

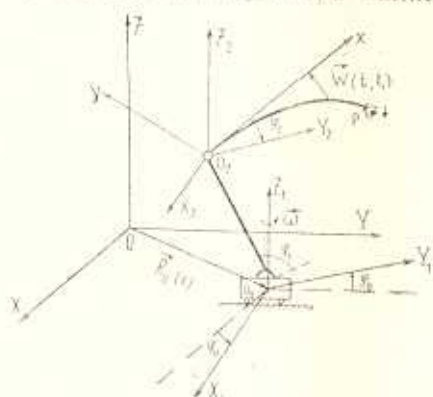
УДК 531.8; 62.50

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЙ ДВУХЗВЕННОГО УПРУГОГО
 МАНИПУЛЯТОРА С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ПРИВОДНЫМИ
 СИСТЕМАМИ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Рассматривается кинематическая модель двухзвенного антропоморфного манипулятора, последнее звено которого моделируется как упругий стержень. Управление всеми степенями подвижности манипулятора осуществляется электромеханическими приводами, каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока [1]. В рамках линейной теории упругости исследуется задача кинематического управления в смысле [2]. Проведена одна постановка задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора.

1. Механическая модель и уравнения движения. Манипулятор состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 1). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром O_2 . Первое звено соединено шарниром с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено манипулятора является упругим стержнем,



Фиг. 1

на конце которого расположен хват с грузом. Соединительные шарниры — идеальные цилиндрические. Платформа механической руки может перемещаться в горизонтальной плоскости. Манипулятор имеет пять степеней свободы: движение осуществляется посредством электромеханических приводов D_x ($x = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$). Приводы $D_x, D_y, D_{\varphi_0}, D_{\varphi_1}$ расположены на платформе и управляют перемещением платформы, поворотом манипулятора относительно вертикальной оси, а также поворотом первого звена относительно плат-

формы, соответственно. Привод D_7 , расположен в шарнире O_2 и управляет поворотом второго звена относительно первого. Для описания уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальные $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ системы координат. Введем обозначения: L_1 —длина первого звена; L_2 —длина второго звена; $\vec{R}_0(t) = (x(t), y(t), 0)^T$ —радиус-вектор платформы относительно системы координат $OXYZ$ (символ T означает транспонирование); h —высота платформы; φ_0 —угол между осями OX и O_1X_1 (φ_0 —угол поворота манипулятора относительно оси O_1Z_1); φ_1 —угол поворота первого звена относительно платформы; φ_2 —угол поворота второго упругого звена относительно оси O_2Y_2 (φ_2 —угол между касательной O_2x к упругому звену O_2p в точке O_2 и осью O_2Y_2); m_0 —масса платформы; m_1 —масса первого звена; m_2 —масса второго звена; m —масса груза на схвате; m_1 —масса привода в шарнире O_2 ; ξ ($0 \leq \xi \leq l_2$)—координата точки нейтральной линии второго звена; $\vec{\omega}$ —вектор угловой скорости вращения манипулятора относительно оси O_1Z_1 ; $\vec{W}(t, \xi)$ —вектор упругой деформации второго звена относительно точки O_2 в системе $O_2X_2Y_2Z_2$; $\vec{R}(t, \xi)$ —радиус-вектор точки нейтральной линии второго звена с координатой ξ в момент времени t относительно точки O_2 в системе $OXYZ$; $\rho(\xi)$ —линейная плотность второго звена; $EJ(\xi)$ —жесткость второго звена на изгиб (E —модуль Юнга материала, $J(\xi)$ —момент инерции поперечного сечения); $s(\xi)$ —площадь поперечного сечения второго звена; функции $\rho(\xi)$, $J(\xi)$, $s(\xi)$ предполагаются достаточно гладкими; n_z —передаточное число привода D_z ; $\vec{Q} = (F_x, F_y, M_x, M_{z_1}, M_{z_2})$ —вектор, компоненты которого—электромагнитные силы и моменты, приложенные к ротору электродвигателей приводов; L_z —коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя D_z -го привода; R_z —электрическое (омическое) сопротивление обмотки ротора электродвигателя D_z -го привода; k_z —коэффициент пропорциональности между электрическим током цепи ротора электродвигателя D_z -го привода и соответствующей электромагнитной силой или моментом ($F_x = i_z k_x$, $F_y = i_z k_y$, $M_{z_1} = i_z k_{z_1}$, $M_{z_2} = i_z k_{z_2}$); u_z —электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателя D_z -го привода. Статоры электродвигателей и корпуса редукторов приводов D_x ($x = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$) жестко связаны с платформой и первым звеном механической руки манипулятора, соответственно.

