ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 2, 1989 Механика

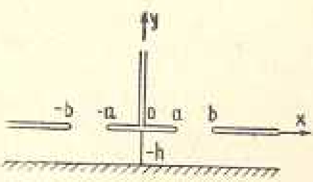
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ

АФЯН Б. А., СТЕПАНЯН С. П.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей конечную и три полубесконечные трещины (фиг. 1). Используя симметричность задачи, рассматривается напряженное состояние квадранта и полосы с соответствующими граничными условиями.

1. Рассматривается плоская задача теории упругости для квадранта, когда на границе заданы напряжения

$$\sigma_{xx}(0, y)=\sigma(y), \quad \tau_{xy}(0, y)=\tau(y), \quad (0<y<\infty)$$
$$\sigma_{yy}(x, 0)=p(x), \quad \tau_{xy}(x, 0)=q(x), \quad (0<x<\infty) \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Как известно [1, 2], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\Phi(x, y)$. Решение бигармонического уравнения, ограниченное при $x\to\infty$ и $y\to\infty$, может быть представлено в виде

$$\Phi=\int_0^\infty [A_1(\lambda)+\lambda y A_2(\lambda)]\frac{\cos\lambda x}{\exp(\lambda y)}\,d\lambda+\int_0^\infty [A_3(\lambda)+\lambda x A_4(\lambda)]\frac{\cos\lambda y}{\exp(\lambda x)}\,d\lambda \tag{1.2}$$

Здесь $A_i(\lambda)$ $(i=1, 4)$—функции, подлежащие определению из граничных условий (1.1).

Удовлетворением условий (1.1) и использованием формулы обращения Фурье, получается

$$\lambda^2 A_2(\lambda)-\lambda^2 A_1(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty q(t)\sin\lambda t\,dt=\bar{q}(\lambda)$$
$$\lambda^2 A_4(\lambda)-\lambda^2 A_3(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau(t)\sin\lambda t\,dt=\bar{\tau}(\lambda) \tag{1.3}$$

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(t^2+\lambda^2)(A_3(t)-2A_4(t))+(t^2-\lambda^2)A_4(t)]\,\frac{t^3dt}{(t^2+\lambda^2)^2} - \overline{p}(\lambda)$$

$$\lambda^2 A_3(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(t^2+\lambda^2)(A_1(t)-2A_2(t))+(t^2-\lambda^2)A_2(t)]\,\frac{t^3dt}{(t^2+\lambda^2)^2} - \overline{\sigma}(\lambda) \tag{1.4}$$

где
$$\overline{p}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p(t)\cos\lambda t\,dt,\quad \overline{\sigma}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sigma(t)\cos\lambda t\,dt$$

откуда

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^3 A_3(t)}{(t^2+\lambda^2)^2}\,dt + f_1(\lambda)$$

$$\lambda^2 A_3(\lambda) = -\frac{4\lambda^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^3 A_1(t)}{(t^2+\lambda^2)^2}\,dt + \varphi_1(\lambda) \tag{1.5}$$

где

$$f_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+\lambda t)\exp(-\lambda t)\tau(t)\,dt - \overline{p}(\lambda)$$

$$\varphi_1(\lambda) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+\lambda t)\exp(-\lambda t)q(t)\,dt - \overline{\sigma}(\lambda)$$

Система (1.5) посредством координатных преобразований $\lambda=\exp(\eta)$, $t=\exp(\xi)$ приводится к системе интегральных уравнений с разностным ядром, решение которой имеет вид

$$\lambda^2 A_1(\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\Big\{\int_0^\infty \sigma(t)K_\sigma(t,\lambda)\,dt + \int_0^\infty q(t)K_q(t,\lambda)\,dt -$$

$$-\int_0^\infty p(t)K_p(t,\lambda)\,dt - \int_0^\infty \tau(t)K_\tau(t,\lambda)\,dt\Big\} \tag{1.6}$$

$$\lambda^2 A_3(\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\Big\{\int_0^\infty p(t)K_\sigma(t,\lambda)\,dt + \int_0^\infty \tau(t)K_q(t,\lambda)\,dt -$$

$$-\int_0^\infty \sigma(t)K_p(t,\lambda)\,dt - \int_0^\infty q(t)K_\tau(\lambda,t)\,dt\Big\}$$

