ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 6, 1988. Механика

УДК 539.3

ОБ УРАВНЕНИИ МАГНИТОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СЛУЖАЩЕЙ ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

КАЗАРЯН К. Б.

В работе [1] выведено уравнение статической устойчивости цилиндрической оболочки, вдоль образующей которой протекает электрический ток. При выводе уравнения устойчивости возмущенные электромагнитные и пондеромоторные силы определялись в осесимметричной постановке. Аналогичным образом в [2] получено уравнение устойчивости для соленоидальной токонесущей оболочки.

В настоящей работе обобщены результаты работ [1, 2] на случай, когда электромагнитные возмущения и пондеромоторные силы, обусловленные изменением формы срединной поверхности оболочки, определяются без ограничения на характер возмущений срединной поверхности оболочки. Аналогичные вопросы магнитоупругой устойчивости токонесущих стержней и прямоугольных пластин обсуждены в работах [3—6].

1. Отнесем цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R, толщины $2h$ к триортогональной системе координат α, β, γ. Координатные линии α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Под α и β подразумеваются размерные координаты, откладываемые, соответственно, по прямолинейной образующей и по дуге направляющей окружности срединной поверхности оболочки. Направление координатной линии γ совпадает с направлением нормали к внешней поверхности оболочки.

Рассмотрим два различных случая протекания электрического тока: 1) ток течет в оболочке по направлению образующей; 2) ток течет вдоль дуги направляющей окружности. Считается, что электрический ток равномерно распределен по толщине оболочки; плотность тока J_0 является заданной величиной. Оболочка помещена в диэлектрическую среду, отождествляемой с вакуумом. В дальнейшем индексом $(s)=1$ будем отмечать величины, относящиеся к области $h<\gamma<\infty$; индексом $(s)=2$ — к области $-R<\gamma<-h$.

Формально эти два случая можно объединить с помощью символа Кронекера δ_{in}. Введем вектор плотности электрического тока $\vec{j}_0$ следующим образом:

$$j_{0\alpha}=j_0\delta_{1n}; \quad j_{0\beta}=j_0\delta_{2n}; \quad j_{0\gamma}=0 \tag{1.1}$$

Индекс $n=1$ относится к первому случаю, индекс $n=2$—ко второму случаю.

Ток $\vec{j}_0$ создает магнитное поле $\vec{H}_0$, которое определяется из уравнений магнитостатики и имеет вид

$$H_{0\alpha}=\frac{4\pi j_0(\gamma-h)}{c}\delta_{2n};\quad H_{0\beta}=-\frac{4\pi j_0\delta_{1n}}{c(1+\gamma/R)}\left(\gamma+h-\frac{\gamma^2-h^2}{2R}\right);\quad |\gamma|\leqslant h$$

$$H_{0\alpha}^{(1)}=0;\quad H_{0\beta}^{(1)}=-\frac{8\pi j_0 h\delta_{1n}}{c(1+\gamma/R)};\quad h\leqslant\gamma<\infty \tag{1.2}$$

$$H_{0\alpha}^{(2)}=-\frac{8\pi j_0 h}{c}\delta_{2n};\quad H_{0\beta}^{(2)}=0;\qquad -R<\gamma\leqslant -h$$

$$H_{0\gamma}=H_{0\gamma}^{(1)}=H_{0\gamma}^{(2)}=0$$

В (1.2) c есть электродинамическая постоянная.

В результате взаимодействия тока с собственным магнитным полем в оболочке возникает начальное кольцевое усилие T_0 [1, 2]

$$T_0=\frac{8\pi j_0^2 h^2 R}{c^2}(-1)^n$$

В первом случае начальное кольцевое усилие является сжимающим, для второго случая оно является растягивающим.

В отношении упругой оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява. Считается, что материал оболочки является изотропным, проводящим с коэффициентом электропроводности σ, не обладает пьезоэлектрическими и ферромагнитными свойствами. Джоулево тепло и индуцированные электромагнитные поля, обусловленные подвижностью упругого тела [7], не учитываются.

Уравнения статической устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки средней длины в перемещениях срединной поверхности имеют вид [7]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int\limits_{-h}^{h}F_\alpha d\gamma$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}\int\limits_{-h}^{h}F_\beta d\gamma \tag{1.3}$$

$$D\Delta_0^2 w+\frac{2Eh}{R(1-\nu^2)}\left(\frac{w}{R}+\nu\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)-T_0\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}=\int\limits_{-h}^{h}\left[F_\gamma+\gamma\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}\right)\right]d\gamma$$

В (1.3) E есть модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона материала оболочки; u, v—тангенциальные перемещения, w—нормальное перемещение срединной поверхности оболочки; F_α, F_β, F_γ—компоненты вектора возмущенной электромагнитной силы, обусловленного изменением формы срединной поверхности оболочки;

$\Delta_0 = \partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2$; $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$. Вектор $\vec{F}$ имеет вид

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\left[\vec{j} \times \vec{H} - \vec{j}_0 \times \vec{H}_0\right] \tag{1.4}$$

где $\vec{j}$ есть вектор плотности электрического тока, $\vec{H}$—вектор напряженности собственного магнитного поля деформированной оболочки.

