ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա 42, № 1, 1989 Механика

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

АНДРЕЕВ А. Н., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В.

В настоящей статье рассмотрен класс линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при исследовании осесимметричного напряженно-деформированного состояния слоистых конструктивно неоднородных анизотропных оболочек вращения. Известно [1—4], что анализ напряженно-деформированного состояния таких оболочек требует привлечения неклассических уравнений, позволяющих учесть анизотропию деформативных свойств, неоднородность жесткостных характеристик материала по слоям, ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, обжатие нормали. Варианты неклассических уравнений теории многослойных и однослойных оболочек, позволяющие в той или иной мере учесть названные факторы, разрабатывались многими авторами [1—8] и др. Для таких дифференциальных уравнений характерны переменность коэффициентов и повышенный порядок; важной их особенностью является существенно больший — во многих случаях на порядок и более, — по сравнению с уравнениями классической теории, спектральный радиус матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений. При этом наибольшие по модулю собственные значения, соответствующие локальным и краевым эффектам напряженно-деформированного состояния, связанным с учетом поперечных сдвигов и обжатия нормали лежат как в левой, так и в правой комплексной полуплоскости. С этим обстоятельством связана резко выраженная в обоих направлениях интегрирования численная неустойчивость [9] дифференциальных уравнений изгиба, приводящая к непригодности для использования таких весьма эффективных в линейных задачах классической теории оболочек численных методов, как метод дискретной ортогонализации, конечноразностный и др. [9—11]. В этой связи являются актуальными разработка, апробация, оценка эффективности специальных алгоритмов численного решения краевых задач для таких систем дифференциальных уравнений.

В настоящей статье численное решение краевой задачи строится методом инвариантного погружения. Сформулирован соответствующий алгоритм, на основном шаге которого осуществляется совместное интегрирование задач Коши для двух жестких матричных дифференциальных уравнений. Метод использован при анализе напряженно-деформированного состояния слоистой круговой цилиндрической консольной оболочки, нагруженной внутренним давлением. Выполнен параметрический анализ напряженно-деформированного состояния и выявлено влияние поперечных сдвиговых деформаций на его характеристики. Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности метода погружения в задачах изгиба слоистых оболочек вращения.

§ 1. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$y' = A(x)y(x) + f(x) \tag{1.1}$$

$$My(0) = a, \quad Ny(1) = b \tag{1.2}$$

Здесь $y(x)$—искомый $2s$-мерный вектор, компонентами которого являются безразмерные кинематические и силовые параметры напряженно-деформированного состояния оболочки, x—безразмерная независимая переменная $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $f(x)$, $A(x)$—соответственно непрерывные $2s$-мерный вектор и $2s \times 2s$ матрица, a, b—числовые s-мерные векторы, M, N—числовые $s \times 2s$ матрицы. Без ограничения общности можно считать, что матрица M имеет вид $M = [E_s, O_s]$, где E_s, O_s—соответственно единичная и нулевая матрицы порядка s. Этого можно добиться должной нумерацией координат вектора y. Будем использовать блочное представление матрицы $A(x)$, векторов $y(x)$, $f(x)$

$$A(x) = \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

где $y_i(x)$, $f_i(x)$, $A_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$—соответственно s-мерные векторы и матрицы порядка s. Аналогичные представления будем использовать для других векторов и матриц. Предполагаем существование и единственность решения краевой задачи (1.1), (1.2).

