

УДК 624.15.042.072.233.5.8

СЕЙСМИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОГО ШТАМПА НА
 МНОГОСЛОЙНОМ, НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ

ДАРВИНЯН С. С., **ОГАНЕСЯН М. В.**, САРГСЯН А. Е.

Пусть в цилиндрической системе координат (r, α, x_3) задана неоднородная слоистая среда с плоскопараллельными границами разделов неоднородных слоев с упругими параметрами λ, μ, ρ (фиг. 1)

$$H_{v-1} < x_3 < H_v = \sum_{k=1}^v h_k \quad (1)$$

где $H_0 = 0, h_{n+1} \rightarrow \infty, h_v > 0$

На границах разделов смежных слоев, а также при $x_3 = H_n$ между n -м слоем с полупространством $x_3 > H_n$ существуют условия полного прилипания:

$$\begin{aligned} \left[\begin{aligned} &U_{j(v)}^{(1)} - U_{j(v+1)}^{(1)} \Big|_{x_3=H_v} = 0 \\ &[\sigma_{3j}^{(1)} - \sigma_{3j}^{(1)}]_{x_3=H_v} = 0 \end{aligned} \right] \quad (2) \\ (\nu=1, 2, \dots, n; j=1, 3) \end{aligned}$$

Для удобства здесь и далее учтены следующие обозначения:

$$U_{1v} = U_{rv}, \quad \sigma_{31(v)} = \sigma_{3r(v)} \quad (3)$$

Пусть на поверхности $x_3=0$, в условиях полного прилипания лежит круглый штамп с радиусом $r=a$ [1, 7], с заданными смежными граничными условиями с основанием:

$$\begin{aligned} U_{3(1)}^{(1)}(r, 0, t) &= U_{3(1)}^{(1)}(t) && \text{при } |r| \leq a \\ \sigma_{31(1)}^{(1)}(r, 0, t) &= 0 && \text{при } r \leq \infty \\ \sigma_{33(1)}^{(1)}(r, 0, t) &= 0 && \text{при } r > |a| \end{aligned} \quad (4)$$

Как видно из граничных условий (4), имеем дело с краевой задачей со смешанным граничным условием на границе $x_3=0$.



Фиг. 1. Расчетная схема круглого штампа на многослойном, неоднородном основании.

* Оганесян М. В. погиб во время землетрясения в г. Ленинакане 7 декабря 1988 г.

Предполагается, что источник первичных волн в заданном виде упругих потенциалов находится в полупространстве $x_3 > H_n$ и помещен в точке $(0, \bar{H}_0)$ [3, 5].

В условиях сейсмического воздействия в среде, (1) наряду с источником сейсмических волн, при взаимодействии с основанием круглый штамп становится новым источником волн.

Следовательно, общее волновое поле можно представить как сумму двух волновых полей, возбуждаемых источником первичных сейсмических волн без присутствия круглого штампа на поверхности $x_3=0$ и волнового поля, которое возбуждается штампом, расположенным на поверхности $x_3=0$:

$$U_{j(\nu)}^{(1)}(r, x_3, t) = U_{j(\nu)}^{(2)}(r, x_3, t) + U_{j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, t) \quad (5)$$

$$\sigma_{3j(\nu)}^{(1)}(r, x_3, t) = \sigma_{3j(\nu)}^{(2)}(r, x_3, t) + \sigma_{3j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, t)$$

Поле перемещения и напряжения $U_{j(\nu)}^{(2)}$ и $\sigma_{3j(\nu)}^{(2)}$ в декартовых координатах было определено в работах [3, 5], поэтому мы здесь их будем считать известными величинами.

Для определения полей напряжений и перемещений, возбуждаемых круглым штампом в основании (1), воспользуемся принципом суперпозиции:

$$\sigma_{3j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{3j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, k_4) \exp(ik_4 t) dk_4 \quad (6)$$

$$U_{j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}_{j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, k_4) \exp(ik_4 t) dk_4$$

где

$$\bar{\sigma}_{3j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, k_4) = \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{\tau}_{3j(\nu)}(r - \xi_1, x_3, k_4) d\xi_1 \quad (7)$$

$$\bar{U}_{j(\nu)}^{(3)}(r, x_3, k_4) = \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{j(\nu)}^*(r - \xi_1, x_3, k_4) d\xi_1 \quad (8)$$

$$(j=1,3; \nu=1,2,\dots,n+1)$$

Здесь $\bar{\tau}_{3j(\nu)}(r - \xi_1, k_4, x_3)$ — спектры напряжения по времени, вызванные в точке (r, x_3) под действием сосредоточенной гармонической силы единичной амплитуды, направленной перпендикулярно к границе $x_3=0$, и помещенной по окружности в точках $(\xi_1, 0)$; $\bar{U}_{j(\nu)}^*(r - \xi_1, x_3, k_4)$ — спектры перемещения по времени, вызванные напряжениями $\bar{\tau}_{3j(\nu)}(r - \xi_1, x_3, t)$.

