ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 624.042+624.074

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛА ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

ТАНАНАЙКО О. Д.

Цель настоящей работы—показать возможность такого преобразования уравнений теории оболочек, при котором из уравнений выпадают смешанные производные от искомых кинематических параметров. Такое преобразование упрощает построение вариационно-разностных схем для расчета оболочек сложной формы.

Будем придерживаться, в основном, обозначений, принятых в [1]. Потенциальная энергия деформации может быть выражена (при учете деформаций поперечного сдвига) следующим образом:

$$U=\frac{1}{2}\iint\Big[D(\varkappa_1^2+2\nu\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2^2)+2D(1-\nu)\chi^2+E^*h(\varepsilon_1^2+2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)+$$

$$+Gh\gamma^2+\frac{5}{6}Gh\bar{\gamma}_{z1}^2+\frac{5}{6}Gh\bar{\gamma}_{z2}^2\Big]AB\,d\alpha\,d\beta$$

Примем обычные формулы для ε_1, ε_2, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$:

$$\varepsilon_1=u_{,\alpha}/A+av+w/R_1;\quad \varepsilon_2=v_{,\beta}/B+bu+w/R_2$$

$$\varkappa_1=\theta_{,\alpha}/A+a\psi;\quad \varkappa_2=\psi_{,\beta}/B+b\theta$$

Здесь введены обозначения $a=A_{,\beta}/AB$, $b=B_{,\alpha}/AB$, $E^*=E/(1-\nu^2)$. Введем в рассмотрение угол поворота элемента оболочки вокруг нормали к ее срединной поверхности. Этот угол определяется формулой [2]:

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A}-\frac{u_{,\beta}}{B}+bv-au\right)$$

Тогда деформацию сдвига можно записать для срединной поверхности в двух эквивалентных формах

$$\gamma=2(\gamma_1-\omega)=2(\gamma_2+\omega)$$

где

$$\gamma_1=v_{,\alpha}/A-au,\quad \gamma_2=u_{,\beta}/B-bv$$

Деформация кручения также может быть записана в двух вариантах [3]

$$\chi=\chi_1+\gamma_2/R_1=\chi_2+\gamma_1/R_2$$

где

$$\chi_1=\psi_{,\alpha}/A-a\vartheta, \quad \chi_2=\vartheta_{,\beta}/B-b\psi$$

Для наших целей оказывается более удобным использовать несколько отличные от указанных (но легко получаемые из них) формы записи выражения для χ:

$$\chi=\chi_1+(\gamma_1-2\omega)/R_1 \quad \text{и} \quad \chi=\chi_2+(\gamma_2+2\omega)/R_2$$

Деформации поперечного сдвига получаются как разность между углами поворота нормали ϑ, ψ и соответствующими углами наклона ортов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ по отношению к их первоначальным направлениям (эти углы устанавливаются из геометрических соображений по обычным формулам теории оболочек):

$$\bar{\gamma}_1=\vartheta+\omega_{,\alpha}/A-u/R_1, \qquad \bar{\gamma}_2=\psi+\omega_{,\beta}/B-v/R_2$$

Составим функционал Φ, включающий потенциальную энергию деформации оболочки u, потенциал поверхностных и контурных нагрузок Π и взятую с лагранжевым множителем $\lambda(\alpha, \beta)$ левую часть однородного равенства, выражающего связь между углом ω и линейными смещениями:

$$\Phi=u+\Pi+\iint\lambda\left[\omega-\frac{1}{2}(v_{,\alpha}/A-u_{,\beta}/B+bv-au)\right]ABd\alpha d\beta$$

Выражение для u можно представить следующей суммой:

$$u=u_1^0+u_2^0+u_{12}$$

где

$$u_1^0=\frac{1}{2}\iint\Bigg\{D\left[\varkappa_1^2+(1-\nu)\left(\chi_1+\frac{\gamma_1-2\omega}{R_1}\right)^2\right]+2D\nu\left[(b\vartheta_{,\alpha}/A+ab\vartheta\psi/AB)\right]+$$

$$+E^*\nu h\varepsilon_1^2+2Gh(\gamma_1-\omega)^2+2E^*\nu h\left[\frac{u_{,\alpha}}{A}\left(bu+\frac{w}{R_2}\right)+\frac{1}{2}\left(au+\frac{w}{R_1}\right)\left(bu+\frac{w}{R_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{5}{6}Gh\bar{\gamma}_1^2\Bigg\}ABd\alpha d\beta$$

$$u_{12}=\nu\iint[D\vartheta_{,\alpha}\psi_{,\beta}+E^*hu_{,\alpha}v_{,\beta}]d\alpha d\beta$$

Предполагается, конечно, что деформации ε_1, $\varkappa_1$, χ_1, γ_1, $\bar{\gamma}_1$ уже выражены с помощью указанных выше зависимостей через перемещения и углы поворота. Формула для u_2^0 записывается аналогично формуле для u_1^0 и здесь не приводится.

