ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 2, 1989 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ХАЧАТРЯН А. А.

На сегодня существует достаточное количество различных вариантов разномодульной теории упругости [1—5] и это количество увеличилось с появлением недавно статьи [6].

Настоящая работа посвящена разбору этой статьи [6], в результате которого установлено, что предлагаемый в [6] вариант, кроме заглавия, ничего общего не имеет с разномодульной теорией упругости. Естественно, что такое категорическое утверждение требует доказательства. Поэтому посмотрим, какие там приняты предположения и, на основании этого, какие получены результаты.

Рассматривается изотропное упругое тело, материал которого при растяжении характеризуется модулем упругости E^+ и коэффициентом Пуассона ν^+, а при сжатии — E^-, ν^-.

В [6] автор, исходя из существования упругих потенциалов напряжений и деформаций и принимая линейные связи между главными компонентами тензоров деформаций $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и напряжений $(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3)$, записывает

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

где $a_{ij}=a_{ji}$—постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Далее, тензоры деформаций и напряжений, представив в виде суммы девиатора и шаровой части,

$$\varepsilon_i = e_i + \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \sigma_i = s_i + \frac{1}{3}\sigma$$
$$(\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \qquad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{2}$$

принимает, что деформация изменения объема (ε) зависит только от первого инварианта тензора напряжений (σ). В результате такого предположения очевидно (для этого достаточно подставить (2) в (1)), что коэффициенты a_{ij} должны подчиняться условиям

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}=a_{12}+a_{22}+a_{23}=a_{13}+a_{23}+a_{33} \tag{3}$$

и при этом становится возможным представлять удельную энергию деформации (как при обычном одномодульном материале) в виде суммы энергий изменения объема и изменения формы.

После этих предположений, исходя из условия невогнутости потенциальной поверхности, получены соответствующие законы упругости. Эти законы представляют собой четыре отдельные, не зависящие друг от друга, группы вида (1) (в главных направлениях). Коэффициенты упругости a_{ij} для каждой группы определяются исходя из знаков двух инвариантов тензора напряжений

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3, \quad S_2=\sigma_2-\frac{1}{3}\sigma=\frac{2}{3}\left(\sigma_2-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right) \tag{4}$$

Точнее—каждая группа соответствует определенным знакам величин σ и S_2.

Следует отметить, что полученные в [6] законы упругости представлены не в явном виде, поэтому пришлось нам продолжить и выполнить необходимые выкладки для получения в явной форме законов упругости каждой группы в главных направлениях с приведением соответствующих для каждой из них возможных напряженных состояний.

I. $S_2\leqslant 0, \quad \sigma\geqslant 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$\text{a)}\begin{cases}\sigma_1>\sigma_2\geqslant\sigma_3\geqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\geqslant\sigma_2\end{cases} \qquad \text{в)}\begin{cases}\sigma_1>\sigma_2\geqslant 0\\ \sigma_3\leqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\geqslant\sigma_2\end{cases} \qquad \text{c)}\begin{cases}\sigma_1>0\\ \sigma_3\leqslant\sigma_2\leqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\geqslant-\dfrac{\sigma_2}{2}\end{cases} \tag{5}$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{E^+}\sigma_1-\frac{\nu^+}{E^+}\sigma_2-\frac{\nu^+}{E^+}\sigma_3\\ \varepsilon_2&=-\frac{\nu^+}{E^+}\sigma_1+\left(\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{\nu^+}{E^+}\right)\sigma_2-\left(\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{1}{E^+}\right)\sigma_3\\ \varepsilon_3&=-\frac{\nu^+}{E^+}\sigma_1-\left(\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{1}{E^+}\right)\sigma_2+\left(\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{\nu^+}{E^+}\right)\sigma_3\end{aligned} \tag{6}$$

