ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 539.319

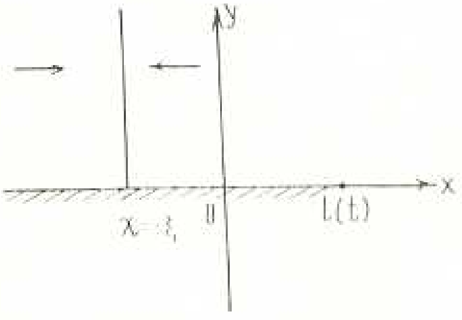
ЗАДАЧА СОУДАРЕНИЯ ДВУХ ЧЕТВЕРТЬ-ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТВЕРДОЙ ОПОРЫ

МАРТИРОСЯН А. Н.

Задача соударения плоских тел в форме прямых углов при наличии на нижних сторонах углов частично твердой опоры решена в [1]. Задачи о трещинах в случае анизотропной среды рассмотрены в [2, 3, 4]. В случае движущейся трещины для изотропной среды с постоянной скоростью задача решена в [5], а для переменной скорости—в [6]. В настоящей статье для общего случая упругой анизотропной среды дается решение нестационарной смешанной задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью.

§ 1. *Формулировка задачи соударения*

Рассмотрим формулировку смешанной задачи соударения тел, имеющих вид прямых двугранных углов движущихся навстречу друг другу с одинаковой скоростью V_0. Задача считается плоской. Ось x выбирается по нижним сторонам углов, ось y направлена вертикально вверх (фиг. 1). На границе углов имеется твердая опора $-\infty < x < l(t)$, конец которой движется со скоростью $\dot{l}(t)$, где t—время с начала соударения. Рассмотрены случаи, когда соударение происходит на опоре и вне ее. Если углы были бы полуплоскостями $-\infty < y < \infty$, то решение в отсутствие опоры приняло бы вид



Фиг. 1

$$u_0 = -V_0 t H(x' - \sqrt{a}\,t) + V_0 t H(-x' - \sqrt{a}\,t) - \frac{x'}{\sqrt{a}} V_0 H(\sqrt{a}\,t - |x'|) \qquad (1.1)$$

$$v_0 = 0, \quad x' = x + \xi$$

Здесь u_0, v_0— смещение по осям x, y; $x = -\xi$—прямое слияние углов, $H(x)$—единичная функция, ρa—упругая постоянная, координата x'

отсчитывается от точки соударения тел, координата x отсчитывается от начальной точки 0, являющейся точкой перехода твердой опоры в свободную границу в момент $t=0$; то есть при $y=0$, $x<l(t)$ имеет место условие $v=0$, а при $x>l(t)-\sigma_{yy}=0$, где σ_{yy} есть нормальное напряжение и на всей границе касательное напряжение $\sigma_{xy}=0$. Из (1.1) следует

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=-V_0H(x'-\sqrt{a}t)+V_0H(-x'-\sqrt{a}t) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{V_0}{\sqrt{a}}H(\sqrt{a}t-|x'|)$$

Вводя двумерные возмущения $U=u-u_0$, $V=v-v_0$, можно записать уравнение движения упругой среды для U; V в виде [4]

$$a\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2U}{\partial t^2},\quad \left(a=\frac{C_{11}}{\rho},\ b=\frac{C_{22}}{\rho}\right)$$

$$\tag{1.3}$$

$$c\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}+d\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2V}{\partial t^2},\quad \left(d=\frac{C_{66}}{\rho},\ c=\frac{C_{66}+C_{12}}{\rho}\right)$$

Здесь C_{ij}—упругие постоянные, ρ—плотность среды. При $t=0$ имеем $U=0$, $V=0$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial V}{\partial t}=0$.

