

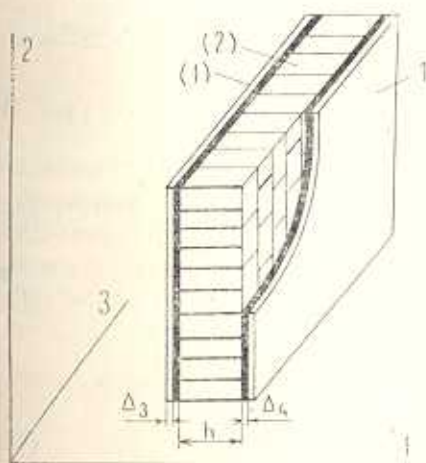
УДК 539.3:678.067

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ УПРУГОСТИ СОТОНПЛАСТОВ

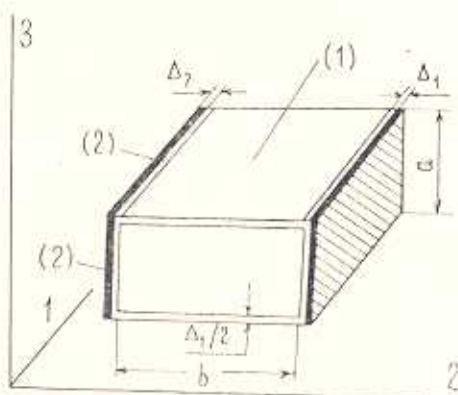
БЫКОВЦЕВ А. Г., КОЛОКОЛЬЧИКОВ В. В.

1. Рассмотрим сотовую конструкцию, состоящую из двух несущих обшивок (1) и ячеистого заполнителя (2), состоящего из ячеек прямоугольной формы (фиг. 1). Ячейки заполнены низко модульным сжимаемым материалом (например, пенопластом). Вычисление эффективных модулей упругости проводится в предположении, что размеры ячейки заполнителя значительно меньше размеров рассматриваемой конструкции. В этом случае сотопласт можно считать композиционным материалом, обладающим ортотропной симметрией.

Вначале определим модули упругости сотового заполнителя, которые равны эффективным модулям упругости характерного слоя, а последние в свою очередь равны эффективным модулям упругости характерной ячейки, изображенной на фиг. 2. Деформация характерной ячейки рассматривается в прямоугольной системе координат.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчет эффективных модулей упругости сотопласта проводится в предположении об изотропии материала основы заполнителя, клеевой прослойки и материала, заполняющего ячейки. Получение эффективных модулей упругости основано на правиле смешивания при последовательном и параллельном соединении элементов. Если деформация компонент соответствует параллельному соединению, то сред-

ние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = & \frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + c_{22} \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\ & + c_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2(c_{44} \langle \varepsilon_{23} \rangle \langle \varepsilon_{32} \rangle + \\ & + c_{55} \langle \varepsilon_{13} \rangle \langle \varepsilon_{31} \rangle + c_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle \langle \varepsilon_{21} \rangle) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь величины c_{11}, \dots — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} \left[\frac{\lambda_n}{2} \langle \varepsilon_{ii}^{(k)} \rangle_n^2 + \mu_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \right] \quad (1.2)$$

Здесь λ_n, μ_n — постоянные Ламе компонент, $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n, & \langle \varepsilon_{22} \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n, & \langle \varepsilon_{12} \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle &= \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}, & \langle \varepsilon_{23} \rangle &= V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k -компоненты из n -материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями композита в виде:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n &= \alpha_{33n}^{(1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle, & \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n &= \alpha_{13n}^{(1)} \langle \varepsilon_{13} \rangle, & \langle \varepsilon_{22}^{(k)} \rangle_n &= \alpha_{22n}^{(k)} \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12}^{(k)} \rangle_n &= \alpha_{12n}^{(k)} \langle \varepsilon_{12} \rangle, & \langle \varepsilon_{13}^{(k)} \rangle_n &= \alpha_{13n}^{(k)} \langle \varepsilon_{21} \rangle, & k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

ние деформации компонент равны средним деформациям композита, а при последовательном соединении средние деформации композита равны сумме средних деформаций компонент.