Следуя [12], рассмотрим погружение задачи (1.1), (1.2) в однопараметрическое семейство краевых задач с параметром погружения t (t—длина промежутка интегрирования)

$$y'(x, t) = A(x)y(x, t) + f(x), \quad My(0, t) = a, \quad Ny(t, t) = b$$

и рассмотрим две вспомогательные задачи

$$V'(x, t) = A(x)V(x, t) \tag{1.3}$$

$$MV(0, t) = O_s, \quad RV(t, t) = E_s \tag{1.4}$$

$$z'(x, t) = A(x)z(x, t) + f(x) \tag{1.5}$$

$$Mz(0, t) = a, \quad Rz(t, t) = b \tag{1.6}$$

Здесь $V(x, t)$, $z(x, t)$—соответственно $2s \times s$ матрица и $2s$-мерный вектор

$$V(x, t) = \begin{bmatrix} V_1(x, t) \\ V_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad z(x, t) = \begin{bmatrix} z_1(x, t) \\ z_2(x, t) \end{bmatrix}$$

R—$s \times 2s$—числовая матрица вида $R = [O_s, E_s]$. Ясно, что решение краевой задачи (1.1), (1.2) представимо в форме

$$y(x)=y(x,1)=V(x,1)c+z(x,1) \tag{1.7}$$

где c—постоянный s-мерный вектор, определяемый из краевого условия (1.2) в точке $x=1$.

Исследуем зависимость решения $V(x,t)$ краевой задачи (1.3), (1.4) от параметра погружения t при фиксированном $x \in [0,1]$. Дифференцируя по t обе части равенств (1.3), (1.4), приходим к краевой задаче для матрицы $V_t(x,t)$

$$V'_t(x,t)=A(x)V_t(x,t),\quad MV_t(0,t)=O_s,\quad RV_t(t,t)=-RV'(t,t) \tag{1.8}$$

Сопоставляя линейные краевые задачи (1.3), (1.4) и (1.8), приходим на основании принципа суперпозиции к дифференциальному уравнению по параметру погружения t для матрицы $V(x,t)$

$$V_t(x,t)=-V(x,t)RV'(t,t)=-V(x,t)(A_{21}(t)V_1(t,t)+A_{22}(t)V_2(t,t)) \tag{1.9}$$

Это матричное дифференциальное уравнение интегрируется по t на отрезке $[x,1]$ при начальном условии $V(x,t)|_{t=x}=V(x,x)$. Положим $U(t)=V(t,t)$ и установим дифференциальное уравнение для определения $2s\times s$ матрицы $U(t)$. Используя (1.3), (1.9), находим нужное уравнение

$$\frac{dU}{dt}=V'(t,t)+V_t(t,t)=A(t)U(t)-U(t)(A_{21}(t)U_1(t)+A_{22}(t)U_2(t))$$

Представим это матричное дифференциальное уравнение в виде системы двух уравнений относительно $s\times s$ матриц $U_1(t)$, $U_2(t)$

$$\frac{dU_k}{dt}=A_{k1}(t)U_1(t)+A_{k2}(t)U_2(t)-U_k(t)(A_{21}(t)U_1(t)+A_{22}(t)U_2(t)) \tag{1.10}$$

($k=1,2$). Второе из краевых условий (1.4) требует

$$U_2(t)=E_s \tag{1.11}$$

Легко проверить, что матрица $U_2(t)$, определенная формулой (1.11), удовлетворяет (при произвольной $s\times s$ матрице $U_1(t)$) второму уравнению системы (1.10).

Первое же уравнение этой системы запишется в виде

$$\frac{dU_1}{dt}=A_{12}(t)+A_{11}(t)U_1(t)-U_1(t)(A_{22}(t)+A_{21}(t)U_1(t)) \tag{1.12}$$