Вышеуказанные граничные условия ($y=0$), в которые подставлены σ_{yy}, σ_{xy} через U, V и учтено (1.2), можно записать в виде

$$(c-d)\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{c-d}{\sqrt{a}}V_0H\left(t-\frac{|x'|}{\sqrt{a}}\right),\quad x>l(t)$$

$$\tag{1.4}$$

$$V=0,\quad x<l(t);\quad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=0,\quad -\infty<x<\infty$$

§ 2. Определение решения задачи, для которой точка соударения тел расположена на жесткой опоре

Вначале рассмотрим те значения $\xi\geqslant0$, при которых линия слияния тел находится на жесткой опоре, тогда в (1.4) $H\left(\dfrac{x'}{\sqrt{a}}+t\right)=1$; ($x>l(t)$). Согласно [2] вводятся трансформанты Лапласа по t и Фурье по x от компонент смещения по осям x и y

$$\bar{U},\ \bar{V}=\int_0^\infty U,\ V\exp(-st)dt \tag{2.1}$$

$$\bar{U},\ \bar{V}=\sum_{n=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{U}_n,\ \bar{V}_n\exp[-iqx-iy\beta_n(q)]dq$$

Подставляя (2.1) в (1.3), получим

$$\bar V_n = -\frac{s^2+aq^2+d\beta_n^2}{cq\beta_n}\bar U_n, \qquad \beta_n = i\left[\frac{(b+d)s^2+Lq^2+(-1)^n\sqrt{\Delta(q)}}{2bd}\right]^{1/2}$$

$$\Delta(q)=[(b+d)s^2+Lq^2]^2-4abd^2\nu_1^2\nu_2^2$$

$$\nu_1=i\sqrt{\frac{s^2}{a}+q^2},\quad \nu_2=i\sqrt{\frac{s^2}{a}+q^2},\quad L=ab-d^2-c^2,\quad a>d,\quad b>d>0 \tag{2.2}$$

$$K_1=ab-(c-d)^2>0,\quad b(a-d)-c^2>0$$

Обозначая левую часть первого условия (1.4) через $\sigma(t, x)$, а второе условие через $V(t, x)$, представим эти функции в виде

$$\sigma(t,x)=\sigma_-(t,x)H(l-x)+\sigma_+(t,x)H(x-l)$$

$$V(t,x)=V_-(t,x)H(l-x)+V_+(t,x)H(x-l)$$

Значения функций $\sigma=\sigma_-(t, x)$ при $x<l(t)$ и $V=V_+(t, x)$ при $x>l(t)$ неизвестны и подлежат определению

$$\sigma_+(t,x)=\frac{c-d}{\sqrt a}V_0H\left(t-\frac{x}{\sqrt a}\right),\quad V_-(t,x)=0.$$

Легко отметить, что изображения функций $\sigma(t, x)$, $V(t, x)$ связаны соотношением

$$\bar{\bar V}(s,q)=\bar{\bar S}(s,q)\,\bar{\bar\sigma}(s,q) \tag{2.3}$$

где $\bar{\bar S}$ есть изображение решения задачи Лемба [6]. В случае анизотропной среды S имеет вид

$$\bar{\bar S}(s,q)=-\frac{ni}{\nu_2C_0}F(s,q),\quad F(s,q)=\frac{C_0\nu_1\nu_2(\beta_1+\beta_2)}{R(s,q)}$$

$$C_0=K_1\left(2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{L}{ad}\right)^{-\frac{1}{2}},\quad F(s,q)\to 1,\ q\to\infty$$

$$R(s,q)=(bs^2+K_1q^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\nu_2+as^2\nu_1=$$

$$=\frac{adK_1\sqrt a}{4(a-d)s^2\sqrt b}\{Q_1s^4-P_1s^2(q^2+\nu_1\nu_2)+4q^2\nu_1\nu_2+$$

$$+(\nu_2^2-q^2)^2\}(\nu_1+\nu_2),\quad P_1=\frac{4(\sqrt{ab}-b)}{K_1}$$

$$Q_1=\frac{P_1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{a^2K_1}[b(b-a)+(c+d-b)(c+b-3d)]$$