Векторы $\vec{R}(t, \xi)$ (в системе $OXYZ$); $\vec{\omega}(t)$ (в системе $O_1X_1Y_1Z_1$); $\vec{W}(t, \xi)$ (в системе $O_2X_2Y_2Z_2$) имеют вид:

$$\vec{W}(t, \xi) = \begin{vmatrix} -\omega_2(t, \xi) \\ -\omega_1(t, \xi) \sin \varphi_2 \\ \omega_1(t, \xi) \cos \varphi_2 \end{vmatrix}, \quad \vec{\omega}(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_0 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$$\vec{R}(t, \xi) = \begin{vmatrix} x(t) - \omega_2(t, \xi) \cos \varphi_0 - [L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2 - \omega_1(t, \xi) \sin \varphi_2] \sin \varphi_0 \\ y(t) - \omega_2(t, \xi) \sin \varphi_0 + [L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2 - \omega_1(t, \xi) \sin \varphi_2] \cos \varphi_0 \\ h + L_1 \sin \varphi_1 + \xi \sin \varphi_2 + \omega_1(t, \xi) \cos \varphi_2 \end{vmatrix}$$

В рамках линейной теории упругих стержней предполагается, что упругие смещения второго звена механической руки манипулятора малы (большая изгибная жесткость $EJ(\xi)$ по сравнению с его длиной $|\dot{W}(t, \xi)|/L_2 = C(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, а максимальный период T_2 собственных упругих колебаний мал по сравнению с характерным временем T процесса управления манипулятором $T_2/T = O(\varepsilon^{1/2})$). Начальные распределения $\dot{w}_i(t_0, \xi) = f_i^1(\xi)$, $\ddot{w}_i(t_0, \xi) = f_i^2(\xi)$, ($i=1, 2$) при этом, естественно, считаются малыми, а $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \sim 1$; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2 \sim \varepsilon^{1/2}$, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 \sim \varepsilon$.

Кинетическая энергия движения рассматриваемой механической системы манипулятора имеет вид

$$K = \sum_{i=0}^3 K_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho s |\dot{R}(t, \xi)|^2 d\xi \quad (1.2)$$

где K_0 — кинетическая энергия движения платформы, K_1 — кинетическая энергия движения первого звена, K_2 — кинетическая энергия двигателя в шарнире O_2 , как точечный груз на конце первого звена, K_3 — кинетическая энергия вращения роторов двигателей приводов, а последнее слагаемое — кинетическая энергия движения второго звена с грузом на схвате. Кинетическая энергия движения точечной массы на схвате манипулятора учитывается путем добавления к $\rho(\xi)s(\xi)$ дельта-функции интенсивности m , то есть $\rho s = \rho(\xi)s(\xi) + m\delta(\xi - L_2)$.

Вычисляя кинетическую энергию по формуле (1.2) и оставляя члены, порядок малости которых не превышает ε^3 , получим