Переходя к пределу при $t\to 0$ в первом из краевых условий (1.4), получаем начальное условие для матричного дифференциального уравнения Риккати (1.12)

$$U_1(0)=O_s \tag{1.13}$$

Исследуем теперь зависимость решения $z(x,t)$ краевой задачи (1.5), (1.6) от параметра погружения t при фиксированном $x\in[0,1]$. Дифференцируя обе части равенств (1.5), (1.6) по t и сравнивая результат дифференцирования с краевой задачей (1.3), (1.4), приходим на основании принципа суперпозиции к дифференциальному уравнению по t для вектора $z(x,t)$

$$z_t(x,t)=-V(x,t)Rz'(t,t)=-V(x,t)(A_{21}(t)z_1(t,t)A_{22}(t)z_2(t,t)+f_2(t)) \quad (1.14)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется на отрезке $[x,1]$ при начальном условии $z(x,t)|_{t=x}=z(x,x)$. Положим $W(t)=z(t,t)$ и установим дифференциальное уравнение для определения $2s$-мерного вектора $W(t)$. Используя (1.5), (1.14), выводим требуемое уравнение

$$\frac{dW}{dt}=z'(t,t)+z_t(t,t)=A(t)W(t)+f(t)-U(t)(A_{21}(t)W_1(t)+$$
$$+A_{22}(t)W_2(t)+f_2(t)) \quad (1.15)$$

Второе из краевых условий (1.6) требует

$$W_2(t)=0 \quad (1.16)$$

Представив уравнение (1.15) в виде системы двух дифференциальных уравнений относительно s-мерных векторов $W_1(t)$, $W_2(t)$, убеждаемся, что вектор $W_2(t)$, определенный формулой (1.16), удовлетворяет (при произвольном $W_1(t)$) второму уравнению этой системы. Первое же уравнение этой системы запишется в виде

$$\frac{dW_1}{dt}=f_1(t)+A_{11}(t)W_1(t)-U_1(t)(f_2(t)+A_{21}(t)W_1(t)) \quad (1.17)$$

Переходя к пределу при $t\to 0$ в первом из краевых условий (1.16), получаем начальное условие для уравнения (1.17)

$$W_1(0)=a \quad (1.18)$$

Введем $s\times(s+1)$ матрицы $\bar{A}_{12}(t)$, $\Lambda(t)$, Λ_0, Λ_1

$$\bar{A}_{12}(t)=[A_{12}(t),\ f_1(t)],\quad \Lambda(t)=[U_1(t),\ W_1(t)],\quad \Lambda_0=[O_s,a],\quad \Lambda_1=[E_s,0],$$

$(s+1)\times s$ матрицу $\bar{A}_{21}(t)$ и $(s+1)\times(s+1)$ матрицу $\bar{A}_{22}(t)$

$$\bar{A}_{21}(t)=\begin{vmatrix} A_{21}(t) \\ 0 \end{vmatrix},\quad \bar{A}_{22}(t)=\begin{vmatrix} \bar{A}_{22}(t), & f_2(t) \\ 0\ , & 0 \end{vmatrix}$$

и, наконец, $2s\times(s+1)$ матрицы $\bar{V}(x,t)$, $P(t)$

$$\bar{V}(x,t)=[V(x,t),\ z(x,t)],\quad P(t)=\begin{vmatrix} \Lambda(t) \\ \Lambda_1 \end{vmatrix}$$

полученные путем дополнения первоначальных матриц соответствующими строчками и столбцами. Задачи Коши (1.12), (1.13) и (1.17), (1.18) можно сформулировать теперь как задачу Коши для определения $s\times(s+1)$ матрицы $\Lambda(t)$

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\bar{A}_{12}(t)+A_{11}(t)\Lambda(t)-\Lambda(t)(A_{22}(t)+\bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)),\quad \Lambda(0)=\Lambda_0\quad (0\leqslant t\leqslant 1) \quad (1.19)$$

Допускают совместную запись и уравнения (1.9), (1.14)

$$\bar{V}_t(x, t) = -\bar{V}(x, t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)) \qquad (1.20)$$

Дифференциальное матричное уравнение (1.20) интегрируется на отрезке $[x, 1]$ при начальном условии

$$\bar{V}(x, t)|_{t=x} = P(x) \qquad (1.21)$$

Заметим, что уравнение (1.20) линейно и однородно относительно искомой матрицы $\bar{V}$ и распадается на $2s$ независимых между собой систем дифференциальных уравнений, каждая из которых связывает между собой лишь $s+1$ элементов соответствующей строки матрицы $\bar{V}$. Кроме того, матрицы коэффициентов всех этих $2s$ линейных систем совпадают между собой. Это позволяет вместо задачи Коши (1.20), (1.21) рассмотреть задачу Коши