Из граничного условия (4) и (8) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{3(1)}^*(r - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(2)}(r, 0, k_4) \quad (9)$$

где $\bar{U}_{3(1)}^{(2)}(r, 0, k_4)$ — спектры перемещения поверхности $x_3=0$ без присутствия штампа; $\bar{U}_{3(1)}^{(2)}$ представляет собой сейсмические воздействия, является произвольной гладкой функцией по времени и определяется как в [3] при $x_3=0, \nu=1$.

Если пока считать, что функция Грина $\bar{U}_{3(1)}^*$, которая также подлежит определению для данной задачи, известна, то в уравнение (9) входят два неизвестных $\bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}$ и $\bar{U}_{3(1)}^{(1)}$. Следовательно, для замыкания необходимо иметь еще одно независимое уравнение.

Это уравнение мы получим из условий динамического равновесия штампа массой M :

$$2\pi \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4) r dr = MK_4^2 \bar{U}_{2(1)}^{(1)}(k_4) \quad (10)$$

Отметим, что вне штампа общее перемещение $U_{3(1)}^{(1)}(x_1, x_2, t)$ будет произвольная изменяющаяся функция как по времени, так и по пространственным координатам. Волны разного типа, возникающие в процессе распространения и взаимодействия на небольшом расстоянии, вне штампа затухают и остается перемещение произвольного типа после взаимодействия.

Уравнения (9) и (10) составляют замкнутую систему, из решений которых определяются спектральные функции контактных напряжений и общее перемещение штампа.

$$\int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(\xi_1, 0, k_4) \bar{U}_{3(1)}^*(r - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(2)}(r, 0, k_4) \quad (11)$$

$$2\pi \int_0^a \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4) r dr = Mk_4^2 \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4)$$

Учитывая, что ядро интегральных уравнений $\bar{U}_{3(1)}^*$ в общем случае имеет сложный вид, систему интегральных уравнений целесообразно решать по методу коллокаций, что позволяет систему интегральных уравнений движения сооружения, записанную в изображениях Фурье, свести к системе алгебраических уравнений [2].

Разобьем область контакта штампа с основанием по направлению r отдельных L количеств круглых полос с внутренними r_{l-1} и r_l радиусами и предположим, что функция, определяющая значения спектров контактных напряжений $\bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)}(r, 0, k_4)$, может быть аппроксими-

дована ступенчатой функцией по координате r , сохраняющей постоянное значение $\bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l}$ в пределах каждой полосы $l=1, 2, \dots, L$.

Будем считать, что контактные условия выполняются не по всей подошве штампа, а лишь в некоторых сосредоточенных кругах каждой полосы, имеющей координаты r_f ($f=1, 2, \dots, L$).

Тогда вместо системы интегральных уравнений (11) получим систему $L+1$ алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^L \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l} \int_{r_{l-1}}^{r_l} \bar{U}_{3(1)}^*(r_f - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(L)}(r, 0, k_4) \quad (12)$$

$$2\pi \sum_{l=1}^L \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l} \Delta r_l = M k_4^2 \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4)$$

где

$$\Delta r_l = r_{l-1} - r_l, \quad r_0 = 0$$

Систему (12) можем переписать следующим образом:

$$\sum_{l=1}^L \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l} \bar{\delta}_{f,l}^*(k_4) - \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) = -\bar{U}_{3(1)}^{(L)}(r_f, 0, k_4) \quad (13)$$

$$2\pi \sum_{l=1}^L \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l} \Delta r_l = M k_4^2 \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4)$$

где

$$\int_{r_{l-1}}^{r_l} \bar{U}_{3(1)}^*(r_f - \xi_1, 0, k_4) d\xi_1 = \bar{\delta}_{f,l}^*(k_4) \quad (14)$$