II. $S_2\leqslant 0, \quad \sigma\leqslant 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$\text{a)}\begin{cases}\sigma_1\geqslant 0\\ \sigma_3\leqslant\sigma_2<0\\ \sigma_2\leqslant\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant-\dfrac{\sigma_2}{2}\end{cases} \qquad \text{в)}\begin{cases}\sigma_3\leqslant\sigma_2<\sigma_1\leqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\geqslant\sigma_2\end{cases} \tag{7}$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\varepsilon_1=\left(\frac{2+2\nu^+}{3E^+}+\frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1-\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+}-\frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_2-\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+}-\frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_3$$

$$\varepsilon_2=-\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+}-\frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1+\left(\frac{4+\nu^-}{3E^-}-\frac{1+\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2-\left(\frac{2+5\nu^-}{3E^-}-\frac{2+2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3$$

$$(8)$$

$$\varepsilon_2=-\left(\frac{1+\nu^+}{3E^+}-\frac{1-2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1-\left(\frac{2+5\nu^-}{3E^-}-\frac{2+2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2+\left(\frac{4+\nu^-}{3E^-}-\frac{1+\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3$$

III. $s_2\geqslant 0, \quad \sigma\geqslant 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$\text{a)}\begin{cases}\sigma_1\geqslant\sigma_2>\sigma_3\geqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant\sigma_2\end{cases}\qquad\begin{cases}\sigma_1>\sigma_2\geqslant 0\\ \sigma_3<0\\ -\dfrac{\sigma_2}{2}\leqslant\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant\sigma_2\end{cases}\tag{9}$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\varepsilon_1=\left(\frac{4+\nu^+}{3E^+}-\frac{1+\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1-\left(\frac{2+5\nu^+}{3E^+}-\frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_2-\left(\frac{1+\nu^-}{3E^-}-\frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3$$

$$\varepsilon_2=-\left(\frac{2+5\nu^+}{3E^+}-\frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_1+\left(\frac{4+\nu^+}{3E^+}-\frac{1+\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_2-\left(\frac{1+\nu^-}{3E^-}-\frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_3$$

$$(10)$$

$$\varepsilon_3=-\left(\frac{1+\nu^-}{3E^-}-\frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_1-\left(\frac{1+\nu^-}{3E^-}-\frac{1-2\nu^+}{3E^+}\right)\sigma_2+\left(\frac{1-2\nu^+}{3E^+}+\frac{2+2\nu^-}{3E^-}\right)\sigma_3$$

IV. $s_2\geqslant 0, \quad \sigma\leqslant 0$

Этим условиям удовлетворяют напряженные состояния следующих видов:

$$\text{a)}\begin{cases}\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant 0\\ \sigma_3<0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant-\dfrac{\sigma_2}{2}\end{cases}\qquad\text{в)}\begin{cases}\sigma_1\geqslant 0\\ \sigma_3<\sigma_2\leqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant\sigma_2\end{cases}\qquad\text{c)}\begin{cases}\sigma_3<\sigma_2\leqslant\sigma_1\leqslant 0\\ \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\leqslant\sigma_2\end{cases}\tag{11}$$

В этом случае законы упругости имеют вид

$$\varepsilon_1=\left(\frac{1+\nu^+}{E^+}-\frac{\nu^-}{E^-}\right)\sigma_1-\left(\frac{1+\nu^+}{E^+}-\frac{1}{E^-}\right)\sigma_2-\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_3\tag{12}$$

$$\varepsilon_2=-\left(\frac{1+\nu^+}{E^+}-\frac{1}{E^-}\right)\sigma_1+\left(\frac{1+\nu^+}{E^+}-\frac{\nu^-}{E^-}\right)\sigma_2-\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_3$$

$$\varepsilon_3=-\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_1-\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_2+\frac{1}{E^-}\sigma_3$$

