

УДК 624.012.042

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФУНДАМЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С
 ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЯ

ПЕТРОСЯН Л. Г.

В [1] рассмотрена линейная модель неоднородного упругого основания, описываемая ядром (функцией влияния)

$$K(r) = \frac{\theta}{(2\pi\sqrt{r^2 + \varepsilon^2})^{1+\nu}} \quad (1)$$

где θ — некоторая физическая постоянная, в частности, она может быть принята по аналогии с однородным основанием в виде $\theta = 2E_0^{-1}(1-\nu)$; $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$; x, y, x_1, y_1 — координаты точки наблюдения и точки приложения единичной сосредоточенной силы; ε, ν — параметры модели; E_0, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Отличительной особенностью предлагаемой модели упругого основания, ядро которой объединяет свойства ядра модели неоднородного основания Г. К. Клейна и одного из рассмотренных в [2] ядер $K(r) = (r^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$, является ограниченность перемещений основания на всей его поверхности, включая точку приложения силы, возможность однозначного вычисления этих перемещений и скачков перемещений на поверхности основания. Это позволяет решать, в частности, задачи о свободно лежащих неизолированных (по терминологии Б. Г. Коренева [2]) конструкциях на упругом основании.

В настоящей статье дается вывод ядра предлагаемой модели для плоского случая и рассматривается задача о расчете двух полубесконечных неизолированных балок на упругом основании.

Как известно [2, 3], ядро произвольной линейной симметричной модели упругого основания может быть представлено в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$K(r) = \frac{\theta}{2\pi} \int_0^\infty h(t) J_0(rt) dt \quad (2)$$

где $J_0(rt)$ — цилиндрическая функция первого рода $h(t)$ — плотность ядра. Из обращения (2) следует

$$h(t) = 2\pi t \int_0^\infty r K_0(r) J_0(rt) dr \quad (3)$$

В случае плоской задачи ядро модели представлено через функцию $h(t)$ по формуле [3]

$$K(|x-s|) = g \int_0^{\infty} \frac{h(t)}{t} \cos t(x-s) dt \quad (4)$$

В [1] для функции $h(t)$ получена следующая формула:

$$h(t) = \frac{t^{\alpha} \varepsilon^{\beta}}{2^{\nu-\beta} \pi^{\nu} \Gamma(\alpha)} K_{\nu}(\varepsilon t) \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{\nu+1}{2}$; $\beta = \frac{1-\nu}{2}$; $K_{\nu}(\varepsilon t)$ — функции Макдональда.

Для получения ядра $K(x-s) = K(|x-s|) = K(y)$ необходимо вычислить интеграл

$$K(y) = \frac{g \varepsilon^{\beta}}{2^{\nu-\beta} \pi^{\nu} \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{-\beta} K_{\nu}(\varepsilon t) \cos ty dt \quad (6)$$

Используя формулу 6.699.12 [4], справедливую при $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$, $y > 0$, $\operatorname{Re} \beta > -1/2$, находим

$$K(y) = \frac{A_{\nu}}{(y^2 + \varepsilon^2)^{\nu/2}} \quad (7)$$

Здесь

$$A_{\nu} = \frac{g \Gamma(\nu/2)}{2^{\nu+1} \pi^{\nu-1/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}$$

Γ — гамма-функция. Ядро (7), как видим, имеет достаточно простой вид и при конечных ν, ε не имеет особенностей на всей полуоси $0 \leq y < \infty$. Функция влияния, определяемая формулой (7) с механической точки зрения достаточно обоснована. Она имеет конечное значение

$$K(0) = A_{\nu} \varepsilon^{-\nu} \quad (8)$$

и в точке приложения силы стремится к нулю на бесконечности, что вполне соответствует инженерным представлениям о работе упругого основания, в отличие, например, от модели упругой однородной полуплоскости, ядро которой имеет вид

$$K(y) = \frac{g}{\pi} \ln \frac{1}{|y|} + C \quad (9)$$

где C — произвольная постоянная.

