ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա 42, № 1, 1989

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МАГНИТОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

АХИНЯН Ж. О.

Рассматривается линейная плоская задача о движении магнитоупругой среды, занимающей нижнее полупространство и граничащей с верхним полупространством, занятым диэлектриком (воздухом).

Указанная задача по определению напряжений, в линейной и нелинейных постановках, решена в [1].

По границе полупространств распространяется ударная волна. Начальное магнитное поле однородно и перпендикулярно к границе раздела сред. Для простоты считается, что давление за фронтом на границе изменяется по времени периодически с частотой ω, хотя полученные результаты—расчет вида скорости поверхностной волны—остаются без изменения для произвольного распределения $p_1(x, t)$.

Уравнения движения магнитоупругой среды в плоской задаче при начальном магнитном поле B_0, направленном по оси y, имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (a^2+a_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(b^2+a_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(a^2-b^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{1}$$

где a, b, a_1—скорости продольных, поперечных и альфвеновских волн, u, v—компоненты вектора перемещения по x, y.

Граничные условия на поверхности $y=0$ имеют вид [1]

$$\begin{aligned} b^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}B_0 b_x &= \frac{1}{4\pi\rho}B_0 b_x^{\prime} \\ (a^2-2b^2)\frac{\partial u}{\partial x}+a^2\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{p_1(x, t)}{\rho} \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть соотношения

$$X_{1,2}=\frac{x}{V}+\beta_{1,2}\left(\frac{1}{V}\right)y-t=0 \tag{3}$$

определяют уравнения быстрой и медленной магнитоупругих волн, причем $\alpha=\frac{1}{V}$ и $\beta_{1,2}(\alpha)$—корни дисперсионного уравнения плоских волн для (1).

Как показано в [1]

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{q \pm \left| q^2 - 4a^2(b^2 + a_1^2)(1 - b^2 v^{-2})\left(1 - \frac{a^2 + a_1^2}{V^2}\right)\right|^{1/2}}{2a^2(b^2 + a_1^2)}$$

где

$$q = a^2 + b^2 + a_1^2 - (a_1^2 b^2 + a^2 a_1^2 + 2a^2 b^2)V^{-2}$$

Введем переменные

$$V_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad V_4 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_5 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad v_6 = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_4}{\partial y} = \frac{\partial v_5}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_4}{\partial t} = \frac{\partial v_6}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = (a^2 + a_1^2)\frac{\partial v_1}{\partial x} + (b^2 + a_1^2)\frac{\partial v_2}{\partial y} + (a^2 - b^2)\frac{\partial v_4}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_6}{\partial t} = (a^2 - b^2)\frac{\partial v_1}{\partial y} + v^2 \frac{\partial v_4}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v_5}{\partial y}$$

Из условия равенства компонент полных напряжений при $y=0$, учитывая, что в магнитоупругой среде

$$b_x = B_0 \frac{\partial u}{\partial y}; \qquad b_y = -B_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

и в диэлектрике

$$b'_x = B_x \exp\left| i\omega\left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v}\right)\right|$$

$$b'_y = B_y \exp\left| i\omega\left(t - \frac{x}{v} - \frac{iy}{v}\right)\right|, \quad B_x + iB_y = 0$$

можно получить при $y=0$ следующие соотношения:

$$(b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - \frac{B_0}{4\pi\rho} B_x = 0$$

$$B_y = -B_0(U_1 + V_1); \quad B_x = iB_0(U_1 + V_1)$$

$$(b^2 + a_1^2)(U_2 + V_2) + b^2(U_4 + V_4) - ia_1^2(U_1 + V_1) = 0 \tag{6}$$

$$(a^2 - 2b^2)(U_1 + V_1) + a^2(U_5 + V_5) = -\frac{P}{\rho}$$

$$P_1(x, t) = p_1 \exp(i\omega(sV^{-1} - t))$$

Решение уравнений (6) запишется в следующем виде:

$$DU_6 = \frac{P_1}{\rho}\left| V(1 - b^2 V^{-2} - a^2\beta_2^2)\left(b^2 + a_1^2 - \frac{ia_1^2}{V\beta_2}\right) + V^{-1}b^2(a^2 - b^2)\right|$$

где

$$D=\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})+a^2b^2\beta_1^2}{\beta_1}\Big|\frac{V(1-b^2V^{-2}-a^2\beta_2^2)(b^2+a_1^2)}{a^2-b^2}+$$

$$+b^2V^{-1}\Big|-\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})+a^2b^2\beta_2^2}{\beta_2}\Big|\frac{V(1-b^2V^{-2}-a^2\beta_1^2)(b^2+a_1^2)}{a^2-b^2}+$$

$$+b^2V^{-1}\Big|-\frac{ia_1^2}{\beta_1\beta_2}a^2(1-b^2V^{-2})(\beta_1^2-\beta_2^2)$$