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} A \dot{x}^2 + \frac{1}{2} B \dot{y}^2 + \frac{c}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_0^2 \cos^2 \varphi_1) - L(x \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_1 + \\ & + \dot{y} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1) + \frac{1}{2} E \dot{\varphi}_0 L_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_0 L_2 \cos \varphi_1 - 2\dot{x}) + \\ & + \frac{1}{2} E \dot{\varphi}_1 L_1 (\dot{\varphi}_1 L_1 - 2\dot{y} \sin \varphi_1) + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho s \left\{ \dot{w}_1^2(t, \xi) + \dot{w}_2^2(t, \xi) + \right. \\ & + 2\dot{w}_1(t, \xi) [\dot{\varphi}_2^2 + L_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{y} \sin \varphi_2] + 2\dot{w}_2(t, \xi) \times \\ & \times [\dot{\varphi}_0 L_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_0 \dot{\xi} \cos \varphi_2 - \dot{x}] + 2\dot{w}_1(t, \xi) [\dot{\varphi}_0 \dot{x} \sin \varphi_2 - \\ & - L_1 \dot{\varphi}_0^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 \sin 2\varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ & + 2\dot{w}_2(t, \xi) \dot{\varphi}_0 [\dot{\varphi}_1 \dot{\xi} \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 L_1 \sin \varphi_1 - \dot{y}] + \dot{\varphi}_2^2 \dot{\xi}^2 + \\ & \left. + \dot{\varphi}_0^2 \dot{\xi}^2 \cos^2 \varphi_2 - 2\dot{\varphi}_0 \dot{x} \dot{\xi} \cos \varphi_2 - 2\dot{\varphi}_2 \dot{y} \dot{\xi} \sin \varphi_2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 L_1 \dot{\xi} \times \right. \\ & \left. \times \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right\} d\xi + \frac{1}{2} (J_{\varphi_0} n_{\varphi_0}^2 \dot{\varphi}_0^2 + J_{\varphi_1} n_{\varphi_1}^2 \dot{\varphi}_1^2 + J_{\varphi_2} n_{\varphi_2}^2 \dot{\varphi}_2^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $A = m_0 + m_1 + m_2 + m + m'_1 + J_x n_x^2$, $B = m_0 + m_1 + m_2 + m + m'_1 + J_y n_y^2$,

$$C = (J_1 + m'_1 L_1^2), \quad D = m'_1 L_1 + \frac{m_1 L_1}{2}, \quad E = m + m_2.$$

Здесь $J_1 = m_1 L_1^2 / 3$, J_x ($x = x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$) — момент инерции вращения ротора электродвигателя D_0 -го привода.

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы равна сумме потенциальных энергий сил тяжести и упругих сил, возникающих при деформации стрелы:

$$\begin{aligned} \Pi = & \left(\frac{m_0}{2} + m_1 + m'_1 \right) gh + \left(m'_1 + \frac{m_1}{2} \right) g L_1 \sin \varphi_1 + \\ & + \int_0^{L_2} \left[\rho s |L_1 \sin \varphi_1 + \xi \sin \varphi_2 + \omega_1(t, \xi) \cos \varphi_2 + h| d\xi + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EJ(\xi) \sum_{i=1}^2 [\omega_i(t, \xi)]^2 d\xi \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для вывода уравнений движения манипулятора используем вариационный принцип Гамильтона-Остроградского [3]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(K - \Pi + A) dt = 0 \quad (1.5)$$

где δK и $\delta \Pi$ — вариации кинетической и потенциальной энергий, а $\delta A = \vec{Q} \cdot \delta \vec{\gamma}$ — элементарная работа электромагнитных сил и моментов. Здесь $\vec{\gamma}$ — вектор с компонентами: $\vec{\gamma} = (x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.

Подставляя (1.3), (1.4) в (1.5) и учитывая, что $\delta \vec{\gamma} = \delta \vec{\omega}_1(t, \xi) = \delta \vec{\omega}_2(t, \xi) = 0$ при $t = t_1, t_2$, получим с точностью до ε следующие нелинейные интегро-дифференциальные уравнения движения манипулятора в виде:

$$\begin{aligned} A \ddot{x} + A_1 \ddot{\varphi}_0 & - \int_0^{L_2} \rho s \bar{\omega}_2(t, \xi) d\xi + f_1(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_x F_x \\ B \ddot{y} + A_2 \ddot{\varphi}_1 + A_3 \ddot{\varphi}_2 & - \sin \varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s \bar{\omega}_3(t, \xi) d\xi + f_2(\varphi_1, \varphi_2) = n_y F_y \\ A_4 \ddot{\varphi}_0 + A_5 \ddot{x} & + \int_0^{L_2} \rho s \{ \bar{\omega}_2(t, \xi) [L_1 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2] \} d\xi + f_3(x, \varphi_0, \varphi_1) = n_x M_x \\ A_6 \ddot{\varphi}_1 + A_7 \ddot{\varphi}_2 + A_8 \ddot{y} & + L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s \bar{\omega}_1(t, \xi) d\xi + \end{aligned}$$

$$+f_4(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{z_1} M_{z_1} \quad (1.6)$$

$$A_6 \ddot{\varphi}_2 + A_{10} \ddot{\varphi}_1 + A_{11} \ddot{y} + \int_0^{L_1} \rho s \ddot{w}_1(t, z) dz + \\ + f_3(x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = n_{z_2} M_{z_2} + g \cos \varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s w_2(t, z) dz$$