Полагая $\nu \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 2$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, мы можем прийти к четырем указанным выше ядрам: Г. К. Клейна ($\varepsilon \rightarrow 0$), Б. Г. Коренева ($\nu \rightarrow 0$), упругой изотропной полуплоскости ($\nu \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$), винклеровского основания ($\nu \rightarrow 2$, $\varepsilon \rightarrow 0$). Однако осуществить непосредственный предельный пере-

ход в формуле (9) нельзя, так как при этом нарушаются условия сходимости интеграла (6). Чтобы обойти эту трудность, найдем производную ядра—угол наклона поверхности основания

$$K'(y) = -\frac{6\epsilon^3}{2^{\nu-3}\pi\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{1-\beta} K_3(\epsilon t) \sin ty dt \quad (10)$$

Этот интеграл вычисляется с помощью формулы 6.699.11 [4]

$$\int_0^{\infty} x^{1+\nu} K_\nu(ax) \sin bx dx = \sqrt{\pi} (2a)^\nu \Gamma\left(\frac{3}{2} + \nu\right) b(b^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}-\nu} \quad (11)$$

если учесть, что в силу определения функции Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \nu i\right) H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi i}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \nu i\right) H_\nu^{(2)}(iz)$$

где $H_\nu^{(1)}(iz)$ —функция Ханкеля первого рода, $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$ и положить в (11) $\nu = -\beta$, $a = \epsilon$, $b = y$. Получим

$$K'(y) = -\frac{6\Gamma\left(\frac{3}{2} - \beta\right) y (y^2 + \epsilon^2)^{\beta-3/2}}{2^{\nu-3}\pi^{1/2}\Gamma(\alpha)} \quad (12)$$

Теперь можно осуществить предельные переходы; при $\nu \rightarrow 0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{6y(y^2 + \epsilon^2)^{-1}}{\pi} \quad (13)$$

Интегрируя (13), находим плоское ядро, соответствующее ядру Б. Г. Коренева

$$K(y) = -\frac{6}{\pi} \ln\left(\frac{y}{y^2 + \epsilon^2}\right) + C \quad (14)$$

и при $\epsilon \rightarrow 0$ приходим к ядру (9) для упругой изотропной полуплоскости. С другой стороны, из (12) при $\epsilon \rightarrow 0$ имеем

$$K'(y) = -\frac{6\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) y^{-1-\nu/2}}{2^{\nu-3}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} \quad (15)$$

и после интегрирования

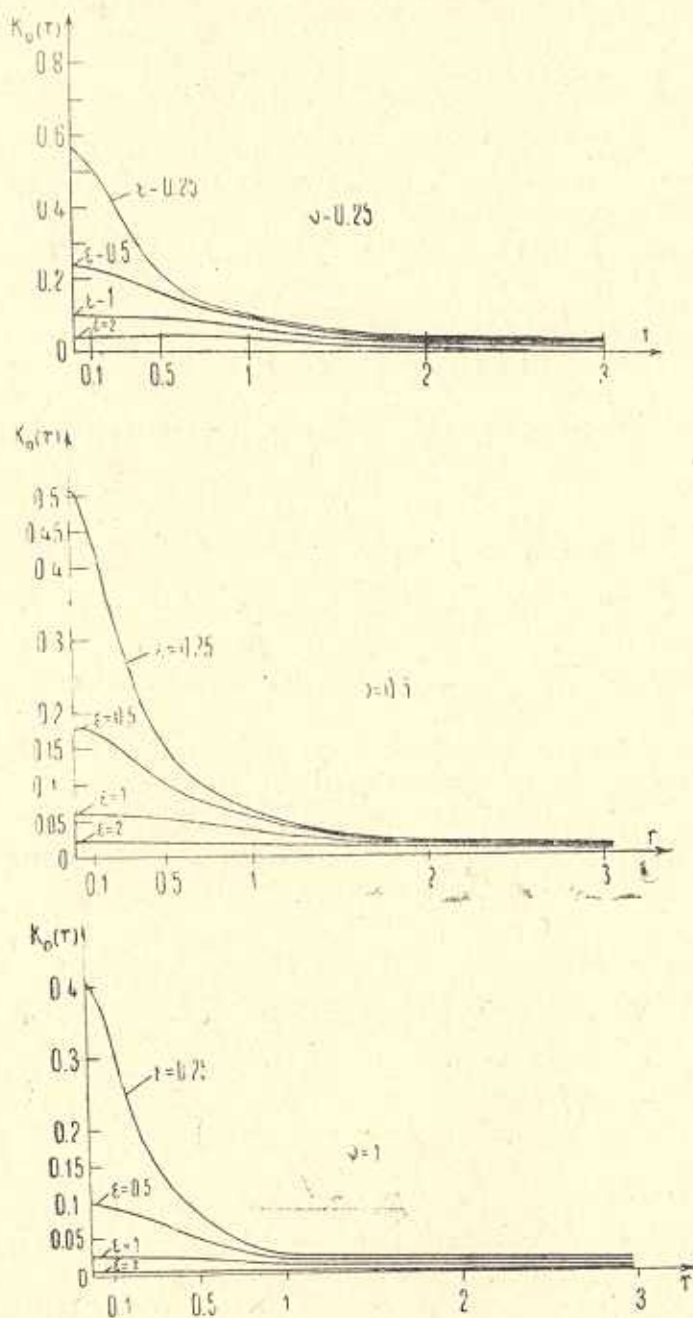
$$K(y) = \frac{6\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{2^{\nu-3}\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)} y^\nu + C \quad (16)$$