Формула для энергии F в кристаллографической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle F \rangle = & \frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + c_{22} \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{22} \rangle + \\ & + c_{13} \langle \varepsilon_{11} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22} \rangle \langle \varepsilon_{33} \rangle + 2(c_{44} \langle \varepsilon_{23} \rangle \langle \varepsilon_{32} \rangle + \\ & + c_{55} \langle \varepsilon_{13} \rangle \langle \varepsilon_{31} \rangle + c_{66} \langle \varepsilon_{12} \rangle \langle \varepsilon_{21} \rangle) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь величины c_{11}, \dots — независимые эффективные модули упругости сотового заполнителя, $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — средние деформации сотового заполнителя.

Среднее значение свободной энергии для сотового заполнителя с учетом изотропии компонент равно

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} \left[\frac{\lambda_n}{2} \langle \varepsilon_{ii}^{(k)} \rangle_n^2 + \mu_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n \right] \quad (1.2)$$

Здесь λ_n, μ_n — постоянные Ламе компонент, $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n$ — средние деформации компонент.

В дальнейшем будем различать продольные и поперечные слои. Продольные слои обозначаются верхним индексом (1), а поперечные — (2). У характерной ячейки сотового заполнителя продольными слоями являются материал основы и материал, заполняющий ячейки, поперечными — основа и клей. Пусть $n=1$ соответствует клею, $n=2$ — основе, $n=3$ — материалу, заполняющему ячейки.

Рассматривая различные деформации характерной ячейки (фиг. 2), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{22} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n, \quad \langle \varepsilon_{10} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle &= \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}, \quad \langle \varepsilon_{23} \rangle = V_n^{(1)} \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $V_n^{(k)}$ — относительный объем k -компоненты из n -материала.

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями композита в виде:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle_n &= \chi_{33n}^{(1)} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle_n = \chi_{11n}^{(1)} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{22}^{(k)} \rangle_n = \chi_{22n}^{(k)} \langle \varepsilon_{22} \rangle \\ \langle \varepsilon_{12}^{(k)} \rangle_n &= \chi_{12n}^{(k)} \langle \varepsilon_{12} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{13}^{(k)} \rangle_n = \chi_{13n}^{(k)} \langle \varepsilon_{23} \rangle, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим следующие процессы деформирования:

1. $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$; 2. $\langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0$; 3. $\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0$; 4. $\langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0$; 5. $\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0$;
6. $\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0$; 7. $\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0$; 8. $\langle \varepsilon_{33} \rangle = \langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$; 9. $\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = \langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0$

(1.5)

Вдоль процессов деформирования (1.5) с помощью соотношений (1.3), (1.4) вычисляются коэффициенты при средних деформациях в выражении для F (1.2). После сравнения с (1.1) получаем значения эффективных модулей упругости сытого заполнителя, выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 2 \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] V_n^{(k)}; & c_{33} &= \sum_{n=1}^3 \mu_n [V_n^{(2)} + V_n^{(1)} (z_{13n}^{(1)})^2] \\
 c_{22} &= 2 \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] \left[\sum_{k=1}^2 (z_{22n}^{(k)})^2 V_n^{(k)} \right]; & c_{13} &= \sum_{n=1}^3 \lambda_n [V_n^{(2)} + V_n^{(1)} z_{13n}^{(1)}] \\
 c_{33} &= 2 \sum_{n=1}^3 \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] [V_n^{(2)} + V_n^{(1)} (z_{33n}^{(1)})^2]; & c_{12} &= \sum_{n=1}^3 \lambda_n \sum_{k=1}^2 (z_{22n}^{(k)})^2 V_n^{(k)} \\
 c_{44} &= \sum_{n=1}^3 \mu_n \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} (z_{13n}^{(k)})^2; & c_{44} &= \sum_{n=1}^3 \mu_n \sum_{k=1}^2 V_n^{(k)} (z_{23n}^{(k)})^2 \\
 c_{23} &= \sum_{n=1}^3 \lambda_n [V_n^{(1)} z_{22n}^{(1)} z_{33n}^{(1)} + V_n^{(2)} z_{22n}^{(2)}]
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Постоянные $z_{ij}^{(k)}$, входящие в соотношения (1.6), определяются для следующих процессов деформирования:

