы механики твердого деформированного тела (к 60-летию акад. В. В. Новожилова). Л.: Судостроение, 1970, стр. 21—29.
7. *Андрианов Н. Ф., Перлин П. И.* Решение второй основной пространственной задачи для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями—В кн: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 4—Горький: изд. ГГУ, 1976.
8. *Зак А. Р.* Напряжения в окрестности угловой линии в телах вращения. Прикладная механика, 1964, т. *31*, №1, с. 177—179.
9. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Math., Nahr, 1977, в. 76, s. 29—60.
10. *Заргарян С. С.* Интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для многосвязных областей с углами—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №3, с. 87—98.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
20. V. 1988