Из условия на бесконечности при $\nu \neq 0$ получаем $C = 0$. Ядро (16) соответствует упругой полуплоскости с модулем упругости, изменяю-

щимся с глубиной по степенному закону. Предельный переход от (16) к (9) осуществляется с помощью формулы [3]:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{|y|^\nu} - 1 \right) = \ln \frac{1}{|y|}$$

Таким образом, из ядра (7) с помощью указанных предельных операций могут быть получены ядра (14), (16) и (9), соответствующие

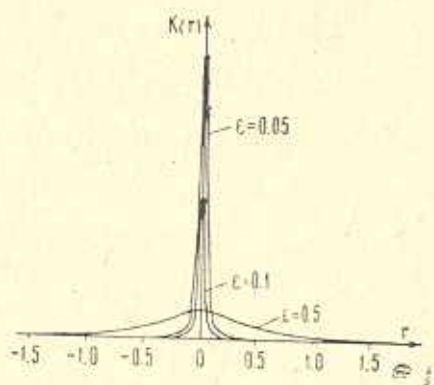


Фиг. 1 (α, β, θ)

известным моделям. Отметим, что ядро (14) ранее в литературе не рассматривалось. На фиг. 1 а, б, в приведены графики функций влияния для предлагаемой модели при различных значениях ν и ϵ . Вопрос о выборе этих параметров должен решаться с учетом реальных свойств грунтового основания. В частности, если могут быть получены экспериментальные данные о функции влияния с помощью штамповых испытаний, то определение параметров ν , ϵ можно осуществить методом наименьших квадратов, используя аппроксимацию экспериментального ядра функцией (1). Важной особенностью рассматриваемой модели является возможность адекватного описания свойств грунтов, как с хорошими распределительными свойствами, так и грунтов с быстрозатухающими вне нагруженной площади осадками, обычно описываемыми моделями винклеровского типа. Так, если положить $A_\epsilon \epsilon^{-\nu} = \text{const}$ и учесть, что

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{y^2 + \epsilon^2} = \delta(x)$$

то вместо (7) мы приходим к ядру, содержащему дельта-функцию, что характерно для дискретных моделей. На фиг. 2 приведены графики ядра основания при $A_\epsilon \epsilon^{-\nu/2} = \text{const}$ для $\nu = 2$ и различных значений параметра ϵ . Объединяя в себе свойства различных моделей (однородных, неоднородных, непрерывных и дискретных), предлагаемое ядро не только позволяет



Фиг. 2

в рамках одного алгоритма охватить решение задач расчета конструкций на различных по своим механическим свойствам основаниях, но и дает возможность избежать трудности математического характера, присущие, например, моделям однородной и неоднородной полуплоскости, возникающие из-за наличия неинтегрируемых особенностей и бесконечных перемещений. В частности, для таких моделей невозможно получить решение задач о неизолированных конструкциях со свободными краями. Покажем на примере плоской задачи, что рассматриваемая модель дает возможность решать такого рода задачи.

Пусть две полубесконечные балки, лежащие на основании с ядром (7), смыкаются своими свободными концами. Уравнения равновесия балок имеют вид

$$EJy^{IV}(x) = q(x) - p(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x_1)K(|x - x_1|)dx_1 = y(x) \quad (17)$$

Здесь EJ —жесткость балки; q , p —внешняя нагрузка и контактное давление; $y(x)$ —перемещение балки. Граничные условия, соответствующие свободным концам балок, имеют вид:

$$\dot{y}(\pm 0) = y''(\pm 0) = 0 \quad (18)$$

Перейдем в (17) к преобразованиям Фурье по координате x , для чего умножим левую и правую части обоих уравнений на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\xi x)$ и проинтегрируем по всей оси. Интегрирование по частям с учетом (18) дает

$$EJ\xi^4 y_\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\xi^2 A - i\xi^3 B] = q_\xi - p_\xi$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int p(x_1) K(|x - x_1|) \exp(i\xi x) dx_1 dx = y_\xi \quad (19)$$