1. $\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0$; 2. $\langle \varepsilon_{23} \rangle \neq 0$; 3. $\langle \varepsilon_{22} \rangle \neq 0$; 4. $\langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0$; 5. $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$

(1.7)

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (1.3) для деформаций, записанные с учетом того, что при последовательном соединении элементов средние напряжения в каждой компоненте одинаковы и равны средним напряжениям в композите, имеют вид

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{11} \rangle &= \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle_n + \sum_{n=1}^3 V_n^{(2)} \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle_n; & \langle \sigma_{22} \rangle &= \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle_n = \\
 &= \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle_n \\
 \langle \sigma_{33} \rangle &= \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{33}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + \langle \sigma_{33}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)}; & \langle \sigma_{12} \rangle &= \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle_n V_n^{(1)} \\
 \langle \sigma_{13} \rangle &= \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V_n^{(1)} \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle_n; & \langle \sigma_{23} \rangle &= \langle \sigma_{23}^{(2)} \rangle_n = \sum_{n=2}^3 V_n^{(1)} \langle \sigma_{23}^{(1)} \rangle_n
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Здесь $\langle \sigma_{ij} \rangle$ — средние напряжения в композите, $\langle \sigma_{ij} \rangle_n^{(k)}$ — средние напряжения в компонентах,

Используя закон Гука из соотношений (1.3), (1.4) и (1.8) для процессов деформирования (1.7), получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{23n}^{(2)} &= \left[\mu_n \left(\sum_{j=1}^2 \frac{V_j^{(2)}}{\mu_j} + \frac{V^{(1)}}{\sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i} \right) \right]^{-1}; \quad \alpha_{12n}^{(1)} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} \mu_i \sum_{j=1}^2 \frac{V_j^{(2)}}{\mu_j} \right]^{-1} \\ \alpha_{13n}^{(2)} &= \alpha_{23n}^{(2)}; \quad \alpha_{13n}^{(1)} = \left[\mu_n \sum_{i=2}^3 \frac{V_i^{(1)}}{\mu_i} \right]^{-1}; \quad \alpha_{33n}^{(1)} = \left[E_n \sum_{i=2}^3 \frac{V_i^{(1)}}{E_i} \right]^{-1}; \quad \alpha_{12n}^{(1)} = \alpha_{23n}^{(1)} \\ \alpha_{22n}^{(2)} &= \left[E_n \left(\sum_{i=1}^2 \frac{V_i^{(2)}}{E_i} + \frac{V^{(1)}}{\sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i} \right) \right]^{-1}; \quad \alpha_{22n}^{(1)} = \left[V^{(1)} + \sum_{i=2}^3 V_i^{(1)} E_i \sum_{j=1}^2 \frac{V_j^{(2)}}{E_j} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь E_i , μ_i — соответственно модули Юнга и сдвига i -компоненты.

Относительные объемы $V_i^{(k)}$ компонент характерной ячейки (фиг. 2) через размеры ячеек сотового заполнителя выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} V_1^{(1)} &= 0; \quad V_2^{(1)} = \frac{\Delta_1(b - 2\Delta_1)}{a(b + \Delta_2)}; \quad V_3^{(1)} = \frac{(a - \Delta_1)(b - 2\Delta_1)}{a(b + \Delta_2)} \\ V_1^{(2)} &= \frac{\Delta_1}{b + \Delta_2}; \quad V_2^{(2)} = \frac{2\Delta_1}{b + \Delta_2}; \quad V_3^{(2)} = 0; \quad V^{(1)} = \frac{b - 2\Delta_1}{b + \Delta_2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь Δ_1 — толщина стенок ячеек; Δ_2 — толщина клеевой прослойки; a , b — размеры характерной ячейки заполнителя.

Таким образом, соотношения (1.6), (1.9), (1.10) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотового заполнителя в зависимости от геометрических параметров ячейки и упругих свойств составляющих ее компонент. С помощью полученных формул можно вычислять оптимальные размеры ячейки, находя экстремумы функций $\nu_c(a, b, \Delta_1, \Delta_2, \dots)$ при условии, что периметр ячейки остается постоянным.