Таким образом, перед нами имеется в явной форме весь результат варианта разномодульной теории упругости, предложенного в работе [6]. Здесь, для каждой группы в отдельности (в зависимости от знаков величин s_2 и σ), приведены виды напряженных состояний и соответствующие им законы упругости. При частных случаях напряженного состояния, во избежание недоразумений, следует четко подобрать соответствующую группу. Например, при простом растяжении следует пользоваться первой группой, где полагая $\sigma_1>0$ и $\sigma_2=\sigma_3=0$, можно получить $\varepsilon_1=\frac{1}{E^+}\sigma_1$, $\varepsilon_2=\varepsilon_3=-\frac{\nu^+}{E^+}\sigma_1$; а при простом сжатии— четвертой группой, где полагая $\sigma_1=\sigma_2=0$ и $\sigma_3<0$, можно получить $\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\frac{\nu^-}{E^-}\sigma_3$, $\varepsilon_3=\frac{1}{E^-}\sigma_3$.

Рассматривая все эти группы законов упругости, замечаем, что коэффициенты a_{ij} в каждой из них являются постоянными. Поэтому диагональные коэффициенты a_{ij} $(i=j)$ представляют собой величины типа $1/E$, а остальные коэффициенты a_{ij} $(i\neq j)$ характеризуют деформации пуассоновского типа (ν/E). В рассматриваемой работе утверждается, что, в отличие от других вариантов разномодульной теории упругости, у них нет дополнительной связи между коэффициентами $E^\pm$ и $\nu^\pm$. Поэтому естественно полагать, что $1/E^+\neq 1/E^-$ и $\nu^+/E^+\neq\nu^-/E^-$. С другой стороны, если рассмотреть, к примеру, первую группу, то там и при трехосном растяжении (5a) и при растяжении в одном направлении со сжатием в двух других направлениях (5c) действуют одни и те же законы упругости (6), несмотря на качественное различие указанных напряженных состояний. То же самое можно сказать и для остальных групп. На основании этого и исходя из физических соображений, можно утверждать, что во всех группах законов упругости значения коэффициентов a_{ij} $(i=j)$ не должны выходить из интервала, определяемого величинами $1/E^+$ и $1/E^-$, а коэффициенты $-a_{ij}(i\neq j)$—из интервала, определяемого величинами ν^+/E^+ и ν^-/E^-. Применяя это утверждение даже к каждой группе в отдельности, мы приходим к противоречиям. Покажем это, например, для первой группы, рассматривая все возможные четыре случая, зависящие от величин $1/E^+\gtreqless 1/E^-$ и $\nu^+/E^+\gtreqless\nu^-/E^-$.

1. Пусть $1/E^+\geqslant 1/E^-$ и $\nu^+/E^+\geqslant\nu^-/E^-$.

Тогда имеем следующую систему неравенств:

$$\frac{1}{E^-}\leqslant\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{\nu^+}{E^+}\leqslant\frac{1}{E^+},\quad \frac{\nu^-}{E^-}\leqslant\frac{1+\nu^-}{E^-}-\frac{1}{E^+}\leqslant\frac{\nu^+}{E^+}\tag{13}$$

или равносильную ей

$$\frac{\nu^+}{E^+}\leqslant\frac{\nu^-}{E^-},\quad \frac{1+\nu^+}{E^+}\geqslant\frac{1+\nu^-}{E^-},\quad \frac{1}{E^+}\leqslant\frac{1}{E^-}\tag{14}$$

Здесь, как видно, первое и третье неравенства находятся в противоречии с первоначально принятыми неравенствами.

2. Пусть $1/E^+\geqslant 1/E^-$ и $\nu^+/E^+\leqslant\nu^-/E^-$.

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E^-} < \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1}{E^+} \\
&\frac{\nu^+}{E^+} < \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \leqslant \frac{\nu^-}{E^-}
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{aligned}
&\frac{\nu^+}{E^+} < \frac{\nu^-}{E^-} \\
&\frac{1+\nu^+}{E^+} \geqslant \frac{1+\nu^-}{E^-} \\
&\frac{1+\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1+\nu^-}{E^-} \\
&\frac{1}{E^+} \geqslant \frac{1}{E^-}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

В этом случае противоречат друг другу второе и третье неравенства.