где $R(s, q)$ — функция Рэлея. Число и положение точек разветвления функций β_n на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в [4]. После выбора ветвей функций γ_n, β_n легко получить [2]

$$\bar S(s,q)=\bar S_+(s,q)\,\bar S_-(s,q),\quad \bar P_\pm(s,q)=\frac{1}{\bar S_\pm(s,q)}$$

$$\bar S_+(s,q)=\frac{a}{C_R}\,\frac{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt a}-iq}}{sc_R^{-1}-iq}\,D_+,\quad \bar S_-(s,q)=\frac{\sqrt{\dfrac{s}{\sqrt a}+iq}}{sc_R^{-1}+iq}\,D_- \tag{2.4}$$

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{1/\sqrt a}^{1/\sqrt a}\ln\left|\frac{R(I)}{\overline{R(I)}}\,\frac{\beta_2^*(I)-i\beta_1^*(I)}{\beta_2^*(I)+i\beta_1^*(I)}\right|\frac{dI}{I\pm\dfrac{iq}{s}}\right\}$$

$$\beta_n^*(I)=\left\{\frac{\sqrt{(b+d-LI^2)^2+4abd^2\left(I^2-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{1}{d}-I^2\right)}-(-1)^n(LI^2-b-d)}{2bd}\right\}^{1/2}$$

$$R(I)=(b-K_1I^2)\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{1}{d}-I^2}+ai\sqrt{I^2-\frac{1}{a}},\quad R\left(\frac{1}{c_R}\right)=0$$

Так как функции $D_\pm(iq/s)$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости $z=iq/s$, за исключением точек, принадлежащих разрезам $\left[\pm\frac{1}{\sqrt a},\ \pm\frac{1}{\sqrt d}\right]$, можно с помощью формулы Коши для неограниченной области получить значение $D_\pm(iq/s)$ в виде [6]

$$D_\pm\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{1/\sqrt a}^{1/\sqrt a}\frac{F_1(u)\,du}{u\mp\dfrac{iq}{s}},\quad D_\pm^{-1}\left(\frac{iq}{s}\right)=1+\int_{1/\sqrt a}^{1/\sqrt a}\frac{F_2(u)\,du}{u\mp\dfrac{iq}{s}} \tag{2.5}$$

$$F_1(u)=\gamma(u)\exp[\varkappa(u)],\quad F_2(u)=-\gamma(u)\exp[-\varkappa(u)]$$

$$\gamma(u)=\frac{a\sqrt{u^2-\dfrac{1}{a}}\,\beta_2^*(u)-(b-K_1u^2)\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{\dfrac{1}{d}-u^2}\,\beta_1^*(u)}{\pi|R(u)|\,|i\beta_1^*(u)+\beta_2^*(u)|}$$

$$\varkappa(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1/\sqrt a}^{1/\sqrt a}\ln\left|\frac{R(I)}{\overline{R(I)}}\,\frac{\beta_2^*(I)-i\beta_1^*(I)}{\beta_2^*(I)+i\beta_1^*(I)}\right|\frac{dI}{I-u}$$

Обозначим через $S_\pm(t,x)$ и $P_\pm(t,x)$ оригиналы $\bar S_\pm(s,q)$ и $\bar P_\pm(s,q)$ соответственно, и вычисляя их аналогично [6], получим

$$S_-(t,x)=\frac{H(-x)}{\sqrt{-\pi x}}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1/2}}{c_R^{-1}+t/x}}\,H(c_R^{-1}+t/x)-\right.\right.$$

$$
-\int\limits_{-t/x}^{1/\sqrt{a}} \frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u} \sqrt{\frac{u-a^{-1/2}}{u+t/x}}\, du \Bigg] H\left(-t/x-a^{-\frac{1}{2}}\right) \Bigg\} \tag{2.6}
$$

$$
P_-(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{c_R}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\left[A\delta\left(t+\frac{x}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} F_3(h)\delta(t+hx)\,dh\right]\frac{H(-x)}{\sqrt{-x}}\right\}
$$

$$
A=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_2(u)\,du}{u-\frac{1}{\sqrt{a}}},\quad B=1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(u)\,du}{u-\frac{1}{c_R}},\quad F_3(h)=\int\limits_{h}^{1/\sqrt{a}}\frac{d}{du}\left[\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-\frac{1}{\sqrt{a}}}}\right]\frac{du}{u-h}
$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака. Функции $S_+(t,x)$ и $P_+(t,x)$ получаются из (2.6) заменой x на $-x$ и умножением на постоянную a/C_0 и C_0/a, соответственно. Полученные формулы по форме совпадают с [6] или со случаем изотропной среды, где D_- даются в виде (2.5).