Анализ формул (1.6), (1.9), (1.10) показывает, что увеличение жесткости сотового заполнителя связано с уменьшением размеров ячейки a и b , увеличением толщины стенок ячеек Δ_1 и толщины клеевой прослойки Δ_2 , а также с увеличением упругих модулей составляющих компонент. Эти факты наблюдались в эксперименте [1—4].

2. Определим эффективные модули упругости сотовласта. Сотовласт — слоистый, анизотропный композиционный материал, обладающий ортотропной симметрией. Материал несущих обшивок (1) (фиг. 1) считается изотропным.

Расчет эффективных модулей упругости сотовласта основан на применении правила смешивания и проводится аналогично тому, как это было сделано выше при расчете модулей сотового заполнителя. В дальнейшем различаются продольные и поперечные слои. Продольный слой один — сотовый заполнитель, поперечные слои — несущие обшивки

и клеевая прослойка. По-прежнему верхний индекс 1 относится к продольному слою, а верхний индекс 2—к поперечным слоям.

Среднее значение свободной энергии для сотопласта с учетом изотропии и ортотропии компонент равно

$$\langle F \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(1)} \left[\frac{\lambda_n}{2} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n + \mu_n \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n \right] + V^{(1)} \left[\frac{1}{2} (c_{11} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle^2 + c_{22} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle^2 + c_{33} \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle^2) + c_{12} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle + c_{23} \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle + c_{31} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle + 2(c_{14} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle + c_{35} \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle) + c_{66} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle \right] \quad (2.1)$$

Здесь и далее вследствие того, что продольный слой один, нижний индекс n у величин, характеризующих продольный слой, для упрощения записи опущен; c_{11}, \dots —эффективные модули упругости сотового заполнителя; $\langle \varepsilon_{ij}^{(k)} \rangle_n$ —средние деформации компонент; $n=1$ соответствует несущим обшивкам, $n=2$ —клеевой прослойке.

Рассматривая различные деформации сотопласта (фиг. 1), в соответствии с правилом смешивания получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle; & \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \langle \varepsilon_{33}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{33}^{(2)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{13} \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle; & \langle \varepsilon_{22} \rangle &= \langle \varepsilon_{22}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{22}^{(2)} \rangle_n \\ \langle \varepsilon_{12} \rangle &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n + V^{(1)} \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle; & \langle \varepsilon_{23} \rangle &= \langle \varepsilon_{23}^{(1)} \rangle = \langle \varepsilon_{23}^{(2)} \rangle_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Предполагается, что существует зависимость между средними деформациями компонент, участвующих в последовательном соединении, и средними деформациями композита в виде

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11}^{(2)} \rangle_n &= \chi_{11}^{(2)} \langle \varepsilon_{11} \rangle; & \langle \varepsilon_{11}^{(1)} \rangle &= \chi_{11}^{(1)} \langle \varepsilon_{11} \rangle; & \langle \varepsilon_{13}^{(2)} \rangle_n &= \chi_{13n}^{(2)} \langle \varepsilon_{13} \rangle \\ \langle \varepsilon_{13}^{(1)} \rangle &= \chi_{13}^{(1)} \langle \varepsilon_{13} \rangle; & \langle \varepsilon_{12}^{(1)} \rangle &= \chi_{12}^{(1)} \langle \varepsilon_{12} \rangle; & \langle \varepsilon_{12}^{(2)} \rangle_n &= \chi_{12n}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аналогично п. 1 в рассматриваемом случае можно написать значения эффективных модулей упругости сотопласта A_{11}, \dots , выраженные через упругие характеристики и объемную долю компонент

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} (\chi_{11n}^{(2)})^2 \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} (\chi_{11}^{(1)})^2 c_{11}; & A_{23} &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \chi_{23n}^{(2)} + V^{(1)} c_{23} \\ A_{33} &= 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} c_{33}; & A_{22} &= 2 \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \left[\frac{\lambda_n}{2} + \mu_n \right] + V^{(1)} c_{22} \\ A_{12} &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \chi_{12n}^{(2)} \chi_{11n}^{(2)} + V^{(1)} c_{12} \chi_{11}^{(1)}; & A_{13} &= \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \chi_{13n}^{(2)} \chi_{11n}^{(2)} + V^{(1)} \chi_{11}^{(1)} c_{13} \end{aligned}$$

$$A_{44} = \sum_{n=1}^2 \mu_n V_n^{(2)} + c_{44} V^{(1)}; \quad A_{55} = \sum_{n=1}^2 \mu_n V_n^{(2)} (x_{13n}^{(2)})^2 + c_{55} (x_{13}^{(1)})^2 V^{(1)}$$

$$A_{66} = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \mu_n (x_{12n}^{(2)})^2 + c_{66} V^{(1)} (x_{12}^{(1)})^2 \quad (2.4)$$