Считая a_1^2/a^2 малой величиной и полагая

$$\beta_1^2=\beta_{1,0}^2+a_1^2\beta_1^{(1)};\ \beta_2^2=\beta_{2,0}^2+a_1^2\beta_2^{(1)};\ \beta_{1,0}^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{V^2};\ \beta_{2,0}^2=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}$$

можно получить в главном порядке

$$\beta_1^{(1)}=-\frac{1}{a^2V^2};\quad \beta_2^{(1)}=-\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{V^2}\right)$$

$$\beta_1=\beta_{1,0}+\frac{1}{2}a_1^2\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}};\quad \beta_2=\beta_{2,0}+\frac{1}{2}a_1^2\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}}$$

Тогда получится с той же точностью

$$D=\frac{a^2-b^2}{\beta_{1,0}}V[-(1-2b^2V^{-2})^2-4\beta_{1,0}\beta_{2,0}b^4V^{-2}]+\gamma a_1^2+\delta a_1^2$$

где

$$\gamma=\Big|\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})}{\beta_{1,0}}+a^2b^2\beta_{1,0}\Big|\Big(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}-$$

$$-V\frac{a^2}{a^2-b^2}\beta_{2,0}^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_2^{(1)}\Big)-\Big|\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})\beta_1^{(1)}}{2\beta_{1,0}^2}-$$

$$-\frac{1}{2}a^2b^2\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_{1,0}}\Big|\Big(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}b^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_{2,0}^2+\frac{1}{V}b^2\Big)-$$

$$-\Big|\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})}{\beta_{2,0}}+a^2b^2\beta_{2,0}\Big|\Big(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}-V\frac{a^2\beta_{1,0}^2}{a^2-b^2}-$$

$$-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_1^{(1)}\Big)+\Big[\frac{(a^2-2b^2)(1-b^2V^{-2})\beta_2^{(1)}}{2\beta_{2,0}^2}-\frac{1}{2}a^2b^2\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_{2,0}}\Big]\times$$

$$\times\Big(V\frac{1-b^2V^{-2}}{a^2-b^2}b^2-V\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\beta_{1,0}^2+\frac{1}{V}b^2\Big)$$

$$\delta=\frac{1-b^2V^{-2}}{\beta_{1,0}\beta_{2,0}b^2}(a^2-b^2);\quad V=\frac{1}{\alpha}$$

Волны Релея получаются из условия $D=0$, при этом можно считать движение свободным или полагать $P_1=0$.

Запишем, что $\alpha=\alpha_0+a_1^2\alpha_1$, где $\alpha_0=\frac{1}{c_R}$, c_R—есть скорость обычных волн Релея. Известно, что $c_R = 0{,}96\, b$.

$$(1-2b^2\alpha_0^2)^2 + 4\beta_{1,0}(\alpha_0)\beta_{2,0}(\alpha_0)b^4\alpha_0^2 = 0$$

$$\beta_{1,0}^2(\alpha_0) = \frac{1}{a^2} - \alpha_0^2, \quad \beta_{2,0}^2(\alpha_0) = \frac{1}{b^2} - \alpha_0^2$$

Следует найти α_1. Из уравнения $D=0$ имеем

$$a_1^2\alpha_1 \left[\frac{1}{\left(\alpha_0^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{1/2}} \left(-\frac{1}{\alpha_0^2} - 4b^2 + 12b^4\alpha_0^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(\alpha_0^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}} \left(-1 + 4b^2\alpha_0^2 - 4b^4\alpha_0^4 \right) \right] = \frac{i\chi a_1^2 - \lambda a_1^2}{a^2 - b^2}$$

Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 + i\alpha_3$, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{i\chi(\alpha_0) - \lambda(\alpha_0)}{A(\alpha_0)}$$

где

$$i\chi(\alpha_0) - \lambda(\alpha_0) = B(\alpha_0)$$

$$B(\alpha_0) = \frac{a(1-2b^2\alpha_0^2)(3a^2\alpha_0^2 - 2a^2b^2\alpha_0^4 - b^2\alpha_0^2 + 2b^4\alpha_0^4 - 2)}{2\alpha_0(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} -$$

$$- \frac{2\alpha_0 b(1-b^2\alpha_0^2)(a^2-b^2)}{(\alpha_0^2 b^2 - 1)^{1/2}} + \frac{a(1-b^2\alpha_0^2)(a^2-b^2)}{b(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{1/2}(\alpha_0^2 b^2 - 1)^{1/2}}$$

$$A(\alpha_0) = \frac{a}{\alpha_0^2(\alpha_0^2 a^2 - 1)^{3/2}} (8b^4a^2\alpha_0^6 - 12b^4\alpha_0^4 + 4b^2\alpha_0^2 - 2a^2\alpha_0^2 + 1)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{a_1^2\alpha_1}{\alpha_0^2} = \frac{1}{\alpha_0} - \frac{a_1^2}{\alpha_0^2} \frac{1}{a^2 - b^2} \frac{B(\alpha_0)}{A(\alpha_0)}$$