Введем следующие обозначения:

$$Z_l = \bar{\sigma}_{33(1)}^{(3)l}(k_4), \quad (l=1, 2, \dots, L)$$

$$Z_{L+1} = \bar{U}_{3(1)}^{(1)}(k_4) \quad (15)$$

$$B_f = \bar{U}_{3(1)}^{(L)}(r_f, 0, k_4); \quad B_{L+1} = 0, \quad (f=1, 2, \dots, L)$$

$$b_{f,l} = \bar{\delta}_{f,l}^*(k_4), \quad b_{f,L+1} = -1 \quad (f, l=1, 2, \dots, L)$$

$$b_{L+1,l} = \Delta r_l, \quad b_{L+1,L+1} = -M k_4^2, \quad (l=1, 2, \dots, L)$$

С учетом (15) определяется спектр контактных напряжений и общее перемещение круглой плиты, а из выражений (6) и (7) определяется напряженно-деформированное состояние неоднородного многослойного основания круглой плиты.

Уравнения (13) можно записать так:

$$\sum_{l=1}^{L+1} b_{f,l} Z_l = B_f, \quad (f=1, 2, \dots, L+1) \quad (16)$$

Для решения (16) запишем его в матричной форме:

$$[b_{f,l}][Z_l] = [B_f], \quad (f, l = 1, 2, \dots, L+1) \quad (17)$$

Так как элементы матрицы $[b_{f,l}]$ в (17) нам известны приближенно, то есть имея вместо матрицы $[b_{f,l}]$ матрицу $[\tilde{b}_{f,l}]$, в общем случае мы не можем высказать определенного суждения о вырожденности или невырожденности системы (17). Очевидно, что такая ситуация имеет место в случаях, когда матрица $[b_{f,l}]$ имеет достаточно близкие к нулю собственные значения.

Поскольку вместо точной системы (17) при $\Delta r_l \rightarrow 0$ мы имеем приближенную систему $[\tilde{b}_{f,l}][Z_l] = [B_f]$, и вычисление обычно производится с конечной точностью ($\Delta r_l \neq 0$), то здесь речь может идти только о нахождении приближенного решения (17). При этом эти решения должны быть устойчивыми к малым изменениям исходных данных (17).

В основе таких методов лежит идея «отбора», изложенная в работе [9].

Для общности рассмотрим случай, когда неточно заданы как правая часть $[B_f]$, так и матрица $[b_{f,l}]$, то есть пусть вместо системы уравнений (17) при $\Delta r_l \rightarrow 0$, с нормальным решением $[Z_l]^0$, мы имеем систему

$$[\tilde{b}_{f,l}][Z_l] = [\tilde{B}_f]$$

Здесь

$\|[\tilde{b}_{f,l}] - [\bar{b}_{f,l}]\| \leq \delta$; $\|[\tilde{B}_f] - [\bar{B}_f]\| \leq h$; $[\tilde{b}_{f,l}]$ и $[\bar{B}_f]$ — соответственно значение $[b_{f,l}]$ и $[B_f]$ при $\Delta r_l \rightarrow 0$. Требуется найти векторы $[Z_l]_\gamma$, $\gamma = (h, \delta)$ такие, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \| [Z_l]_\gamma - [Z_l]^0 \| = 0$$

Их можно находить путем минимизации сглаживающего функционала

$$M^2\{[Z_l], [\bar{B}_f], [\bar{b}_{f,l}]\} = \|[\tilde{b}_{f,l}][Z_l] - [\bar{B}_f]\|^2 + \alpha \| [Z_l] \|^2, \quad (\alpha > 0)$$

подробно изложенная в [9].

В случае, если матрица $[b_{f,l}]$ имеет равные нулю собственные значения, среди методов решения (17) можно применить и метод замены уравнения (17), близким ему [9]:

$$([b_{f,l}] + \alpha_l [E])[Z_l] = [B_f] \quad (18)$$

где $\alpha_l > 0$ — выбранный числовой параметр; $[E]$ — единичная матрица.