Выражения для напряжений, соответствующие уравнениям (2.2) для деформаций, имеют вид

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \sum_{n=1}^2 V_n^{(2)} \langle \sigma_{33}^{(2)} \rangle + V^{(1)} \langle \sigma_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{12} \rangle = \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle_n = \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle$$

$$\langle \sigma_{22} \rangle = \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V^{(1)} \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle_n = \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle$$

$$\langle \sigma_{31} \rangle = \sum_{n=1}^2 \langle \sigma_{33}^{(2)} \rangle_n V_n^{(2)} + V^{(1)} \langle \sigma_{33}^{(1)} \rangle; \quad \langle \sigma_{13} \rangle = \langle \sigma_{13}^{(2)} \rangle_n = \langle \sigma_{13}^{(1)} \rangle \quad (2.5)$$

Используя закон Гука, из соотношений (2.3), (2.2) и (2.5) определим величины $x_{ij}^{(k)}$ для процессов деформирования $\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0$, $\langle \varepsilon_{12} \rangle \neq 0$, $\langle \varepsilon_{13} \rangle \neq 0$:

$$x_{11}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{11} \sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / E_l)^{-1}; \quad x_{11n}^{(2)} = \left[E_n \left(\sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / E_l + V^{(1)} / c_{11} \right) \right]^{-1}$$

$$x_{12}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{12} \sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / \mu_l)^{-1}; \quad x_{12n}^{(2)} = \left[\mu_n \left(\sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / \mu_l + V^{(1)} / c_{12} \right) \right]^{-1}$$

$$x_{13}^{(1)} = (V^{(1)} + c_{13} \sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / \mu_l)^{-1}; \quad x_{13n}^{(2)} = \left[\mu_n \left(\sum_{l=1}^2 V_l^{(2)} / \mu_l + V^{(1)} / c_{13} \right) \right]^{-1} \quad (2.6)$$

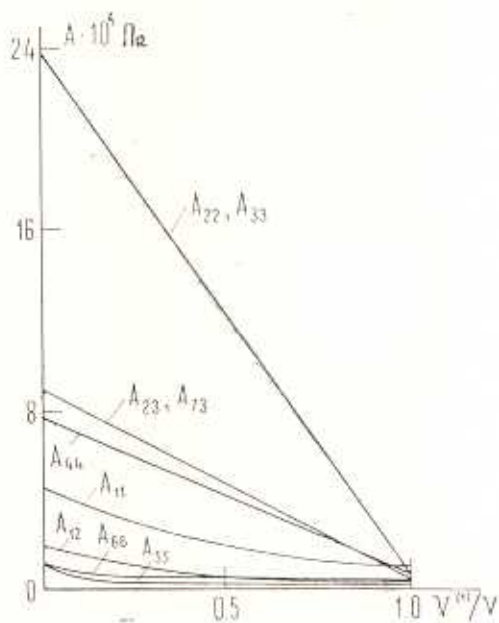
Относительные объемы $V_i^{(k)}$ компонент сотовласта выражаются через размеры сотовой панели следующим образом ($V = V^{(1)} + V_1^{(2)} + V_2^{(2)}$):

$$V^{(1)} = \frac{h}{h + 2(\Delta_3 + \Delta_4)}, \quad V_1^{(2)} = \frac{2\Delta_3}{h + 2(\Delta_3 + \Delta_4)}, \quad V_2^{(2)} = \frac{2\Delta_4}{h + 2(\Delta_3 + \Delta_4)} \quad (2.7)$$

Здесь h — высота сотового заполнителя, Δ_3 — толщина несущих панелей, Δ_4 — толщина клеевой прослойки.