Здесь использованы обозначения:

$$K_q(t,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+iv)\Gamma(iv)v\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi v}{2}\,\frac{dv}{(\lambda t)^{iv}\Delta}$$

$$K_\sigma(t,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(iv)v\,\mathrm{sh}\,\pi v\,\frac{dv}{2(\lambda t)^{iv}\Delta}$$

$$K_\tau(t,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+iv)\Gamma(iv)\,\mathrm{sh}^2\frac{\pi v}{2}\,\frac{dv}{(\lambda t)^{iv}\Delta}$$

$$K_p(t,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(iv)\,\mathrm{sh}\,\pi v\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi v}{2}\,\frac{dv}{2(\lambda t)^{iv}\Delta}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $\Delta=\mathrm{sh}^2\frac{\pi v}{2}-v^2$. Неизвестные функции $A_3(\lambda)$ и $A_4(\lambda)$ определяются по формуле (1.3) и, в результате, бигармоническая функция $\Phi(x, y)$ полностью определяется.

Использованием формул для перемещений, получается

$$EU_x'(x,0)=(1-\nu)p(x)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t}\right]q(t)dt+\int\limits_0^{\infty}R_1(t,x)p(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}R_2(t,x)q(t)dt-\int\limits_0^{\infty}R_7(t,x)\sigma(t)dt-\int\limits_0^{\infty}R_8(t,x)\tau(t)dt \qquad (1.7)$$

$$EV_x'(x,0)=(\nu-1)q(x)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x+t}\right]p(t)dt+\int\limits_0^{\infty}R_3(t,x)p(t)dt-$$

$$-\int\limits_0^{\infty}R_4(t,x)q(t)dt+\int\limits_0^{\infty}R_5(t,x)\tau(t)dt-\int\limits_0^{\infty}R_6(t,x)\sigma(t)dt$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, соответственно,

$$R_{1,4}(t,x)=\frac{2}{\pi x}\int\limits_0^{\infty}\left[v\cos\left(v\ln\frac{x}{t}\right)\mp\sin\left(v\ln\frac{x}{t}\right)\right]\frac{v\,dv}{\Delta}$$

$$R_2(t,x)=\frac{2}{\pi x}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{th}\,\frac{\pi v}{2}\sin\left(v\ln\frac{x}{t}\right)(1+v^2)\frac{dv}{\Delta}$$

$$R_3(t,x)=\frac{2}{\pi x}\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi v}{2}+v^2}{\Delta}+\frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{\pi v}{2}}\right]\exp\left(-\frac{\pi v}{2}\right)\sin\left(v\ln\frac{x}{t}\right)dv$$

$$R_{5,7}(t,x)=\frac{2}{\pi x}\int_0^\infty\left[v\cos\left(v\ln\frac{x}{t}\right)\pm\sin\left(v\ln\frac{x}{t}\right)\right]\operatorname{sh}\frac{\pi v}{2}\frac{dv}{\Delta}$$

$$R_6(t,x)=\frac{2}{\pi x}\int_0^\infty v\operatorname{ch}\frac{\pi v}{2}\sin\left(v\ln\frac{x}{t}\right)\frac{dv}{\Delta}$$

2. Рассматривается плоская задача теории упругости для полосы $(-\infty<x<\infty,\ -h<y<0)$ при граничных условиях

$$\sigma_{yy}(x,0)=p(x),\quad \tau_{xy}(x,0)=q(x)$$

$$U(x,-h)=V(x,-h)=0,\quad (-\infty<x<\infty) \tag{2.1}$$

Бигармоническую функцию ищем в виде

$$\Phi(x,y)=\int_0^\infty[B_1\operatorname{sh}\lambda y+B_2\operatorname{ch}\lambda y+\lambda yB_3\operatorname{sh}\lambda y+\lambda yB_4\operatorname{ch}\lambda y]\cos\lambda x d\lambda \tag{2.2}$$