Решение уравнения (18) в этом случае записывается в виде

$$[Z_l]_\alpha = ([b_{f,l}] + \alpha [E])^{-1} [B_f]$$

В заключение рассмотрим методику определения ядра $\bar{U}_{3(1)}^*$ в (11). Для этого рассмотрим решение следующей задачи, относящейся

к плоскому деформированному состоянию. Пусть в плоскости $x_3=0$, ограниченной упругим неоднородным основанием (1) по направлению оси x_3 , действует вертикальная нагрузка

$$\tau_{33(1)}(r, 0, t) = p(r)e^{-ik_4t} \text{ и } \tau_{31(1)}(r, 0, t) = 0 \quad (19)$$

Для определения перемещений $\bar{U}_{j(v)}$ и напряжений в этой осесимметричной задаче воспользуемся потенциалами $\varphi_v(r, x_3, k_4)$ и $\psi_{2v}(r, x_3, k_4)$, удовлетворяющими волновым уравнениям

$$\square_1^2 \varphi_v = 0, \quad \square_2^2 \psi_{2v} = 0 \quad (20)$$

где

$$\square_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\square_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Тогда они выражаются следующими формулами [8]:

$$U_{1v}^* = \frac{\partial \varphi_v}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{2v}}{\partial x_3}, \quad U_{3v}^* = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_{2v}}{\partial r} + \frac{\psi_{2v}}{r} \quad (21)$$

$$\tau_{31(v)} = \rho_v a_2^2 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial r \partial x_3} + \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi_{2v}}{\partial x_3^2} \right) \quad (22)$$

$$\tau_{33(v)} = \rho_v a_2^2 \left[\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{2}{a_1^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x_3^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_{2v}}{\partial r \partial x_3} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{2v}}{\partial x_3} \right]$$

На смежных границах различных сред основания (1) считаем, что заданы условия полного прилипания:

$$|U_{j(v+1)}^* - U_{j(v)}^*|_{x_3=H_v} = 0 \quad (23)$$

$$|\tau_{3j(v+1)} - \tau_{3j(v)}|_{x_3=H_v} = 0 \quad (v=1, 2, \dots, n+1; \quad j=1, 3)$$

Решение волновых уравнений (20) для многослойной среды (1) с учетом формы возбуждения среды (19) записывается в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} \varphi_v = \exp(ik_4t) \int_0^\infty [F_{1v} \exp(ik\gamma_{1v}(x_3 - H_v)) + \\ + F_{2v} \exp(-ik\gamma_{1v}(x_3 - H_{v-1}))] k J_0(kr) dk \end{aligned} \quad (24)$$

$$\psi_{2v} = \exp(ik_4t) \int_0^\infty [F_{3v} \exp(ik\gamma_{2v}(x_3 - H_v)) + F_{4v} \exp(-ik\gamma_{2v}(x_3 - H_{v-1}))] k J_1(kr) dk$$

$$\text{где } k\gamma_{pv} = \sqrt{k^2 - k_4^2/a_{pv}^2}, \quad p=1, 2; \quad v=1, 2, \dots, n$$

a_{pv} — комплексная скорость распространения продольных $p=1$ и поперечных $p=2$ волн в среде v .

$$a_{p\nu} = a_{p\nu}^* \frac{1}{1 \pm i \frac{x_{p\nu}}{2\pi}}$$

$a_{p\nu}^*$ — фазовая скорость распространения волны.

Подставляя (24) в формулы, определяющие компоненты полей перемещений (21) и напряжений (22), получим:

$$U_{1\nu}^* = \exp(-ik_4 t) \int_0^{\infty} k^2 \{ [F_{1\nu} \exp(ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu})) + F_{2\nu} \exp(-ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] - \\ - i\gamma_{2\nu} [F_{3\nu} \exp(ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu})) - F_{4\nu} \exp(-ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] \} J_1(kr) dk \quad (25)$$

$$U_{3\nu}^* = \exp(ik_4 t) \int_0^{\infty} k^2 \{ i\gamma_{1\nu} [F_{1\nu} \exp(ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu})) - F_{2\nu} \exp(-ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] + \\ + F_{3\nu} \exp(ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu})) + F_{4\nu} \exp(-ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu-1})) \} J_0(kr) dk$$

и

$$\tau_{31(\nu)} = \rho_1 a_{2\nu}^2 \exp(ik_4 t) \int_0^{\infty} k^3 \left\{ -2i\gamma_{1\nu} [F_{1\nu} \exp(ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu})) - \\ - F_{2\nu} \exp(-ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] + \left(\frac{k_4^2}{k^2 - a_{2\nu}^2} + 2\gamma_{2\nu}^2 \right) [F_{3\nu} \exp(ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu})) + \\ + F_{4\nu} \exp(-ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] \right\} J_1(kr) dk \quad (26)$$

$$\tau_{33(\nu)} = \rho_1 a_{2\nu}^2 \exp(ik_4 t) \int_0^{\infty} k^3 \left\{ \left[k_4^2 / k^2 \left(\frac{2}{a_{1\nu}^2} - \frac{1}{a_{2\nu}^2} \right) - 2\gamma_{1\nu}^2 \right] \times \right. \\ \left. \times [F_{1\nu} \exp(ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu})) + F_{2\nu} \exp(-ik\gamma_{1\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] + \right. \\ \left. + 2i\gamma_{2\nu} [F_{3\nu} \exp(ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu})) - F_{4\nu} \exp(-ik\gamma_{2\nu}(x_3 - H_{\nu-1}))] \right\} \times J_0(kr) dk$$