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi(t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), \quad \Phi|_{t=x} = E_{s+1} \qquad (1.22)$$

для $(s+1)\times(s+1)$ матрицы Φ. Решение задачи Коши (1.22) будем обозначать через $\Phi(t; x)$. В произвольной точке $t\in[x, 1]$ матрица $\bar{V}(x, t)$—решение задачи Коши (1.20), (1.21)—может быть найдена по формуле

$$\bar{V}(x, t) = P(x)\Phi(t; x)$$

Пусть $Q = [0, \ldots, 0, 1]$—$(s+1)$-мерный вектор. Легко убедиться, что матрица $\Phi(t; x)$ имеет следующее строение:

$$\Phi(t; x) = \begin{vmatrix} \Psi(t; x) \\ Q \end{vmatrix} \qquad (1.23)$$

и поэтому достаточно рассмотреть задачу Коши

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\Psi(t)(\bar{A}_{22}(t) + \bar{A}_{21}(t)\Lambda(t)), \quad \Psi|_{t=x} = \Lambda_1 \qquad (1.24)$$

для $s\times(s+1)$ матрицы Ψ. Отметим еще, что если $0\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_m<1$ — конечная возрастающая последовательность точек промежутка $[0,1]$ и $\Phi(t; x_1), \ldots, \Phi(t; x_m)$— решения задач Коши (1.22) с начальными условиями, заданными в точках $t = x_1, \ldots, t = x_m$ соответственно, то при $1\geqslant t\geqslant x_m$ справедлива формула

$$\Phi(t; x_1) = \Phi(x_2; x_1)\Phi(x_3; x_2)\ldots\Phi(x_m; x_{m-1})\Phi(t; x_m)$$

Пусть требуется построить решение $y(x)$ краевой задачи (1.1), (1.2) в точках $0 = x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$. Процесс численного определения искомых величин $y(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ методом инвариантного погружения осуществляется в несколько шагов.

1) Проинтегрировать на отрезке $[0, 1]$ задачу Коши (1.19) совместно с уравнением (1.24), строя в процессе интегрирования матрицы $\Lambda(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ и $\Psi(x_{i+1}; x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$.

2) Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$NU(1)c = b - NW(1)$$

получающуюся в результате подчинения решения $y(x)$ в форме (1.7) краевому условию (1.2) в точке $x=1$.

3) При $i=n$, $n-1$, ..., 0 осуществить следующие операции:

а) Если $i<n$, то по формуле (1.23) восстановить матрицу $\Phi(x_{i+1}; x_i)$.

б) Сформировать $(s+1)\times(s+1)$ матрицу M_i

$M_i=E_{s+1}$ $(i=n)$, $M_i=\Phi(x_{i+1}; x_i)M_{i+1}$ $(i=n-1, n-2, ..., 0)$

в) Восстановить матрицу $\overline{V}(x_i, 1)$

$$\overline{V}(x_i, 1)=P(x_i)M_i$$

г) Вычислить решение $y(x_i)$ по формуле (1.7).

Метод требует запоминания $n+1$ $s\times(s+1)$ матриц $\Lambda(x_i)$ $(i=0, 1, ..., n)$ и n $s\times(s+1)$ матриц $\Psi(x_{i+1}; x_i)$ $(i=0, 1, ..., n)$. При не слишком мелком разбиении отрезка [0, 1] (например, для уравнений, предложенных в [5], не слишком мелкими могут считаться разбиения, содержащие до нескольких сотен точек) для запоминания матриц Λ, Ψ достаточно оперативной памяти ЭВМ БЭСМ—6.