Уравнение (1.3) удобно привести к следующему одному разрешающему уравнению относительно нормального прогиба $w(\alpha, \beta)$

$$D\Delta_0^4 w + \frac{2Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} - (-1)^n \frac{8\pi j_0^2 Rh^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(\Delta_0^2 w) = Q(\alpha, \beta) \tag{1.5}$$

где

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{-h}^{h}\left\{\Delta_0^2\left[F_\gamma + \gamma\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial F_\beta}{\partial\beta}\right)\right] + \frac{1}{R}\left[(2+\nu)\frac{\partial^3 F_\beta}{\partial\alpha^2\partial\beta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^3 F_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \nu\frac{\partial^3 F_\alpha}{\partial\alpha^3} + \frac{\partial^3 F_\beta}{\partial\beta^3}\right]\right\} d\gamma$$

Ограничиваясь малыми возмущениями, представим векторы $\vec{j}$ и $\vec{H}$ в виде [1, 2, 7]

$$\vec{j} = \vec{j}_0 + \sigma\vec{e}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \tag{1.6}$$

В (1.6) $\vec{e}$, $\vec{h}$ есть малые возмущения электрического и магнитного полей, обусловленные деформацией оболочки. Они определяются из следующих задач электромагнитостатики [1—3]:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{e} = 0; \quad \operatorname{div}\vec{e} = 0 \\ &\operatorname{rot}\vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{e}\,; \ \operatorname{div}\vec{h} = 0 \end{aligned}\right\} \quad |\gamma| < h \tag{1.7}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0; \quad \gamma = \pm h \tag{1.8}$$

В (1.8) $\vec{n}$ есть нормаль к срединной поверхности оболочки, которая для деформированной оболочки имеет вид [7]

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}(w-\gamma)}{|\operatorname{grad}(w-\gamma)|}$$

Линеаризованное граничное условие (1.8) имеет вид

$$e_\gamma = \frac{j_0}{\sigma}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\delta_{1n} + \frac{\partial w}{\partial\beta}\delta_{2n}\right); \quad \gamma = \pm h \tag{1.9}$$

Уравнения (1.7) должны рассматриваться совместно с уравнениями для возмущений магнитного поля во внешних областях оболочки.

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(s)}=0; \quad \operatorname{div}\vec{h}^{(s)}=0 \tag{1.10}$$

На деформируемой границе раздела материала оболочки с вакуумом $\gamma=w\pm h$ выполняется условие непрерывности компонент вектора магнитного поля [3, 6]

$$\vec{H}(w+h)=\vec{H}^{(1)}_{(w+h)}; \quad \vec{H}(w-h)=\vec{H}^{(2)}_{(w-h)}$$

Принимая во внимание, что при малых прогибах $\max\limits_{(\alpha,\beta)}|w|\ll h$, имеют место соотношения

$$\vec{H}_0(w\pm h)=\vec{H}_0(\pm h)+w\frac{d\vec{H}_0}{d\gamma}\Big|_{\gamma=\pm h}; \quad \vec{H}^{(s)}_0(w\pm h)=\vec{H}^{(s)}_0(\pm h)+w\frac{d\vec{H}^{s}_0}{d\gamma}\Big|_{\gamma=\pm h}$$

для компонент векторов возмущенного магнитного поля $\vec{h}$, $\vec{h}^{(s)}$ с учетом (1.2) и (1.6) получим следующие линеаризованные граничные условия при $\gamma=\pm h$

$$h_\alpha-h^{(s)}_\alpha=-\frac{4\pi j_0}{c}\delta_{2n}w; \quad h_\beta-h^{(s)}_\beta=\frac{4\pi j_0}{c}\delta_{1n}w; \quad h_\gamma-h^{(s)}_\gamma=0 \tag{1.11}$$

Компоненты векторов $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{h}^{(2)}$ должны удовлетворять также условиям ограниченности при $\gamma\to\infty$; $\gamma\to-R$, соответственно.