где коэффициенты при старших производных и функции $f_i(\cdot)$ ($i=1, 2, \dots, 5$) определяются следующим образом (скобкой (\cdot) обозначены соответствующие аргументы функции f_i):

$$A_1 = A_3 = -L_1 \cos \varphi_1 (EL_1 + D) - \int_0^{L_1} \rho s z \cos \varphi_2 dz \\ A_2 = A_5 = -L_1 \sin \varphi_1 (EL_1 + D); \quad A_7 = A_{11} = -\sin \varphi_2 \int_0^{L_1} \rho s z dz \\ A_4 = \cos \varphi_1 (EL_1^2 + C \cos \varphi_1); \quad A_8 = C + EL_1^2 + J_{z_1} n_{z_1}^2 \\ A_9 = A_{10} = L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s z dz; \quad A_6 = \int_0^{L_2} \rho s z^2 dz + J_{z_2} n_{z_2}^2 \\ f_1(\cdot) = \varphi_0 \varphi_1 \sin \varphi_1 (L_1 E + D) + \varphi_0 \varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s z \sin \varphi_2 dz \\ f_2(\cdot) = -\varphi_1^2 \cos \varphi_1 (L_1 E + D) - \varphi_2^2 \cos \varphi_2 \int_0^{L_2} \rho s z dz \\ f_3(\cdot) = -\varphi_0 \varphi_2 \sin \varphi_1 (2C \cos \varphi_1 + EL_1^2) + \varphi_1 x \sin \varphi_1 (D + L_1 E) + \\ + \int_0^{L_2} \rho s \left[-\varphi_0 \varphi_2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi_2 + 2L_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \right) - x \varphi_2 z \sin \varphi_2 - \right. \\ \left. - 2\varphi_0 \varphi_1 L_1 z \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right] dz; \quad f_4(\cdot) = -D x \varphi_0 \sin \varphi_1 + \\ + C \varphi_0^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + D y \varphi_1 \cos \varphi_1 + \frac{E}{2} \varphi_0^2 L_1^2 \sin 2\varphi_1 + \\ + g \cos \varphi_1 (D + L_1 E) - \varphi_2 (\varphi_1 - \varphi_2) L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \int_0^{L_2} \rho s dz + \\ + \int_0^{L_1} \rho s \left[\varphi_1^2 L_1 z \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \varphi_2 L_1 z \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] dz$$

$$f_3(\cdot) = |y\ddot{\varphi}_2(2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2) - \dot{\varphi}_1^2 L_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \sin\varphi_2 \ddot{\varphi}_0(x - \dot{\varphi}_0^2 L_1 \cos\varphi_1) + g \cos\varphi_2 | \int_0^{L_1} \rho_3 \xi d\xi + \frac{1}{2} \dot{\varphi}_0^2 \sin 2\varphi_2 \int_0^{L_2} \rho_2 s ds$$

К уравнениям (1.6) необходимо также добавить уравнения баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей [1]:

$$L_z \frac{di_z}{dt} + R_z i_z + n_a k_a \gamma_z = u_z, \quad (z=x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (1.7)$$

$$(\gamma_x = \dot{x}, \gamma_y = \dot{y}, \gamma_{\varphi_0} = \dot{\varphi}_0, \gamma_{\varphi_1} = \dot{\varphi}_1, \gamma_{\varphi_2} = \dot{\varphi}_2)$$