Сформулированный алгоритм близок по структуре к алгоритмам, приведенным в [12, 13]. Однако, в отличие от [12] в данном алгоритме размерность решаемой системы дифференциальных уравнений не связана с числом точек разбиения отрезка [0, 1] и не растет при увеличении их числа, а в отличие от алгоритма [13] здесь нет необходимости в интегрировании задачи Коши в обратном направлении.

Расчеты, выполненные для некоторых слоистых оболочек вращения распространенных геометрических форм с использованием уравнений изгиба [5], показали, что спектральный радиус якобиана правой части системы дифференциальных уравнений (1.19), (1.24) и спектральный радиус матрицы коэффициентов первоначальной системы уравнений изгиба—величины одного порядка. Собственные числа якобиана характеризуются большим разбросом и, что существенно, все лежат в левой комплексной полуплоскости. Такие системы дифференциальных уравнений проявляют свойства жесткости [9, 14]. Их устойчивое численное решение классическими явными методами Рунге-Кутта, Адамса и др. возможно лишь при существенном ограничении на шаг интегрирования

$$|\lambda h|<\text{const}$$

и при большой жесткости системы должно осуществляться специальными неявными методами [9, 14—16]. В то же время следует отметить, что в процессе интегрирования уравнений (1.19), (1.24) при достижении очередной точки x_i для дифференциального уравнения (1.24) требуется ставить новое начальное условие, что приводит к возврату в зону погранслоя [14]. Если разбиение $0=x_0<x_1<...<x_n=1$ отрезка [0, 1] имеет малый диаметр, то это обстоятельство может обесценить основное преимущество неявных методов решения жестких задач, состоящее в возможности существенного увеличения шага интегрирования после прохождения зоны погранслоя. В таких ситуациях оправдано применение явных методов с достаточно малым шагом

интегрирования, обеспечивающим устойчивость вычислительного процесса.

§ 2. В качестве примера использования сформулированного алгоритма рассмотрим задачу осесимметричного изгиба композитной слоистой круговой цилиндрической консольной оболочки толщины h, радиуса R и длины l, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением интенсивности P. При анализе напряженно-деформированного состояния используем уравнения изгиба [5], позволяющие учесть деформации поперечных сдвигов. В рассматриваемом случае эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{dT_{xx}}{dx}=0, \qquad \frac{d^2M_{xx}}{dx^2}-\frac{T_{\varphi\varphi}}{R}=-P, \quad \frac{dS_{xx}}{dx}-Q_x=0 \tag{2.1}$$

Здесь x—расстояние, отсчитываемое от края оболочки вдоль образующей, φ—угловая координата, T_{xx}, $T_{\varphi\varphi}$, M_{xx}, S_{xx}, Q_x—интегральные характеристики напряженного состояния [5]. Введем безразмерный вектор $y(\xi)$ $(\xi=x/l)$ кинематических и силовых параметров напряженно-деформированного состояния

$$y(\xi)=\left[W, \frac{dW}{d\xi}, U, \Pi, T^*_{xx}, M^*_{xx}, \frac{dM^*_{xx}}{d\xi}, S^*_{xx}\right]^T \tag{2.2}$$

где $W=E_1^c w/Ph$, $U=E_1^c u_x/Pl$, $\Pi=h^3\pi_1/Pl$—соответственно безразмерные прогиб, осевое смещение точек отсчетной поверхности, функция сдвигов [5], T^*_{xx}, M^*_{xx}, S^*_{xx}—безразмерные усилия и моменты, E_1^c—модуль Юнга связующего первого (нижнего) слоя оболочки. В переменных (2.2) уравнения (2.1) вместе с соотношениями упругости и соотношениями деформации—перемещения [5] образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка, которую представим в виде

$$\frac{dy}{d\xi}=Ay(\xi)+f \tag{2.3}$$

Элементы 8×8 матрицы A и вектора f постоянны и приведены (при другой нумерации координат вектора y) в [5]. Краевые условия, соответствующие выбранному типу закрепления, имеют вид

$$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=y_4(0)=y_5(1)=y_6(1)=y_7(1)=y_8(1)=0 \tag{2.4}$$