где $B_i(\lambda)$ $(i=1,4)$—неизвестные функции. Удовлетворением граничных условий (2.1) для определения искомых функций $B_i(\lambda)$ получается система алгебраических уравнений

$$\lambda^2B_2(\lambda)=-\overline{p}(\lambda),\quad \lambda^2B_1(\lambda)=\overline{q}(\lambda)-\lambda^2B_4(\lambda) \tag{2.3}$$

$$B_1(\lambda)\operatorname{sh}\lambda h+B_2(\lambda)\operatorname{ch}\lambda h+\left[\lambda h\operatorname{sh}\lambda h+\frac{2}{1+\nu}\operatorname{ch}\lambda h\right]B_3(\lambda)-$$

$$-\left[\lambda h\operatorname{ch}\lambda h+\frac{2}{1+\nu}\operatorname{sh}\lambda h\right]B_4(\lambda)=0$$

$$B_1(\lambda)\operatorname{ch}\lambda h-B_2(\lambda)\operatorname{sh}\lambda h-\left[\lambda h\operatorname{ch}\lambda h+\frac{\nu-1}{\nu+1}\operatorname{sh}\lambda h\right]B_3(\lambda)+$$

$$+\left[\lambda h\operatorname{sh}\lambda h+\frac{\nu-1}{\nu+1}\operatorname{ch}\lambda h\right]B_4(\lambda)=0$$

Решение полученной системы представляется в виде

$$\lambda^2B_3(\lambda)=\frac{1}{\Delta_1}\left\{\overline{p}(\lambda)\left[\operatorname{sh}^2\lambda h-\frac{2}{\nu+1}\operatorname{ch}2\lambda h\right]+\right.$$

$$\left.+\overline{q}(\lambda)\left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)}\operatorname{sh}2\lambda h-\lambda h\right]\right\}$$

$$\lambda^2B_4(\lambda)=\frac{1}{\Delta_1}\left\{\overline{p}(\lambda)\left[\frac{\nu-3}{2(\nu+1)}\operatorname{sh}2\lambda h+\lambda h\right]+\right.$$

$$\left.+\overline{q}(\lambda)\left[\operatorname{sh}^2\lambda h-\frac{2}{\nu+1}\operatorname{ch}2\lambda h\right]\right\}$$

$$\lambda^2B_1(\lambda)=\overline{q}(\lambda)-\lambda^2B_4(\lambda),\quad \lambda^2B_2(\lambda)=-\overline{p}(\lambda)$$

где $$\Delta_1=\mathrm{sh}^2\lambda h-\frac{2}{\nu+1}\mathrm{ch}2\lambda h-2\frac{\nu-1}{(\nu+1)^2}-\lambda^2h^2$$

Компоненты перемещений определяются по формулам

$$EU'_x(x,0)=(1-\nu)p(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x-t}\right]q(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty K_1(t,x)p(t)dt+\int_0^\infty K_2(t,x)q(t)dt$$

$$EV'_x(x,0)=(\nu-1)q(x)-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\frac{1}{x+t}+\frac{1}{x-t}\right]p(t)dt- \tag{2.4}$$

$$-\int_0^\infty K_3(t,x)p(t)dt-\int_0^\infty K_4(t,x)q(t)dt,\quad(0<x<\infty)$$

где

$$K_1(t,x)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left[\lambda^2h^2-2\frac{\nu-1}{(\nu+1)^2}\right]\cos\lambda x\cos\lambda t\frac{d\lambda}{\Delta_1}$$

$$K_{2,3}(t,x)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left[\lambda^2h^2-\lambda h-2\frac{\nu-1}{(\nu+1)^2}-\frac{\nu-3}{2(\nu+1)}\exp(-2\lambda h)\pm0{,}5\right]\times$$

$$\times\cos\lambda x\sin\lambda t\frac{d\lambda}{\Delta_1}$$

$$K_4(t,x)=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left[\lambda^2h^2-2\frac{\nu-1}{(\nu+1)^2}\right]\sin\lambda x\sin\lambda t\frac{d\lambda}{\Delta_1},\quad(0<t,x<\infty)$$

3. Использованием полученных в предыдущих пунктах решений (1.7) и (2.4) вспомогательных задач, решение поставленной задачи при граничных условиях

$$\sigma_{xx}(0,y)=\sigma(y),\quad\tau_{xy}(0,y)=\tau(y),\quad(0<y<\infty)$$

$$\sigma_{yy}(x,0)=p_0(x),\quad\tau_{xy}(x,0)=q_0(x),\quad(0<x<a,\quad b<x<\infty) \tag{3.1}$$

$$U(x,-h)=V(x,-h)=0,\quad(-\infty<x<\infty)$$

сводится к удовлетворению условий контакта между составляющими частями исходной области

$$U(x,0^+)=U(x,0^-),\quad V(x,0^+)=V(x,0^-),\quad a<x<b$$

и приводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных $p(x)$—нормального и $q(x)$—касательного напряжений