Здесь индексом ξ обозначены преобразования Фурье соответствующих функций; $A = \Delta \left[\frac{dy}{dx}(0) \right]$; $B = \Delta[y(0)]$; Δ — скачок функции. Полагая в интегральном уравнении (19) $x - x_1 = z$, находим

$$\sqrt{2\pi} p_\xi K_\xi = y_\xi \quad (20)$$

Вычисление преобразования Фурье ядра основания может быть выполнено с помощью формулы (4). Так как ядро — четная функция, то

$$K_\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty K(z) \cos \xi z dz$$

и сравнение с (4) дает

$$K_\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial h(\xi)}{\xi} \quad (21)$$

Как видим, K_ξ и $\xi^{-1} h(\xi)$ — четные функции аргумента ξ .

Из (19) и (20) получаем

$$y_\xi = \frac{q_\xi - (2\pi)^{-1/2} [\xi^2 A - i\xi^3 B]}{EJ\xi^4 + \xi [\pi \partial h(\xi)]^{-1}} \quad (22)$$

Перемещение балки можем получить из формулы обращения преобразования Фурье, при этом учтем, что знаменатель в (22) — четная функция

$$y(x) = y_0(x) - AF_1(x) + BF_2(x) \quad (23)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi \cos \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi \partial h(\xi)]^{-1}}; \quad F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sin \xi x d\xi}{EJ\xi^3 + [\pi \partial h(\xi)]^{-1}}$$

$$y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{q_\xi \exp(-i\xi x) d\xi}{EJ\xi^4 + \xi [\pi \partial h(\xi)]^{-1}}$$

Подставляя далее (23) в граничные условия (18), получаем выражение для определения неизвестных скачков A, B

$$A = -\pi EJy'_q(0)F_3^{-1}, \quad B = \pi EJy''_q(0)F^{-1}$$

где

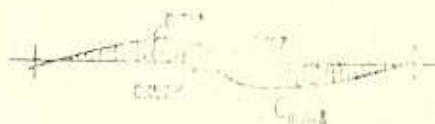
$$F_3 = \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{\xi^3 + [\theta_1 h(\xi)]^{-1}}; \quad F_4 = \int_0^{\infty} \frac{\xi^5 d\xi}{\xi^3 + [\theta_1 h(\xi)]^{-1}}; \quad \theta_1 = \pi \theta EJ$$

Следует отметить, что при использовании известных моделей, обладающих распределительными свойствами, интегралы в (24) были бы расходящимися; так что дальнейшие вычисления оказались бы невозможными. Благодаря наличию двух регуляризирующих параметров эти трудности при использовании рассматриваемой модели легко обходятся.

После определения неизвестных A, B перемещения балки могут быть вычислены по формулам (23), а угол поворота и силовые факторы путем ее соответствующего дифференцирования.



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим в качестве примера решение задачи о действии двух кососимметричных сил (фиг. 3) на неизолированные полубесконечные балки со свободными концами, лежащие на основании, характеризующемся следующими значениями параметров: $\theta_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{Н}$; $\theta_2 = 50 \text{ м}$; $\epsilon = 0,01 \text{ м}$; $\nu = 0$. При этом $h(\xi) = e^{-\xi}$. На фиг. 4 приведена эпюра безразмерных перемещений рассматриваемой балки; характерен скачок перемещений в начале координат. Вычисления проведены на ЭВМ СМ-4.

CALCULUS OF PLANE FOUNDATION CONSTRUCTIONS BY MEANS OF GENERALISED MODEL OF BASE

L. G. PETROSIAN

ՀԱՐԹ ԶԻՄՔԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔՆԵՐԻ ԶԱՇՎԱՐԿԸ ԶԻՄՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՎԱԾ ՄՈՒԵԼԻ ՕՐԵՆՈՒԹՅԱՄԲ

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ստացված է առաձգական հիմքի ընդհանրացված մոդելի միջուկի դուրս բերումը՝ հարթ դեպքի համար, և որպես օրինակ պատարկված է առաձգական հիմքի վրա դրված երկու շեղյալ ստացված կիսաանվերջ հեծանների հաշվարկի խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цейтлин А. И., Петросян Л. Г.* Методы граничных элементов в строительной механике.—Ереван, «Луйс», 1987.
2. *Корнев Б. Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании.—М.: Госстройиздат, 1954.
3. *Попов Г. Я.* Контактные задачи для линейно-деформируемого основания.—Киев-Одесса: Виша школа, 1982.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила в редакцию
30.XI.1987