С целью прояснения характера вычислительных трудностей, возникающих при интегрировании краевой задачи (2.3), (2.4), например, методом дискретной ортогонализации [10], выполнено параметрическое исследование спектрального радиуса матрицы A для случая трехслойной цилиндрической оболочки с однородными изотропными слоями, а также следующих матриц: B—6×6 матрица коэффициентов классической системы дифференциальных уравнений осесимметричного изгиба трехслойной цилиндрической оболочки; C—аналогичная 6×6 матрица системы уравнений изгиба, базирующихся на гипотезе прямой линии [8]; D—8×8 матрица коэффициентов системы уравнений изгиба, базирующихся на допущении о квадратичном по нормальной координате z законе распределения сдвиговых поперечных деформаций в заполнителе и равенстве их нулю—в несущих слоях [2].

В табл. 1 в зависимости от параметра E_1/E_2 приведены спектральные радиусы R_B, R_C, R_D, R_A указанных матриц. Результаты получены для трехслойной оболочки симметричного строения ($E_1=E_3$) при следующих значениях параметров: $t_1=t_3=0.1\,h$, $t_2=0.8\,h$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$, $R/h=20$, $R/l=1$ (t_i, ν_i, E_i – соответственно толщина, коэффициент Пуассона, модуль Юнга i-го слоя). Из табл. 1 видно, что величины R_A, R_D (наибольшие по модулю собственные значения матриц A, D действительны) более чем на порядок превышают величины R_B, R_C. Кроме того, собственные числа расположены в комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси. Поэтому для системы уравнений (2.3) (и аналогичной ей системы с матрицей коэффициентов D) свойство численной неустойчивости в обоих направлениях интегрирования проявляется в весьма существенной мере, в то время как для дифференциальных уравнений изгиба с матрицами коэффициентов B и C это свойство выражено лишь умеренно. На этом основании можно сделать вывод (подтверждающийся и расчетным путем), что при указанных значениях параметров, задачи изгиба, рассмотренные в классической постановке и в рамках гипотезы прямой линии могут быть успешно решены, например, методом дискретной ортогонализации, в то время как для задачи (2.3), (2.4) этот метод совершенно непригоден. Этот вывод справедлив и для композитных оболочек.

Таблица 1

E_1/E_2	1	10	15	20	25	30	35	40	45
R_B	8.03	6.82	6.70	6.64	6.60	6.57	6.55	6.54	6.53
R_C	8.03	6.82	6.70	6.64	6.60	6.57	6.55	6.54	6.53
$10^{-2}R_D$	2.93	1.85	1.64	1.56	1.46	1.38	1.31	1.25	1.20
$10^{-2}R_A$	3.43	1.89	1.70	1.58	1.47	1.39	1.32	1.26	1.20

Решение краевой задачи (2.3), (2.4) для композитной оболочки получено методом погружения. При вычислениях использовалась модель армированного слоя волокнистой структуры, предложенная в [17]. В рамках этой модели эффективные упругие постоянные $a_{ij}^{(k)}$ k-го слоя представимы в виде $a_{ij}^{(k)}=E_k^c b_{ij}^{(k)}$, где E_k^c (E_k^a)—модуль Юнга связующего (армирующих элементов) k-го слоя, а величины $b_{ij}^{(k)}$ определяются расчетным путем, являясь функциями структурных параметров армирования, коэффициентов Пуассона связующего и армирующих элементов, параметра E_k^c/E_k^a. Отметим также, что уравнения этой модели позволяют при известных средних напряжениях и деформациях представительного элемента k-го слоя определить напряжения и деформации в связующем и армирующих элементах и, тем самым, оценить эффективность их работы.