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b q(t)\frac{dt}{x-t}+\int_a^b M_1(t,x)p(t)dt+\int_a^b M_2(t,x)q(t)dt=F_1(x)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b p(t)\frac{dt}{x-t}+\int_a^b M_3(t,x)p(t)dt-\int_a^b M_4(t,x)q(t)dt=F_2(x) \qquad (3.2)$$

$$(a<x<b)$$

где

$$4M_{1,4}(t,x)=R_{1,4}(t,x)-K_{1,4}(t,x),\quad 4M_3(t,x)=R_3(t,x)+K_3(t,x)$$

$$4M_2(t,x)=R_2(t,x)-K_2(t,x)-\frac{4}{\pi(x+t)}$$

Решение системы (3.2) с учетом интегрального условия равновесия

$$\int_a^b p(t)dt=\int_0^\infty \tau(y)dy-\int_0^a p_0(x)dx-\int_b^\infty p_0(x)dx$$

$$\int_a^b q(t)dt=\int_0^\infty \sigma(y)dy-\int_0^a q_0(x)dx-\int_b^\infty q_0(x)dx$$

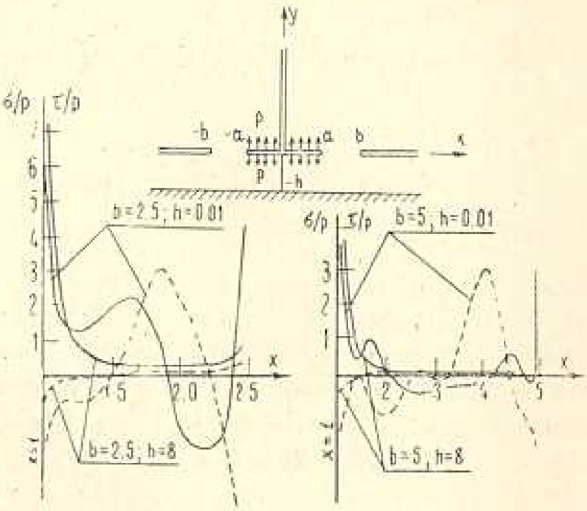
в классе функций, не ограниченных на концах отрезка, существует и единственно [3, 4]. Приближенное решение (3.2) построено по Чебышевским узлам, следуя [5]. В табл. 1,2 для различных величин параметров b и h $(a=1)$ приведены значения коэффициентов интенсивности напряжений $k_{1,2}(a)$, $k_{1,2}(b)$ (отнесенных к $p\sqrt{(b-a)/2}$). Далее приведены графики нормального (сплошные линии) и касательного (штриховые линии) напряжений в случае нормального давления интенсивностью p на трещинах.

Таблица 1

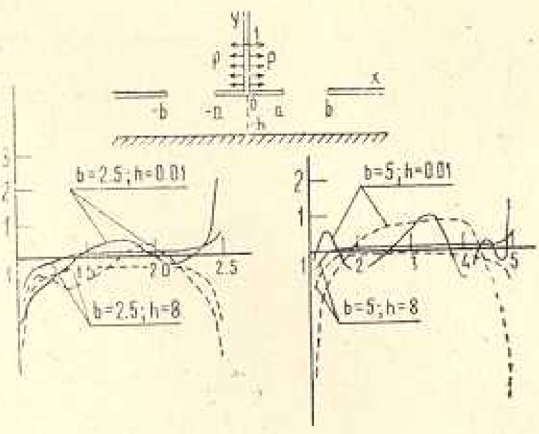
$k_{1,2}(a)$	h/a \ b/a	0,1	0,5	1,0	5,0	8,0
k_1 k_2	1,1	28,742 −1,780	29,587 −0,720	29,793 −0,376	29,946 −0,309	29,946 −0,313
k_1 k_2	1,5	2,918 −0,578	3,354 −0,310	3,462 −0,176	3,540 −0,138	3,542 −0,140
k_1 k_2	2	1,201 −0,322	1,419 −0,192	1,486 −0,123	1,547 −0,093	1,549 −0,095
k_1 k_2	5	0,263 −0,251	0,282 −0,064	0,306 −0,044	0,331 −0,035	0,332 −0,035