Таким образом, соотношения (2.4), (2.6) и (2.7) позволяют вычислять эффективные модули упругости сотовластов в зависимости от геометрических размеров панели и упругих свойств составляющих компонент.

В качестве примера применения формул (2.4), (2.6), (2.7) на фиг. 3 приведены графики изменения эффективных модулей упругости сотопласта в зависимости от относительного объема сотового заполнителя $V^{(0)}/V$. При расчетах принималось, что сотовый заполнитель изготовлен из алюминиевой фольги ($E=5,8 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu=2,4 \cdot 10^{10}$ Па) толщиной $\Delta_1=5 \cdot 10^{-4}$ м, размеры ячейки заполнителя $a=5 \cdot 10^{-3}$ м, $b=1,45 \cdot 10^{-2}$ м. Ячейки заполнены пенополиуретаном ($\mu=7 \cdot 10^4$ Па, $\lambda=0,21 \cdot 10^4$ Па), несущие обшивки изготовлены из стали ($E=19,6 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu=7,9 \cdot 10^{10}$ Па), в качестве клея использовалась эпоксидная смола ($E=3,1 \cdot 10^9$ Па, $\mu=1,1 \cdot 10^9$ Па), причем в ячейке заполнителя $\Delta_2=10^{-4}$ м, а при расчетах относительных объемов сотопласта принималось, что $\Delta_1=0,1 \Delta_2$.



Фиг. 3

Механике слоистых композитов посвящены, например, монографии [5, 6]. В работах [7, 8] для слоистых и намотанных композитов не использовался подход соединения элементов, который в настоящей работе применяется к сотовым конструкциям.

EFFECTIVE CELL LAYER ELASTICITY MODULUSES

A. G. BIKOVZEV, V. V. KOLOKOZCHIKOV

ԲԵԶՄՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱՌԱՉԳԱՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ԱՐԳՅՈՒՆՈՒԹՅՆ ՄՈՂՈՒԿՆԵՐԸ

Ա. Գ. ԲԻՎՈՎՅԵՎ, Վ. Վ. ԿՈԼՈԿՈՇՇԻԿՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Ստացված են բջջային լցանյութի և բջջային լցանյութից ու կրող ծածկույթից բջջապլաստի արգյունավետ առաձգական մոդուլները: Ենթադրվում է, որ լցանյութի հիմքը, ստանձի շերտը, բջիջները լցնող նյութը և կրող ծածկույթների նյութը իզոտրոպ են: Միջին հաշվով կամպոզիտը բնութագրվում է որթոտրոպ սիմետրիայով: Որպես օրինակ ստացված է բջջապլաստի արգյունավետ առաձգական մոդուլների կախվածությունը բջջային լցանյութից հարբերական ծավալից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Берудский В. Е., Крысин В. П., Лесных С. И. Производство сотовых конструкций. М.: 1966. 282 с.
2. Иванов В. А., Романенков И. Г. Прочность сотопласта при плоском напряженном состоянии. — Механика полимеров, 1972, № 5, с. 936—938.
3. Иванов В. А., Романенков И. Г. Временная зависимость прочности сотопластов. — Проблемы прочности, 1973, № 8, с. 91—92.
4. Иванов В. А., Романенков И. Г. Влияние размеров образцов на прочность и деформативность при сжатии сотопластов. — Заводская лаборатория, 1972, № 5, с. 603—606.
5. Болотин В. В., Номалова Ю. Н. Механика многослойных конструкций. — М.: 1980. 375 с.
6. Маллейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Сравнение жестких полимерных материалов. Рига: 1972. 498 с.
7. Колокольчиков В. В., Комарова Н. С., Макарова И. С. Термоупругость, теплопроводность и прочность слоистых металлокомпозитов. — Механика композит. материалов, 1983, № 2, с. 257—260.
8. Колокольчиков В. В., Комарова Н. С., Кишляк А. М. Прочность трехкомпонентного слоистого композита. — Проблемы прочности, 1984, № 4, с. 37—41.

Куйбышевский авиационный институт
им. С. П. Королёва
Куйбышевский государственный
университет

Поступила в редакцию
7.I.1988