Будем называть [18] нагрузкой начального «разрушения» композитной оболочки то предельное значение интенсивности давления P, при котором в связующем или армирующих элементах впервые хотя бы в одной точке выполняется условие Мизеса

$$\max_{0\leq x\leq l,\, 0\leq z\leq h}\left[\sigma^2_{xxc(a)}+\sigma^2_{\varphi\varphi c(a)}-\sigma_{xxc(a)}\,\sigma_{\varphi\varphi c(a)}+3\tau^2_{xzc(a)}\right]=k^2_{c(a)} \tag{2.5}$$

где $k_{c(a)}$ — предел текучести при растяжении связующего (c) или армирующих элементов (a). Обозначив через P_c^*, P_a^* нагрузку начального „разрушения" связующего (армирующих элементов), получим следующую формулу для определения P^*

$$P^*=\min(P_c^*,P_a^*)$$

Пусть, далее, P_{*c}, P_{*a}, P_* — аналогичные величины, найденные при использовании уравнений классической теории оболочек [1] по критерию (2.5), в котором поперечное сдвиговое напряжение τ_{xz} определяется из дифференциального уравнения равновесия в напряжениях.

В первых строчках табл. 2 в зависимости от параметра q приведены результаты расчета максимального прогиба W^* и нагрузок начального „разрушения" P_c^*, P_a^*. В последних трех строчках табл. 2 приведены те же величины, найденные по уравнениям классической теории. Зависимости получены для двухслойной композитной оболочки со слоями равной толщины, первый из которых армирован в осевом направлении, второй — в окружном. Модули Юнга связующего (армирующих элементов) обоих слоев считались равными между собой $E_1^c=E_2^c$ $(E_1^a=E_2^a)$ и полагалось $q=E_1^a/E_1^c$. Коэффициенты Пуассона всех материалов считались равными 0,3; остальные параметры имели значения $R/h=15$, $R/l=1.5$, $\omega_1=\omega_2=\omega_{z1}=\omega_{z2}=0.5$ (ω_i, ω_{zi} — интенсивности армирования в плоскости слоя и по высоте [17]).

Таблица 2

q	2	5	10	15	20	25	30	35	40
$10^{-2}W^*$	2,170	1,594	1,147	0,900	0,736	0,622	0,534	0,474	0,423
$10\frac{P_c^*}{k_c}$	0,262	0,275	0,327	0,382	0,440	0,497	0,560	0,615	0,676
$10^2\frac{P_a^*}{k_a}$	1,735	0,948	0,654	0,548	0,490	0,454	0,427	0,410	0,395
$10^{-2}W_*$	2,192	1,612	1,161	0,912	0,746	0,630	0,541	0,480	0,428
$10\frac{P_{*c}}{k_c}$	0,378	0,383	0,431	0,480	0,529	0,576	0,626	0,668	0,714
$10^2\frac{P_{*a}}{k_a}$	2,555	1,498	1,105	0,960	0,878	0,821	0,783	0,756	0,733

Из табл. 2 видно, что в рассмотренном примере относительная погрешность от неучета поперечных сдвигов в определении максимальных прогибов невелика и не превышает 1.35%. В то же время различие в результатах расчета нагрузок начального «разрушения», найденных при учете и без учета сдвигов существенно. Так, например, при $q=40$ величина P_a^* почти в два раза меньше величины P_{*a}. Существенно, что учет влияния сдвига приводит к снижению обеих нагрузок P_s, P_c' и, следовательно, к снижению нагрузки начального „разрушения“ P^* композитной оболочки. Отметим еще, что „разрушение“ связующего (армирующих элементов) начинается в защемленном сечении $\xi=0$ консольной оболочки на ее верхней (нижней) лицевой поверхности от осевых напряжений.