Уравнения упругих колебаний в вертикальной и в горизонтальной плоскостях вращающегося упругого звена манипулятора с грузом на схвате имеют вид (при $\rho(\xi) = \rho_0 \text{const}$, $s(\xi) = s_0 = \text{const}$, $I(\xi) = I_0 = \text{const}$)

$$\ddot{w}_i(t, \xi) + c_1 \dot{w}_i(t, \xi) = F_i(\cdot, \xi) \quad (1.8)$$

$$w_i(t, 0) = \dot{w}_i(t, 0) = \ddot{w}_i(t, L_2) = 0$$

$$w_i'''(t, L_2) = c_2 [\ddot{w}_i(t, L_2) - F_i(\cdot, L_2)]$$

$$w_i(t_0, \xi) = f_i^1(\xi), \quad \dot{w}_i(t_0, \xi) = f_i^2(\xi)$$

где

$$c_1 = EJ_0 / \rho_0 s_0, \quad c_2 = m / EJ_0, \quad 0 \leq \xi \leq L_2$$

$$F_1(\cdot, \xi) = [-\ddot{\varphi}_2 \xi + \ddot{y} \sin\varphi_2 - L_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + f_0(\cdot, \xi) / \rho_0 s_0$$

$$F_2(\cdot, \xi) = [x - \dot{\varphi}_0 L_1 \cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_0 \xi \cos\varphi_2] + f_1(\cdot, \xi) / \rho_0 s_0$$

$$f_0(\cdot, \xi) = \dot{\varphi}_0 x \sin\varphi_2 + L_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - \dot{\varphi}_0^2 \sin\varphi_2 (L_1 \cos\varphi_1 + \xi \cos\varphi_2) - g \cos\varphi_2$$

$$f_1(\cdot, \xi) = 2\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 L_1 \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_0 \dot{y} - 2\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 \xi \sin\varphi_2$$

Здесь скобкой (\cdot, ξ) обозначены соответствующие аргументы функций F_i , f_0 , f_1 .

Решение задачи (1.8) ищем в виде [4]

$$w_i(t, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^i(t) X_n(\xi) \quad (1.9)$$

где собственные функции $X_n(\xi)$ с точностью до постоянного множителя C_n имеют вид

$$X_n(\xi) = C_n [\text{ch}^2 \lambda_n \xi - \cos^2 \lambda_n \xi + \beta_n (\sin^2 \lambda_n \xi - \text{sh}^2 \lambda_n \xi)] \quad (1.10)$$

$$\beta_n = (\text{ch}^2 \lambda_n L_2 + \cos^2 \lambda_n L_2) / (\text{sh}^2 \lambda_n L_2 + \sin^2 \lambda_n L_2), \quad n \geq 1$$

C_n определяется из условий ортогональности собственных функций. Собственные частоты λ_n задачи (1.8) определяются из трансцендентного уравнения

$$1 + \operatorname{ch} \nu_n L_2 \cos \nu_n L_2 + \gamma \nu_n (\operatorname{sh} \nu_n L_2 \cos \nu_n L_2 - \operatorname{ch} \nu_n L_2 \sin \nu_n L_2) = 0$$

$$\gamma = c_1 c_2, \quad n \geq 1$$

Используя условия ортогональности собственных функций, граничные условия задачи (1.8) и решая соответствующие дифференциальные уравнения, получим для коэффициентов Фурье $Q_n^i(t)$ следующие выражения:

$$Q_n^i(t) = A^i \cos \nu_n^2 \sqrt{c_1} t - B^i \sin \nu_n^2 \sqrt{c_1} t + \frac{1}{\nu_n^2 \sqrt{c_1}} \int_0^t \sin \nu_n^2 \sqrt{c_1} (t-\tau) \Phi_i(\tau) d\tau, \quad (i=1,2)$$

где

$$A^i = Q_n^i(t_0) \cos \nu_n^2 \sqrt{c_1} t_0 - \frac{1}{\nu_n^2 \sqrt{c_1}} Q_n^i(t_0) \sin \nu_n^2 \sqrt{c_1} t_0$$

$$B^i = Q_n^i(t_0) \sin \nu_n^2 \sqrt{c_1} t_0 + \frac{1}{\nu_n^2 \sqrt{c_1}} Q_n^i(t_0) \cos \nu_n^2 \sqrt{c_1} t_0$$

$$Q_n^i(t_0) = \frac{1}{2 \nu_n^2} \int_0^{L_2} f_i^i(\xi) [1 + \gamma^i(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

$$Q_n^i(t_0) = \frac{1}{2 \nu_n^2} \int_0^{L_2} f_i^i(\xi) [1 + \gamma^i(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{2 \nu_n^2} \int_0^{L_2} F_i(\cdot, \xi) [1 + \gamma^i(\xi - L_2)] X_n(\xi) d\xi$$

Скобки $[t]$ означают неявную зависимость функций Φ_i от времени.