3. Пусть $1/E^+ \leqslant 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \geqslant \nu^-/E^-$.

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E^+} < \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1}{E^-} \\
&\frac{\nu^-}{E^-} < \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} \leqslant \frac{\nu^+}{E^+}
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{aligned}
&\frac{1+\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1+\nu^-}{E^-} \\
&\frac{\nu^+}{E^+} \geqslant \frac{\nu^-}{E^-} \\
&\frac{1}{E^+} < \frac{1}{E^-} \\
&\frac{1+\nu^+}{E^+} \geqslant \frac{1+\nu^-}{E^-}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь противоречат друг другу первое и четвертое неравенства.

4. Пусть $1/E^+ \leqslant 1/E^-$ и $\nu^+/E^+ \leqslant \nu^-/E^-$.

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E^+} \leqslant \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1}{E^-} \\
&\frac{\nu^+}{E^+} \leqslant \frac{1+\nu^-}{E^-} - \frac{1}{E^+} < \frac{\nu^-}{E^-}
\end{aligned}
\quad \text{или} \quad
\begin{aligned}
&\frac{1+\nu^+}{E^+} < \frac{1+\nu^-}{E^-} \\
&\frac{\nu^+}{E^+} > \frac{\nu^-}{E^-} \\
&\frac{1}{E^+} > \frac{1}{E^-}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь второе и третье неравенства противоречат первоначально принятым неравенствам.

Итак, все варианты исчерпаны и везде есть противоречия. Аналогичная картина имеет место без исключения и для остальных групп. Однако, следует отметить, что все указанные выше противоречия исчезают, если вместо неравенства учесть знак равенства. Но тогда будем иметь $E^+ = E^-$ и $\nu^+ = \nu^-$; разномодульность исчезает и все четыре группы превращаются в известный обобщенный заков Гука для обычного (одномодульного) изотропного тела. Отсюда следует, что работа [6] не может претендовать на какой-либо вариант разномодульной теории упругости.

В заключение считаем необходимым отметить, что причину такого неудачного результата следует искать среди предположений, принятых в основу для построения теории. В работе [6] таким неудачным предположением можно считать то, что объемная деформация ε происходит только при воздействии величины σ и когда $\sigma=0$ имеет место только деформация изменения формы.

К сказанному следует добавить также, что имеются эксперименты [7], установившие факт изменения объема разномодульного тела, находящегося под воздействием лишь сдвигающих напряжений.

ABOUT ONE VARIANT OF HETEROMODULUS ELASTICITY THEORY

A. A. CHACHATRIAN

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՏԱՐԲԵՐԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է [6] հոդվածում ստացված արդյունքների քննարկմանը, որում առաջարկված է տարամոդուլ առաձգականության տեսության մի նոր տարբերակ։

Քննարկումը բերել է այն եզրակացության, որ նշված աշխատանքը ոչ մի կապ չունի տարամոդուլ առաձգականության տեսության հետ, քանի որ այնտեղ կատարված ընդունելությունների հիման վրա ստացված արդյունքները ճիշտ են միայն սովորական (միամոդուլ) իզոտրոպ նյութերի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.—Инженерный журнал, МТТ, 1966, №2.
2. *Шапиро Г. С.* О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию.—Инженерный журнал, МТТ, 1966, №2.
3. *Матченко Н. М., Толоконников Л. А.* О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах.—Инженерный журнал, МТТ, 1968, №6.
4. *Толоконников Л. А.* Вариант разномодульной теории упругости.—Механика полимеров, 1969, №2.
5. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного упругого тела.—Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №6.
6. *Саркисян М. С.* О соотношениях теории упругости тел, материал которых по-разному сопротивляются растяжению и сжатию.—Изв. АН СССР. МТТ, 1987, №5.
7. *Вялов С. С.* Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
20.V.1988