Так как матрица A системы дифференциальных уравнений (2.3) постоянна, то максимальные прогибы и «разрушающие» нагрузки можно найти и другим путем—путем построения аналитического решения краевой задачи (2.3), (2.4). Расчеты выявили полное совпадение полученных при этом результатов. Учитывая, что на структуре представленного алгоритма не сказывается переменность коэффициентов уравнений изгиба можно сделать вывод (подтверждающийся и расчетным путем) об эффективности метода погружения в задачах изгиба различных классов оболочек вращения—композитных, переменной жесткость, со сложной формой меридиана и др.

NUMERICAL ANALYSIS OF ROTATION SANDWICH SHELLS STRESS—STRAIN STATE BY INVARIANT IMBEDDING METHOD

A. N. ANDREEV, Yu. V. NEMIROVSKY

ԾԵՐՏԱՎՈՐ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԻ ԹՎԱՅԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԸՆԴԳՐԿՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա. Ն. ԱՆԴՐԵԵՎ, ՅՈՒ. Վ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ

Ամփոփում

Քննարկված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար գծային եզրային խնդիրների դասը, որոնք առաջանում են շերտավոր պտտման թաղանթների առանցքասիմետրիկ լարվածային-դեֆորմացված վիճակի հետազոտման ժամանակ, որը կատարվում է ընդլայնական սահքերի դեֆորմացիան հաշվի առնել թույլ տվող ծռման ու դասական հավասարումների բազայի վրա։

Հաղթահարելու համար այդպիսի եզրային խնդիրների թվային լուծման դժվարությունները, որոնք պայմանավորված են ծռման դիֆերենցիալ հավասարումների խիստ արտահայտված անկայունությամբ ինտեգրման երկու ուղղություններով էլ, օգտագործվում է ինվարիանտ ընկղման մեթոդը։

Ձևակերպված է համապատասխան ալգորիթմ, որի հիմնական քայլում իրականացվում է երկու կոշտ մատրիցային դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշի խնդիրների համատեղ ինտեգրումը։ Մեթոդի արդյունավետությունը ցույց է տրված կոնկրետ օրինակի վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
3. *Дудченко А. А., Лурье С. А., Образцов И. Ф.* Анизотропные многослойные пластины и оболочки.—В кн.: Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1983, т. 15, с. 3—68.
4. *Немировский Ю. В., Резников Б. С.* Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 165 с.
5. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* К теории упругих многослойных анизотропных оболочек.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1977, № 5, с. 87—96.
6. *Григолюк Э. И., Чулков П. П.* Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким заполнителем.—Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, с. 68—80.
7. *Рассказов А. О.* К теории многослойных ортотропных пологих оболочек.—Прикл. механика, 1976, т. 12, № 11, с. 50—56.
8. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
9. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. М.: Мир, 1979. 312 с.).
10. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.—Успехи матем. наук, 1961, т. 16, № 3, с. 171—174.
11. *Григоренко Я. М.* Решение задач теории оболочек методами численного анализа.—Прикл. механика, 1984, т. 20, № 10, с. 3—22.
12. *Касти Дж., Калаба Р.* Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976. 223 с.
13. *Meyer Gunter H.* Initial Value Methods for Boundary Value Problems. Theory and Application of Invariant Imbedding.—New York and London, Academic Press, 1973.—220 p.
14. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
15. *Артемьев С. С., Демидов Г. В.* А—устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.—В кн.: Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1975, с. 214—220.
16. *Gear C. W.* Algorithm 407. Difsub for Solution of Ordinary Differential Equations.—Comm. Assoc. Comput. Mach., 1971, v. 14, № 3, p. 185—190.
17. *Немировский Ю. В.* К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин.—Механика полимеров, 1972, № 5, с. 861—873.
18. *Немировский Ю. В.* Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя.—Журнал прикл. механики и техн. физики, 1969, № 5, с. 81—89.

Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР

Поступила в редакцию
24.III.1988