2. *Задача кинематического управления.* Пусть задано движение абсолютно жесткой модели манипулятора, то есть заданы $x(t)$, $y(t)$, $z_0(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$ и их производные. Требуется определить движение упругой модели манипулятора, движение груза на хвате, электромагнитные силы и моменты, приложенные к ротору электродвигателей, электрические напряжения, подаваемые на вход электродвигателей, которые необходимы для обеспечения заданного движения для упругой модели манипулятора.

Из уравнений (1.6) следует, что электромагнитные силы и моменты можно представить в виде суммы двух слагаемых $\vec{Q} = \vec{Q}^0 + \vec{Q}^1$, где $\vec{Q}^0 = (F_x^0, F_y^0, M_{z_0}^0, M_{z_1}^0, M_{z_2}^0)$, $\vec{Q}^1 = (F_x^1, F_y^1, M_{z_0}^1, M_{z_1}^1, M_{z_2}^1)$. \vec{Q}^0 соответствует абсолютно жесткой модели манипулятора и определяется следующим образом:

$$F_x^0 = \frac{1}{n_x} [A \ddot{x} + A_1 \ddot{z}_0 + f_1(\cdot)], \quad F_y^0 = \frac{1}{n_y} [B \ddot{y} + A_2 \ddot{z}_1 +$$

$$+ A_3 \ddot{\varphi}_2 + f_2(\cdot)], M_{\varphi_0}^0 = \frac{1}{n_{\varphi_0}} [A_4 \ddot{\varphi}_0 + A_5 \ddot{x} + f_3(\cdot)]$$

$$M_{\varphi_1}^0 = \frac{1}{n_{\varphi_1}} [A_6 \ddot{\varphi}_1 + A_7 \ddot{\varphi}_2 + A_8 \ddot{y} + f_4(\cdot)], M_{\varphi_2}^0 = \frac{1}{n_{\varphi_2}} [A_9 \ddot{\varphi}_2 + A_{10} \ddot{\varphi}_1 + A_{11} \ddot{y} + f_5(\cdot)]$$
(2.1)

а \dot{Q}^1 обусловлен упругой податливостью второго звена и его компоненты имеют вид

$$F_x^1 = -\frac{1}{n_x} \int_0^{L_x} \rho s \ddot{w}_2(t, \xi) d\xi, F_y^1 = -\frac{1}{n_y} \sin \varphi_2 \int_0^{L_x} \rho s \ddot{w}_1(t, \xi) d\xi$$

$$M_{\varphi_0}^1 = \frac{1}{n_{\varphi_0}} \int_0^{L_x} \rho s \{\ddot{w}_2(t, \xi) [L_2 \cos \varphi_1 + \xi \cos \varphi_2]\} d\xi$$

$$M_{\varphi_1}^1 = \frac{1}{n_{\varphi_1}} \int_0^{L_2} \rho s L_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{w}_1(t, \xi) d\xi$$

$$M_{\varphi_2}^1 = \frac{1}{n_{\varphi_2}} \int_0^{L_2} \rho s [\xi \ddot{w}_1(t, \xi) - g \cos \varphi_2 w_1(t, \xi)] d\xi$$
(2.2)

$w_i(t, \xi)$, ($i=1, 2$) определяются из (1.9)–(1.11).

Используя связь между электрическим током в цепи роторов электродвигателей приводов и электромагнитными силами и моментами (см. п. 1), получим уравнения (1.7) баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей в виде

$$L_x(\dot{Q}_x^0 + \dot{Q}_x^1) + R_x(Q_x^0 + Q_x^1) + k_x^2 n_x \gamma_x = k_x u_x$$
(2.3)

Из (2.3) следует, что управляющие напряжения, подаваемые на вход электродвигателей приводов, также можно представить в виде суммы двух слагаемых. Напряжение, которое необходимо для управления жесткой моделью манипулятора, и добавка, обусловленная упругостью второго звена, то есть $u_x = u_x^0 + u_x^1$, определяются следующими выражениями:

$$u_x^0 = \frac{1}{k_x} (L_x \dot{Q}_x^0 + R_x Q_x^1 + k_x^2 n_x \gamma_x), \quad u_x^1 = \frac{1}{k_x} (L_x \dot{Q}_x^1 + R_x Q_x^1)$$
(2.4)

где Q_x^0 и Q_x^1 определяются из (2.1), (2.2) соответственно.