Подставляя выражения (25) и (26) в граничные условия (23), получим систему из $4n$ алгебраических уравнений относительно $4n+2$ неизвестных $F_{k\nu}$ ($k=1, 2, 3, 4$; $\nu=1, 2, \dots, n+1$)

$$\sum_{k=1}^4 \bar{C}_{mk}^{(\nu+1)} F_{k(\nu+1)} = \sum_{k=1}^4 C_{mk}^{(\nu)} F_{k(\nu)} \quad (27)$$

$$(m, k=1, 2, 3, 4; \nu=2, 3, \dots, n+1; F_{1(n+1)} = F_{3(n+1)} = 0)$$

где коэффициенты $\bar{C}_{mk}^{(\nu)}$ и $C_{mk}^{(\nu)}$ имеют следующие значения:

$$C_{11}^{(\nu)} = \exp(-ik\gamma_{1\nu} h_{\nu}), \quad C_{12}^{(\nu)} = 1, \quad C_{13}^{(\nu)} = -i\gamma_{2\nu} \exp(-ik\gamma_{2\nu} h_{\nu}), \quad C_{14}^{(\nu)} = i\gamma_{1\nu}, \\ C_{21}^{(\nu)} = i\gamma_{1\nu} \exp(-ik\gamma_{1\nu} h_{\nu}), \quad C_{22}^{(\nu)} = -i\gamma_{1\nu}, \quad C_{23}^{(\nu)} = \exp(-ik\gamma_{2\nu} h_{\nu}), \quad C_{24}^{(\nu)} = 1, \\ C_{31}^{(\nu)} = \rho_1 a_{2\nu}^2 - 2i\gamma_{1\nu} e^{-ik\gamma_{1\nu} h_{\nu}}, \quad C_{32}^{(\nu)} = 2i\gamma_{1\nu} \rho_1 a_{2\nu}^2$$

$$C_{33}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 \left(\frac{k_4^2}{k^2} a_{21}^2 + 2\gamma_{21}^2 \right) \exp(-ik\tau_{21}h_1),$$

$$C_{34}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 \left(\frac{k_4^2}{k^2} a_{21}^2 + 2\gamma_{21}^2 \right) \quad (28)$$

$$C_{41}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 \left[\frac{k_4^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right] \exp(-i\gamma_{11}kh_1)$$

$$C_{42}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 \left[\frac{k_4^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right]$$

$$C_{43}^{(1)} = 2i\gamma_{21}\rho_1 a_{21}^2 \exp(-ik\tau_{21}h_1), \quad C_{44}^{(1)} = 2i\gamma_{21}a_{21}^2$$

$$\bar{C}_{mk}^{(1)} = C_{mk}^{(1)} \exp(i\gamma_{11}kh_1) \quad \text{при } k=1,2$$

$$\bar{C}_{mk}^{(1)} = C_{mk}^{(1)} \exp(i\gamma_{21}kh_1) \quad \text{при } k=3,4$$

Дополнительные два уравнения в системе (27) получим из граничных условий (19).

Подставляя значения $\tau_{31(1)}$ и $\tau_{33(1)}$ из (26) в граничные условия получим:

$$-2i\gamma_{31}(F_{21} \exp(-ik\tau_{31}h_1) - F_{21}) + \left(\frac{k_4^2}{k^2} + 2\gamma_{31}^2 \right) (F_{31} \exp(-ik\tau_{31}h_1) - F_{41}) = 0$$

$$\left\{ \rho_1 a_{21}^2 k^2 \left[\frac{k_4^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\gamma_{11}^2 \right] \left[F_{21} \exp(-ik\tau_{31}h_1) + F_{21} \right] + \right. \quad (29)$$

$$\left. + \rho_1 a_{21}^2 k^2 2i\gamma_{31} (F_{31} \exp(-ik\tau_{31}h_1) - F_{41}) \right\} \exp(ik_4 t) = \bar{\tau}_{33}(r, 0, k_4)$$