Представим функции $\overline{\overline{V}}(s,q)$, $\overline{\overline{\sigma}}(s,q)$ в виде

$$
\overline{\overline{\sigma}}(s,q)=\overline{\overline{\sigma}}_+(s,q)+\overline{\overline{\sigma}}_-(s,q),\quad \overline{\overline{V}}=\overline{\overline{V}}_++\overline{\overline{V}}_- \tag{2.7}
$$

где $\overline{\overline{V}}_+$, $\overline{\overline{\sigma}}_-$ неизвестны, $\overline{\overline{V}}_-$, $\overline{\overline{\sigma}}_+$ есть изображения оригиналов $V_-(t,x)$, $\sigma_+(t,x)$. Кроме того, нетрудно заметить, что функция $\overline{\overline{S}}(s,q)$ такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям $\overline{\overline{S}}_\pm(s,q)$, $\overline{\overline{P}}_\pm(s,q)$, оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$
P_+(t,x)=S_+(t,x)=0 \quad \text{при} \quad x<c_Rt \tag{2.8}
$$

$$
P_-(t,x)=S_-(t,x)=0 \quad \text{при} \quad x>-c_Rt
$$

$$
-c_R<\dot{l}(t)=\frac{dl}{dt}<c_R
$$

где $l(t)$ — гладкая функция.

Подставляя (2.7) в (2.3) и учитывая (2.8), можно, как и в [6], получить решение поставленной задачи в форме сверток по x, t

$$
\sigma_-=-P_-**[(S_-**\sigma_+-P_+**V_-)H(l-x+0)] \tag{2.9}
$$

$$
V_+=S_+**[(S_-**\sigma_+-P_+**V_-)H(-l+x+0)]
$$

Здесь символ $(**)$ означает свертку по t и x. Подставив в (2.9) выражение (2.6), значение σ_+ и, учитывая, что по условию задачи $V_-=0$, получаем на оси x

$$
\sigma_-(t,x)=P\left\{AN\left(t,x,\xi,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}F_3(h)N(t,x,\xi,h)\,dh\right\}H\left(t-\frac{x+\xi}{\sqrt{a}}\right) \tag{2.10}
$$

$$N(t,x,\xi,h)=\frac{c_R+\dot{l}}{\sqrt[4]{a}c_R(1+h\dot{l})}\sqrt{\frac{\sqrt{a}t_0-l-\xi}{l-x}}+\frac{c_R+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}\sqrt{h\sqrt{a}+1}c_R}\times$$

$$\times\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\left(h+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)(l-x)}}{\sqrt{t+hx+\frac{\xi}{\sqrt{a}}-\left(h+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)l}},\quad l=l(t_0),\quad t-t_0=h(l(t_0)-x)$$

$$P=\frac{4(c-d)c_R V_0}{\pi\sqrt{2}(\sqrt{a}+c_R)\sqrt[4]{a}}\left(1+\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(u)du}{u+\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)$$

Для поставленной задачи решение получится из (2.10), добавляя одномерное решение.