Состояние механической системы в каждый момент времени, а также положение груза в системе $OXYZ$ можно определить с помощью радиуса-вектора $\vec{R}(t, \xi)$ из (1.1) после определения $w_i(t, \xi)$ ($i=1, 2$) (1.9).

3. *Некоторые частные случаи.* Важным случаем, когда в нуле-

вом приближении можно получить более простые расчетные формулы для определения электромагнитных сил и моментов, является случай, когда $L_a \ll R_a$. Физический смысл неравенства означает, что время $\tau_a = L_a/R_a$ установления токов в цепях электродвигателей намного меньше времени рабочей операции манипулятора ($\tau_a \ll T$). Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов.

Из рассматриваемой задачи следует также анализ движения и задача кинематического управления некоторых часто встречающихся конструкций промышленных роботов с учетом упругой податливости второго звена: а) случай неподвижного основания манипулятора

($x(t)=y(t)=\text{const}$). Подвижными степенями свободы являются: $\varphi_i(t)$ ($i=0, 1, 2$); б) случай, когда $\varphi_1=90^\circ$. Подвижными степенями являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_2(t)$; в) случай, когда $\varphi_1-\varphi_2=90^\circ$. Подвижными степенями свободы являются: $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$; г) случай, когда $\varphi_1=\varphi_2=0$. Подвижными степенями свободы являются $x(t)$, $y(t)$, $\varphi_0(t)$.

4. Об одной постановке задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора. Пусть заданы достигаемые манипулятором начальное и конечное состояния

$$\gamma_s(t_0) = \gamma_s^0, \quad \dot{\gamma}_s(t_0) = \dot{\gamma}_s^0, \quad \omega_i(t_0, \xi) = f_i^0(\xi), \quad \dot{\omega}_i(t_0, \xi) = \dot{f}_i^0(\xi), \quad (i=1,2) \quad (4.1)$$

$$\gamma_s(T) = \gamma_s^T, \quad \dot{\gamma}_s(T) = \dot{\gamma}_s^T, \quad \omega_i(T, \xi) = g_i^T(\xi), \quad \dot{\omega}_i(T, \xi) = \dot{g}_i^T(\xi), \quad (i=1,2)$$

Здесь $f_i^0(\xi)$, $\dot{f}_i^0(\xi)$ ($i=1, 2$) — заданные согласованные с граничными условиями функции, описывающие начальные и конечные распределения упругих отклонений манипулятора. Время T окончания процесса управления манипулятора и конечные условия γ_s^T , $\dot{\gamma}_s^T$, $g_i^T(\xi)$ могут быть фиксированными или свободными, принадлежащими некоторым допустимым областям:

$$T \in G_1, \quad \gamma_s^T \in G_2, \quad \dot{\gamma}_s^T \in G_3, \quad g_i^T \in G_4 \quad (4.2)$$

Через $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ обозначим конструктивные параметры манипулятора. В качестве этих параметров могут быть физико-геометрические параметры, то есть линейные размеры звеньев манипулятора, материалы, из которых изготовлены звенья, массы звеньев, грузоподъемность и т. п. Компоненты вектора $\vec{\beta}$ могут характеризовать также типы приводов (электрохимические, пневматические, гидравлические) и их расположение в конструкции манипулятора.

Вектор $\vec{\beta}$ выбирается, исходя из реального назначения манипулятора. Очевидно, что компоненты β_i должны удовлетворять условиям

$$\beta_i \in G_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

Условия (4.3) определяют в пространстве конструктивных пара-

метров n -мерная область Q_2 , каждой точке которого соответствует некоторая конструкция манипулятора [8].