где

$$\bar{\tau}_{33}(r, 0, k_4) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tau_{33}(r, 0, t) r J_0(kr) dr = \frac{\exp(ik_4 t)}{2\pi} \int_0^\infty r p(r) J_0(kr) dr \quad (30)$$

Если в начале координатной системы действует сосредоточенная сила

$$p(r) = \frac{\delta(r)}{r} \quad (31)$$

то получим

$$\bar{\tau}_{33}(r, 0, k_4) = \frac{\exp(ik_4 t)}{2\pi} \quad (32)$$

Принимаем обозначения:

$$|\bar{C}_{mk}^{(1)}| = |E|, \quad F_{1(0)} \equiv F_{2(0)} \equiv F_{3(0)} \equiv 0, \quad F_{4(0)} = \frac{1}{2\pi}$$

$$C_{31}^{(1)} = -2i\gamma_{31} \exp(-ik\tau_{31}h_1), \quad C_{32}^{(1)} = 2i\gamma_{31}$$

$$C_{33}^{(1)} = \left(\frac{k_4^2}{k^2} + 2\gamma_{31}^2 \right) \exp(-i\gamma_{31}h_1), \quad C_{34}^{(1)} = - \left(\frac{k_4^2}{k^2} + 2\gamma_{31}^2 \right) \quad (33)$$

$$C_{41}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 \left[\frac{k_4^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\tau_{11}^2 \right] \exp(-ik\tau_{11}h_1)$$

$$C_{42}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 \left[\frac{k_4^2}{k^2} \left(\frac{2}{a_{11}^2} - \frac{1}{a_{21}^2} \right) - 2\tau_{11}^2 \right]$$

$$C_{43}^{(1)} = \rho_1 a_{21}^2 k^2 2i\tau_{21} \exp(-ik\tau_{21}h_1), \quad C_{44}^{(1)} = -\rho_1 a_{21}^2 k^2 2i\tau_{21}$$

С учетом обозначения (33) система уравнений принимает вид

$$\sum_{k=1}^4 \bar{C}_{mk}^{(v)} F_{k(v)} = \sum_{k=1}^4 C_{mk}^{(1)} F_{k(1)} \quad (34)$$

Записывая совместно (34) с (27), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно $F_{k(v)}$:

$$[\bar{C}_{mk}^{(v-1)}][F_{k(v-1)}] = [C_{mk}^{(v)}][F_{k(v)}] \quad (35)$$

$$(m, k = 1, 2, 3, 4; \quad v = 1, 2, \dots, n+1; \quad F_{1(n+1)} \equiv F_{3(n+1)} \equiv 0)$$

Из решения (35), определяя значения спектральных функций $F_{k(v)}$, далее, подставляя формулу \bar{U}_{3v}^* из (25) при $v=1$, $x_3=0$, получаем выражения ядра системы интегрального уравнения (11) в следующей форме:

$$\bar{U}_{3v}^* = \int_0^\infty k^2 \{ i\tau_{11}(F_{11} \exp(-ik\tau_{11}h_1) - F_{21}) - i\tau_{21}(F_{21} \exp(-ik\tau_{21}h_1) - F_{31}) \} J_1(rk) dk \quad (36)$$

Определив из решения системы алгебраических уравнений значения контактных напряжений, с помощью выражений (6), (7), (8) определим напряженно-деформированное состояние неоднородного слоистого основания и параметры сейсмического колебания штампа

$$U_{j(1)}(r, 0, t), \quad U_{j(1)}(r, 0, t), \quad \ddot{U}_{j(1)}(r, 0, t)$$

Теперь рассмотрим случай, когда напряжение и исходные перемещения по $U_{j(1)}^{(2)}$ контакту штампа с основанием можно принять постоянной величиной по координате r , то есть рассмотрим уравнения колебания штампа без учета дифракции волн в основании.