или

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_0}\left(1 - \frac{a_1^2}{a^2} K\right)$$

где

$$K = \frac{1}{\alpha_0\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} \frac{B(\alpha_0)}{A(\alpha_0)};$$

Таким образом, показано, что с точностью до малых порядка a_1^2, решение уравнения $D=0$, $1/\alpha$ есть вещественное число и затухание поверхностных волн отсутствует.

Для произвольных a_1 требуется более подробное рассмотрение.

Если $V<b$, то $1-b^2V^{-2}<0$ и $1-(a^2+a_1^2)V^{-2}<0$.

Тогда для квадрата подкоренного значения в $\beta_{1,2}$ получается

$$(b^2a_1^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^4}-2(a^2+b^2+a_1^2)(a_1^2b^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^2}+(a^2-b^2-a_1^2)^2=$$

$$=(b^2a_1^2-a^2a_1^2)\frac{1}{V^2}(b^2a_1^2V^{-2}-a^2a_1^2V^{-2}-2a^2-2b^2-2a_1^2)+(a^2-b^2-a_1^2)^2>0 \quad (7)$$

так как $b^2a_1^2-a^2a_1^2<0$ и $b^2a_1^2V^{-2}-a^2a_1^2V^{-2}-2a^2-2b^2-2a_1^2<0$.

Так как дискриминант (7)

$$\Delta=(a^2+b^2+a_1^2)^2(b^2-a^2)^2a_1^4-(b^2-a^2)^2(a^2-b^2-a_1^2)^2a_1^4>0,$$

то существуют действительные корни V_1^2 и V_2^2 (7) такие, что

$$1/V^2<1/V_1^2 \text{ и } 1/V^2>1/V_2^2$$

С другой стороны, когда $V<b$, то $|q|>\sqrt{\Delta}$ и $q<0$, и следовательно, $\beta_{1,2}$—мнимые. Отсюда следует, что уравнение $Di=0$ для V имеет вещественные коэффициенты.

Обозначая $\gamma=1/V$, можно записать $iD(\gamma)=0$.

При $\gamma=1/b$ получается $\beta_{1,2}^2=\dfrac{q\mp q}{2a^2(b^2+a_1^2)}$

$$\text{то есть } \beta_1=0, \quad \beta_2=\frac{i}{ab}\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2a_1^2-b^4}{b^2+a_1^2}}$$

следовательно,

$$Di=ab^2\sqrt{\frac{a^2b^2+a_1^2a^2-b^4}{b^2+a_1^2}}>0$$

При $\gamma\to\infty$ получается

$$\beta_1^2=-\gamma^2\frac{b^2(a_1^2+a^2)}{a^2(b^2+a_1^2)} \text{ и } \beta_2^2=-\gamma^2$$

Следовательно,

$$Di=4b^4\gamma^2(a^2-b^2)\left(1-\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2a_1^2}{a^2b^2+b^2a_1^2}}\right)<0$$

Отсюда следует вывод о том, что существует вещественный корень

$$D\left(\frac{1}{V}\right)=0 \text{ при } 1/b<\gamma<\infty$$

Таким образом, показано, что при $1/b<\gamma<\infty$ существует вещественный корень $V<b$ уравнения Релея и поверхностные волны не затухают.

SURFACE WAVES ON BOUNDARY OF MAGNETOELASTIC HALF-SPACE AND DIELECTRIC MEDIA

I. H. HACHINIAN

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱԿԻՑ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ

Ժ. Հ. ՀԱԽԻՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մագնիսաառաձգական միջավայրի շարժման վերաբերյալ գծային հարթ խնդիր։ Միջավայրը զբաղեցնում է ստորին կիսատարածությունը և սահմանակից է մեկուսիչով (օդով) լցված վերին կիսատարածությանը։

Ցույց է տրվում, որ մագնիսական դաշտի լարվածության արժեքների քառակուսու ճշտության դեպքում Ռելեի ալիքները բացակայում են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахинян Ж. О., Багдоев А. Г.* Исследование движения магнитоупругой среды в линейной и нелинейной задачах.—Изв. АН СССР. МТТ, 1976, т. 6, с. 91—100.

Кироваканский педагогический институт

Поступила в редакцию 11.III.1983