Кроме ограничений на краевые условия (4.2) и на конструктивные параметры манипулятора (4.3), в общем случае на его движение и режим управления, могут быть наложены также ограничения вдоль траектории

$$(Q_2, \gamma_2, \dot{\gamma}_2, \beta_2) \in G \quad (4.4)$$

Ограничения на управления Q_2 , на фазовые координаты $(\gamma_2, \dot{\gamma}_2)$ и на конструктивные параметры β_2 манипулятора могут быть разделены и не разделены. К числу ограничений типа (4.4) можно отнести также ограничения на частоты и амплитуды упругих колебаний манипулятора, напряженно-деформируемое состояния звеньев и т. д.

Для оценки технического уровня проектируемого манипулятора и качества выполнения манипулятором поставленной задачи зададим некоторый функционал, который в общем виде запишем

$$J(\gamma_2^*, Q_2^*, \beta_2^*) = \sup_{Q_2, \dot{\gamma}_2, \beta_2} J(\gamma_2, Q_2, \beta_2)$$

$$(i=1, 2, \dots, n; \quad \alpha=x, y, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.5)$$

В качестве критерия типа (4.5) можно, например, принять мощность манипулятора, энергозатраты приводов, быстродействие, вес манипулятора, стоимость, надежность и т. п. Применимость того или иного метода решения задач оптимального управления и оптимального проектирования манипулятора существенно зависит от вида ограничений (4.2)–(4.4) и от функционала (4.5). Исследованию некоторых задач оптимального управления и оптимального проектирования упругого манипулятора посвящен ряд работ [5–8 и др.].

ANALYSIS OF TWO SECTION ELASTIC MANIPULATORS MOTION WITH ELECTROMECHANIC DRIVINGS SYSTEMS ON A MOVING FOUNDATION

A. A. GUKASIAN

ՇԱՐՔԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐՈՄԵԿԱՆԻԿԱԿԱՆ ՇԱՐՔԱՔԵՐԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱԿ ԽԱՆԻՊՈՒԷԶԱՏՐԻ ՇԱՐՔՄԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

ա. ա. ՂՈՒԿԱՅԱՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Առաձգական ձողերի դժույր տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է շարժական հիմքի վրա գտնվող անարագամորֆ մանիպուլյատորի շարժման կինեմատիկական ղեկավարման խնդիրը

Որոշված են առաձգական տեղափոխությունները, էլեկտրամագնիսական ուժերը, մամենաները և էլեկտրական շարժարեքները մուտքին արվող լա-

բումները: Քննարկում է առաձգական դյուրաթերթի մեծ ունեցող և հաճախ հանդիպող մանիպուլյատորների կոնստրուկցիաներ, որոնց նետաղստությունները բխում են դիտարկվող խնդրից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматического электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
2. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.—Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1981, №5, с. 142—152.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
5. Акуленко Л. Л. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.—Изв. АН СССР, ПММ, 1981, №6, с. 1045—1103.
6. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, №5, с. 33—41.
7. Болотник Н. Н., Гукасян А. А. Управление движением манипулятора с учетом упругих колебаний стрелы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 4, с. 38—46.
8. Бердюк В. Е., Демидюк М. В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами.—Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 2, с. 59—67.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
6.VII.1987

УДК 624.073.2:639.376

РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ
ЖЕСТКОСТИ НА ОСНОВАНИИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ,
ОБЛАДАЮЩЕМ ПОЛЗУЧЕСТЬЮ

КАКОСИМИДИ Н. Ф.

Рассматривается плоская задача о расчете фундаментальной полосы переменной жесткости на основании конечной глубины, материал которого удовлетворяет предпосылкам теории упругой наследственности Больмана-Вольтерра. Реактивные давления основания разыскиваются в виде суммы реактивных давлений, соответствующих упруго-мгновенной задаче, и приращений давлений, вызываемых за счет ползучести. Последние, являющиеся неизвестными, определяются из условия их самоуравновешенности, а также условия контактности полосы и основания, выполняемого в интегральной форме на отдельных участках контакта. Решение иллюстрировано числовым примером расчета, показывающим, что ползучесть основания существенно влияет на распределение реактивных давлений.

Полный текст статьи дешифрован в ВИННИЦИ
за № 7096--В 88 от 21.09.1988

Поступила в редакцию
24.X.1985