Тогда система уравнения (11) для винклеровского основания принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{33(1)}^{(3)}(t) U_{3(1)}^* a &= U_{3(1)}^{(1)}(t) - U_{3(1)}^{(2)}(t) \\ \sigma_{33(1)}^{(3)}(t) a &= -M \ddot{U}_{3(1)}^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (37)$$

Из совместного решения этих двух уравнений получаем

$$-\frac{M}{a} \dot{U}_{3(1)}^{(1)}(t) U_{3(1)}^* a - U_{3(1)}^{(1)}(t) = U_{3(1)}^{(2)}(t)$$

откуда с учетом $U_{3(1)}^{(1)} = U_{3(1)}^{(2)} + U_{3(1)}^{(3)}$ получим

$$\ddot{U}_{3(1)}^{(3)}(t) + \frac{U_{3(1)}^{(3)}(t)}{MU_{3(1)}^*} = - \ddot{U}_{3(1)}^{(2)}(t) \quad (38)$$

(38) является дифференциальным уравнением для системы с одной степенью свободы, которое широко принимается в обычных методах расчета сооружения на винклеровском основании. В (38) $C = \frac{1}{U_{3(1)}^*}$ является коэффициентом постели основания, $\omega^2 = C/M$ — собственная частота колебания штампа.

Решение (38) записывается через интеграл Даламбера

$$U_{3(1)}^{(3)}(t) = - \int_0^t \ddot{U}_{3(1)}^{(2)}(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Заметим, что на основе результатов решения упругой задачи можно получить решение задачи в вязкоупругой постановке.

Пусть для основания (1) связь между напряжениями и деформациями определяется по закону Больцмана-Био:

$$\sigma_{jk} = 2 \int_0^t q_{1,\lambda}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varepsilon_{jk} d\tau + \delta_{jk} \int_0^t q_{2,\mu}(t-\tau) \frac{\partial \theta_{\mu}}{\partial \tau} d\tau$$

где $\theta_{\mu} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_{k\mu}}{\partial x_k}$; $q_1(t)$, $q_2(t)$ — функции по времени, которые в случае идеально-упругого основания (1) переходят в постоянные Ламе μ и λ . Для получения решения поставленной задачи в вязкоупругой постановке необходимо в вышеизложенных решениях задач в упругой постановке, записанных в изображениях Фурье по времени, и r заменить величинами $\bar{\lambda}(k_4)$ и $\bar{\mu}(k_4)$ [5], где $\bar{\lambda}(k_4) = ik_4 q_2(k_4)$; $\bar{\mu}(k_4) = ik_4 q_1(k_4)$, а значения $\bar{q}_p(k_4)$; ($p = 1, 2$) определяются

$$\bar{q}_p(k_4) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q_p(t) \exp(ik_4 t) dt$$

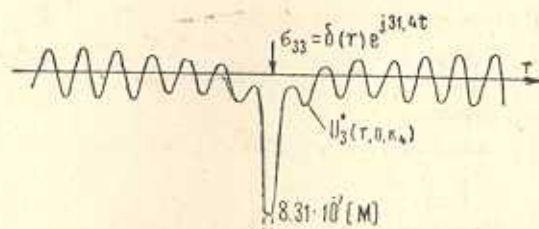
В заключение приводим конкретный пример расчета колебаний штампа на однослойном основании при следующих исходных данных (табл. 1).

Таблица 1

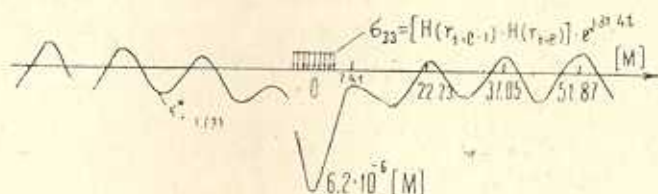
Исходные данные для численного примера

$\lambda_{\nu=1,2}$	$\mu_{\nu=1,2}$	ρ	M_p	k_4	$U_{A3}^{(2)}$	H
кн/м ²	кн/м ²	$\frac{\text{кн} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кн} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^3}$	с ⁻¹	м	м
18000	18000	1,8	5,0	31,4	0,02	40
36000	36000	1,9	—	—	—	∞

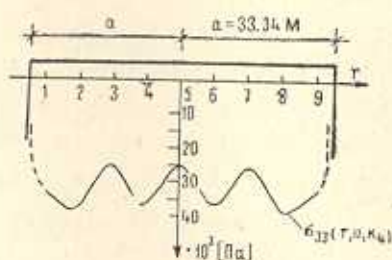
Для реализации численного примера на ЭВМ по вышензложенному математическому алгоритму применена комплекс-программа, предназначенная для вычисления дискретного и обратного-дискретного преобразования Фурье с использованием метода быстрого преобразования Фурье [4].