Учитывая, что при $x\to l(t)$, $t_0\to t$ и $\frac{l(t)-x}{l(t_0)-x}\to 1+h\dot{l}(t)$ можно из (2.10) получить коэффициент интенсивности напряжений

$$\lim_{x\to l-0}\sqrt{l-x}\,\sigma_y(t,x)=PK(\dot{l})\sqrt{t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}}H\left(t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}\right)\qquad(2.11)$$

$$K(\dot{l})=\left(1+\dot{l}\int\limits_{1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}}\frac{F_2(u)du}{1+u\dot{l}}\right)\frac{(c_R-\dot{l})\sqrt[4]{a}}{c_R\sqrt{\sqrt{a}+\dot{l}}},\ l=l(t)$$

Можно доказать, что для случая постоянной $\dot{l}$ (2.11) совпадает с решением, полученным применением метода Винера-Хопфа.

§ 3. Решение задачи в случае $\xi<0$

Рассмотрим теперь случай, когда $\xi<0$, то есть соударение углов происходит вне жесткой опоры. Тогда $H(x'+\sqrt{a}t)\equiv 1$ при $x>l(t)$, и поэтому граничные условия возьмем в виде (1.4), а именно:

$$\sigma_+(t,x)=\frac{(c-d)V_0}{\sqrt{a}}H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)H(t)$$

Представим $H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)$ следующим образом:

$$H\left(t-\frac{|x+\xi|}{\sqrt{a}}\right)=H\left(t-\frac{x+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(x+\xi)+H\left(t+\frac{x+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(-x-\xi)\qquad(3.1)$$

Учитывая (3.1), из (2.9) можно получить коэффициенты интенсивности напряжений в виде

$$\lim_{x\to l-0}\sqrt{l-x}\,\sigma_y(t,x)=K(\dot{l})\left\{P\sqrt{t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}}H\left(t-\frac{l+\xi}{\sqrt{a}}\right)H(l+\xi)+\right.$$

$$
+2\frac{(c-d)V_0}{\pi\sqrt{a}}\sqrt{-l-\xi}\left[1-\frac{B\sqrt{a}c_R}{\sqrt{\sqrt{a}-c_R}}\sqrt{\frac{1}{c_R}-T}-\right. \tag{3.2}
$$

$$
\left.-\int_T^{1/\sqrt{a}}\frac{F_1(u)}{\frac{1}{c_R}-u}\sqrt{\frac{u-T}{u-\frac{1}{\sqrt{a}}}}\,du H\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-T\right)\right]H(-l-\xi)H\left(T-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)
$$

$$
T=\frac{t}{l+\xi}
$$

Отметим, что при $l(t)>-\xi$ решение (3.2) совпадает с (2.11), при этом $x=-\xi$ находится на опоре и имеет место решение (2.11).

Автор благодарит А. Г. Багдоева за ценные советы.

COLLISION PROBLEM OF TWO QUARTER—PLANES ON MOVING RIGID SUPPORT

A. N. MARTIROSIAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ԿՈՇՏ ՀԵՆԱՐԱՆԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ԵՐԿՈՒ ՔԱՌՈՐԴ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈԽՀԱՐՎԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է այն անիզոտրոպ առաձգական ուղիղ անկյունների փոխհարվածի խնդրի լուծումը, որոնց ճակատների մի մասը ամրակցված է կոշտ հիմքին: Հիմքի եզրը շարժվում է կամայական արագությամբ: Որոշված են լարումների ինտենսիվության գործակիցները և լարումը կոնտակտի գծի վրա: Ստացված է հիմքի եզրի հաստատուն արագության համար Վիներ-Հոպֆի մեթոդի վրա հիմնված լուծումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г. Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—Докл АН СССР, 1976, т. 226, №3, с. 537—540.
2. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарных задач для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 1.
3. *Мартиросян А. Н.* Решение некоторых задач для анизотропной среды.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1975, т. 28, №1, с. 34—48.
4. *Norris A. N., Achenbach J. D.* Elastic wave diffraction by a semi-infinite crack in a transversaly isotropic material.—Q. Jl Mech. appl. Math. 1984, vol. 37, Pt. 4, p. 565—580.
5. *Freund L. B.* Crack-propagation in an elastic solid subjected to general loading. 1. —J. Mech. Phys. Solids, 1972, vol. 20, p. 123.
6. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 54—73.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
6.I.1988