Выполнив операцию интегрирования по частям, преобразуем формулу для u_{12}

$$u_{12}=\Phi_\kappa+\nu\iint[D\vartheta_{,\beta}\psi_{,\alpha}+E^*hu_{,\beta}v_{,\alpha}]d\alpha d\beta$$

причем

$$\Phi_s=\frac{\nu}{2}\oint_s [D(\psi_{,s}\theta-\theta_{,s}\psi)+E^*h(v_{,s}u-u_{,s}v)]ds$$

Используя формулы для параметров сдвига и кручения, можем избавиться в двойном интеграле от произведений производных по разным координатам:

$$u_{,\beta}v_{,\alpha}=\frac{B}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A}+bv-au-2\omega\right)v_{,\alpha}+\frac{A}{2}\left(\frac{u_{,\beta}}{B}+au-bv+2\omega\right)u_{,\beta}$$

$$\theta_{,\beta}\psi_{,\alpha}=\frac{B}{2}\left[\frac{\psi_{,\alpha}}{A}+b\psi-a\theta-\Delta k\gamma_1-2\omega k_1\right]\psi_{,\alpha}+$$

$$+\frac{A}{2}\left[\frac{\theta_{,\beta}}{B}-b\psi+a\theta-\Delta k\gamma_2+2\omega k_2\right]\theta_{,\beta}$$

$$(\Delta k=k_2-k_1)$$

Здесь снова предполагается, что деформации γ_1, γ_2 выражены через перемещения; использованы обычные обозначения для главных кривизн срединной поверхности

$$k_1=1/R_1,\quad k_2=1/R_2$$

Следовательно, окончательно

$$u_{12}=\Phi_s+\Delta u_1+\Delta u_2$$

где Δu_1—двойной интеграл, в подынтегральную функцию которого входят производные от искомых кинематических параметров по координате α; аналогичным свойством обладает Δu_2.

Обозначая $u_1=u_1^0+\Delta u_1$, $u_2=u_2^0+\Delta u_2$, имеем теперь

$$\tilde{\Phi}=u_1+u_2+\Pi+\iint\lambda\left[\omega-\frac{1}{2}\left(\frac{v_{,\alpha}}{A}-\frac{u_{,\beta}}{B}+bu-av\right)\right]ABd\alpha d\beta$$

Варьируя $\tilde{\Phi}$ по ω, найдем

$$\lambda=E^*\nu h[2\omega+au-bv]+D\nu[Bk_1\psi_{,\alpha}-Ak_2\theta_{,\beta}]/AB$$

Вторая квадратная скобка может быть записана в двух эквивалентных формах, каждая из которых содержит производные от кинематических параметров только по одной координате

$$Bk_1\psi_{,\alpha}-Ak_2\theta_{,\beta}=AB\left[\Delta k\frac{\theta_{,\beta}}{B}+k_1(b\psi-\Delta k\gamma_2-2k_2\omega-a\theta)\right]=$$

$$=AB\left[\Delta k\frac{\psi_{,\alpha}}{A}-k_2(a\theta+\Delta k\gamma_1+2k_1\omega-b\psi)\right]$$

С учетом этих равенств после подстановки выражения для λ в функционал $\tilde{\Phi}$ приходим к новому функционалу

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_s+\Pi$$

где

$$\Phi_1 = u_1 + \Delta\Phi_1, \quad \Phi_2 = u_2 + \Delta\Phi_2$$

$$\Delta\Phi_1 = \frac{1}{2}\iint\left(\omega - \frac{v_\alpha}{B} + \frac{au - bv}{2}\right)\{E^* h(2\omega + au - bv) -$$

$$- D\kappa[\Delta k\gamma_{,\alpha}/A - k_1(a\vartheta + \Delta k\gamma_1 + 2\omega k_1 - b\psi)]\}ABd\alpha d\beta$$

(формула для $\Delta\Phi_2$ записывается аналогично).

Варьирование Φ по всем линейным и угловым смещениям приводит к получению шести разрешающих уравнений в перемещениях. Оператор этих уравнений является суммой двух операторов, каждый из которых предписывает дифференцирование искомых кинематических параметров только по одной из двух криволинейных координат. Описанное преобразование оказывается полезным при использовании покоординатных методов построения вариационно-разностных схем [4], позволяющих ограничиваться в решении двумерных задач одномерными сеточными аппроксимациями. Соответствующей дискретной модели может быть придана конечноэлементная трактовка. Элементами модели оказываются в этом случае одномерные двухузловые объекты—«квазистержни» [5].

ON A TRANSFORMATION OF FUNCTIONAL OF THE SHELL THEORY

O. D. TANANAYKO

ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼԻ ՄԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Օ. Դ. ՏԱՆԱՆԱՅԿՈ

Ամփոփում

Ցույց է տրված թաղանթների տեսության Հելլինգերի ֆունկցիոնալի կոորդինատների անջատման տեսքով գրանցման հնարավորությունը (ընդլայնական սահքի հաշվառման պայմաններում):

Մինիմիզացնող ֆունկցիոնալը ներկայացված է գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից մեկը պարունակում է ածանցյալներ միայն ըստ առաջին կորագիծ կոորդինատի, մյուսը՝ ըստ երկրորդ կոորդինատի, իսկ երրորդը՝ ըստ եզրագծի թաղանթը սահմանափակող աղեղի: Այդ տեսքով գրելը թույլ է տալիս ընտրվող երկչափ խնդրի մոտավոր լուծման մեջ սահմանափակվել միաչափ տարբերական մոտարկումներով:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колкунов Н. В.* Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1972.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1975.
3. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. М.: Судпромгиз, 1961.
4. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
5. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. А. П. Филин, О. Д. Тананайко, И. М. Чернева, М. А. Шварц—Л.: Стройиздат, 1983.

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию
29.XII.1987