Таблица 2

$k_{1,2}(b)$	h/a \ b/a	0,1	0,5	1,0	5,0	8,0
k_1 k_2	1,1	17,477 1,816	17,084 0,738	16,927 0,376	16,784 0,295	16,780 0,298
k_1 k_2	1,5	0,974 0,492	1,108 0,314	1,090 0,178	1,034 0,112	1,034 0,114
k_1 k_2	2	0,202 0,191	0,287 0,153	0,293 0,122	0,266 0,065	0,265 0,066
k_1 k_2	5	0,111 0,041	0,050 0,012	0,029 0,023	0,012 0,014	0,012 0,013



Фиг. 2



Фиг. 3

ABOUT THE PROBLEM OF ELASTIC HALF-PLANE WEAKENED WITH CRACKS

B. A. APHIAN, S. P. STEPANIAN

ՃԱՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Բ. Ա. ԱՖՅԱՆ, Ս. Պ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ և վերջավոր ճաքերով թուլացված առաձգական կիսահարթության հարթ խնդիրը, երբ ճաքերի ափերին ազդում են ինքնահավասարակշռված լարումներ։ Ստացված են ինտենսիվության գործակիցներ ճաքերի ծայրերին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
2. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
3. *Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.* Граничные интегральные уравнения и задачи теории трещин. Л: Изд.—во ЛГУ, 1986. 88 с.
4. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 253 с.
5. *Erdogan F. E., Gupta G. D.* On the numerical solutions of singular integral equations.—Quart Appl. Math., 1972, vol. 7, № 8, p. 525—534.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
15.VI.1988

О влиянии магнитного поля на волны модуляции в пластине и цилиндрической оболочке. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 3—12.

В работе выведено уравнение модуляции для нелинейно упругой пластинки с конечной проводимостью в продольном магнитном поле. Изучено влияние магнитной вязкости на устойчивость волн модуляций, а также конвективная и абсолютная устойчивости.

Для цилиндрической оболочки с движущейся магнитной жидкостью исследуется влияние скорости и магнитного поля на флаттер и на устойчивость волн модуляций.

Иллюстраций 1, библиографий 14.

Магнитоупругая устойчивость тонких тел, служащих для транспортировки электрического тока. Белубекян М. В., Казарян К. Б. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 13—21.

В работе приводится обзор имеющихся в научной литературе исследований по устойчивости упругих тонкостенных конструкций с электрическим током.

Библиографий 42.

Сейсмические колебания круглого штампа на многослойном, неоднородном основании. Дарбинян С. С., Оганесян М. В., Саргсян А. Е. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 22—34.

Взаимодействия сооружения, в виде круглой плиты, с поперечно-неоднородным основанием и определения волновой нагрузки на сооружения, по единой динамической схеме, рассматриваются по методу функции Грина с применением теоремы свертки на основе интегрального преобразования Фурье-Бесселя. Интегральные уравнения движения решаются по методу механических квадратур. В результате получены эпюры распределения динамических контактных напряжений и перемещений с учетом дифракции волн на контактной поверхности, интерференции и диссипации в слоистой среде при различных значениях основных характеристик среды и внешнего воздействия.

Таблиц 1, иллюстраций 5, библиографий 9.

Об одном варианте разномодульной теории упругости. Хачатрян А. А. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 35—40.

Работа посвящена разбору результатов статьи [6], где предлагается новый вариант разномодульной теории упругости.

Исследование привело к заключению, что указанная работа ничего общего не имеет с разномодульной теорией упругости, так как результаты, полученные на основании принятых там предположений, верны только для обычного (одномодульного) изотропного материала.

Библиографий 7.

О тепловом ударе в тонкой пластинке с трещиной при наличии теплообмена с окружающей средой. Козлов В. А., Мазья В. Г., Партон В. З. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 41—49.

Исследуется тепловой удар, т. е. действие напряжений, вызванных резким изменением температуры в тонкой пластинке с прямолинейной трещиной при учете теплообмена, происходящего по закону Ньютона.

Найдено представление и получены асимптотики коэффициента интенсивности напряжений

Библиографий 2.

Об одной задаче упругой полуплоскости, ослабленной трещинами. Афян Б. А., Степанян С. П. «Известия АН Армянской ССР, Механика», 1989 г., т. 42, №2, стр. 50—57.

Рассматривается плоская задача теории упругости о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, содержащей конечную и три полубесконечных трещин. Задача сведена к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши. Приближенное решение системы интегральных уравнений построено методом Эрдогана Гупты. Получены численные значения коэффициентов интенсивности напряжений в концах трещин.

Таблиц 2, иллюстраций 3, библиографий 5.