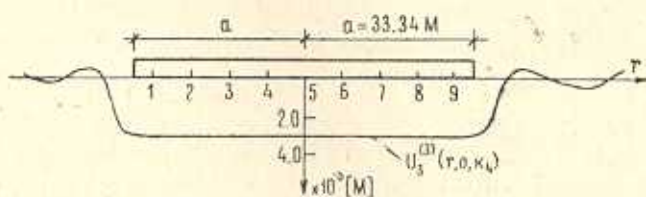
Фиг. 2. График функции влияния сосредоточенной нагрузки.



Фиг. 3. График функции влияния распространенной нагрузки.



Фиг. 4. Эпюра распределения контактного напряжения.



Фиг. 5. Эпюра распределения относительного перемещения при $x_3 = 0$.

Результаты вычислений приведены на фиг. 2—5, анализ которых показывает, что на эпюру распределения контактных напряжений и перемещений существенное влияние оказывают следующие параметры: размеры штампа в плане, инерционные характеристики штампа, спек-

тральный состав внешнего воздействия, геометрические и физико-механические характеристики основания. Увеличение распределения массы штампа приводит к увеличению ординат контактных напряжений и перемещений, при этом одновременно сглаживается эюра контактных напряжений. С увеличением отношения размеров штампа к скорости распространения волны в основании эюра контактных напряжений сглаживается, и в предельном случае, когда $2d/a_p \rightarrow 0$, т. е. сдвиг фазы между различными точками стремится к нулю, уменьшается влияние дифракции волны на контактной поверхности и в результате ординаты эюры контактных напряжений и перемещений при симметричном нагружении принимают постоянные значения. Это означает, что входит в силу гипотеза плоских отражений. При колебании штампа на слоистом основании в случае, когда размеры штампа соизмеримы с толщиной поверхностного слоя, существенное влияние на результат оказывают обратные волны. Но в целом качественная картина сохраняется в переходных случаях, т. е. когда величина физических характеристик слоя стремится к характеристикам полупространства.

SEISMIC OSCILLATIONS OF THE ROUND STAMP ON A TRANSVERSE HETEROGENEOUS MULTILAYERED FOUNDATION

S. S. DARBINIAN, M. V. HOVANESIAN, A. E. SARGISIAN

ՔԱՋՄԱՇԵՐՏ, ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԻՄՔԻՆ ԴՐՎԱՄ ԿԼՈՐ ԴՐՈՇՄԻ ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆԻԱՆ, Մ. Վ. ՀՈՎԱՆԵՍԻԱՆ, Ա. Ե. ՍԱՐԳԻՍԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գրինի ֆունկցիայի մեթոդով դիտարկվում են ընդլայնական անհամասեռ հիմքով կլոր սալերի տեսք ունեցող շինությունների փոխազդեցությունները և նրանց վրա ալիքային բեռների որոշումը: Ֆուրիե-Բեսելի ինտեգրալ ձևափոխության հիման վրա կիրառվում է փաթույթի թեորեմը: Ստացված են դինամիկական կոնտակտային լարումների և տեղափոխությունների բաշխման էպյուրաները՝ հաշվի առնելով կոնտակտի մակերևույթի վրա ալիքների դիֆրակցիան, իսկ շերտավոր միջավայրում ինտերֆերենցիան պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 313 с.
2. Илйичев В. А., Таранов В. Т. Метод прогнозирования уровня колебаний сооружений и грунтов по результатам опытов. Основания, фундаменты и механика грунтов. М.: 1977, № 4, с. 18—21.
3. Кириллов А. П., Крылов В. В., Саргсян А. Е. Взаимодействие фундаментов сооружений электростанций с основанием при динамических нагрузках. М.: Энергоатомиздат, 1984. 215 с.

4. Морозов В. А., Кирсанова Н. Н., Сыроев А. Ф. Комплекс алгоритмов быстрого преобразования Фурье дискретных рядов. Численный анализ на ФОРТРАНе. Изд. МГУ, вып. 15, 1976, с. 30—51.
5. Оганесян М. В. Определение волновой нагрузки на жесткую неподвижную и подвижную преграду, лежащую на поверхности упругого неоднородного основания. Строительство и архитектура в особых условиях. М.: 1983, вып. 8.
6. Петрашень Г. И., Лебовская Е. М. Общая теория полей кратных волн в многослойных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1979, вып. 19, с. 5—49.
7. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976, 283 с.
8. Соболев С. Л. Некоторые вопросы теории распространения колебаний. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Ч. 2, Л.—М., ОНТИ, 1937, 577 с.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.

Лешнаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
5.IV.1988