Компоненты вектора пондеромоторной силы $\vec{F}$ посредством компонент векторов $\vec{e}$, $\vec{h}$ для тонкой оболочки $h/R\ll 1$ записываются следующим образом:

$$F_\alpha=\frac{j_0}{c}\left[h_\gamma\delta_{2n}+\frac{4\pi\sigma}{c}e_\gamma(\gamma+h)\delta_{1n}\right]; \quad F_\beta=-\frac{j_0}{c}\left[h_\gamma\delta_{1n}-\frac{4\pi\sigma}{c}e_\gamma(\gamma-h)\delta_{2n}\right] \tag{1.12}$$

$$F_\gamma=\frac{j_0}{c}\left\{h_\beta\delta_{1n}-h_\alpha\delta_{2n}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[(\gamma+h)e_\alpha\delta_{1n}-(\gamma-h)e_\beta\delta_{2n}\right]\right\}$$

2. Решения уравнений (1.5), (1.7) и (1.10) представим в виде

$$w=w_0\exp[i(k\alpha+m\beta/R)], \quad g=g_0(\gamma)\exp[i(k\alpha+m\beta/R)] \tag{2.1}$$

где под функцией g понимается любая компонента возмущенного электромагнитного поля, k—волновое число, m—целое число. При решении задачи (1.7) для возмущенного электрического поля введем скалярный потенциал Φ

$$\vec{e}=\operatorname{grad}\Phi; \quad \Delta\Phi=0 \tag{2.2}$$

где $$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{(R+\gamma)}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{R^2}{(R+\gamma)^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$$

Подставляя (2.1) в (2.2), для функции $\Phi_0(\gamma)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\Phi_0}{d\gamma^2}+\frac{1}{R+\gamma}\frac{d\Phi_0}{d\gamma}-\left[k^2+\frac{m^2}{(R+\gamma)^2}\right]\Phi_0=0 \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\Phi_0(\gamma)=\tilde{C}_1 I_m(z)+\tilde{C}_2 K_m(z) \tag{2.4}$$

где $z=k(R+\gamma)$; $I_m(z)$, $K_m(z)$ есть модифицированные функции Бесселя, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$—постоянные интегрирования.

Граничное условие (1.9) запишем в виде

$$\Phi_0'=\frac{j_0 i w_0}{\sigma}\left(\delta_{1n}+\frac{m}{kR}\delta_{2n}\right)=A_0; \quad z=z_1=k(R+h); \quad z=z_2=k(R-h) \tag{2.5}$$

(штрих означает дифференцирование по z).

Решение (2.4), удовлетворяющее граничному условию (2.5), имеет вид

$$\Phi_0=A_0\frac{[K_m'(z_2)-K_m'(z_1)]I_m(z)+[I_m'(z_1)-I_m'(z_2)]K_m(z)}{I_m'(z_1)K_m'(z_2)-I_m'(z_2)K_m'(z_1)} \tag{2.6}$$

Компоненты вектора $\vec{e}_0$ имеют вид

$$e_{0\alpha}=ik\Phi_0; \quad e_{0\beta}=imk\Phi_0/z; \quad e_{0\gamma}=k\Phi_0' \tag{2.7}$$

Уравнения (1.7) для компонент магнитного поля удобно преобразовать к виду

$$h_{\alpha0}''+\frac{h_{\alpha0}'}{z}-\left(1+\frac{m^2}{z^2}\right)h_{\alpha0}=0$$

$$h_{\gamma0}=-\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{m\Phi_0}{z}-ih_{\alpha0}'; \quad h_\beta=-\frac{4\pi\sigma}{c}i\Phi_0'+\frac{m}{z}h_{\alpha0} \tag{2.8}$$

Решение уравнения относительно $h_{\alpha0}$ имеет вид

$$h_{\alpha0}=C_1 I_m(z)+C_2 K_m(z) \tag{2.9}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 обратимся к решению внешней задачи (1.10).

Выражая $\vec{h}^{(s)}$ через скалярный потенциал $\psi^{(s)}$

$$\vec{h}^{(s)}=\mathrm{grad}\,\psi^{(s)}; \quad \Delta\psi^{(s)}=0$$

для функций $\psi_0^{(s)}$ получим следующее решение:

$$\psi_0^{(s)}=d_1^{(s)}K_m(z)+d_2^{(s)}I_m(z)$$

Так как функция $K_m(z)$ имеет особенность в начале координат, а функция $I_m(z)$ неограниченно возрастает на бесконечности, то примем $d_1^{(2)} = d_2^{(1)} = 0$. Следовательно,

$$\psi_0^{(1)} = d_1^{(1)} K_m(z); \quad \psi_0^{(2)} = d_2^{(2)} I_m(z) \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что

$$h_{\gamma 0}^{(1)} = k d_1^{(1)} K'_m(z); \quad h_{\alpha 0}^{(1)} = ik d_1^{(1)} K_m(z), \quad h_{\beta 0}^{(1)} = d_1^{(1)} imk K_m(z)/z$$

$$h_{\gamma 0}^{(2)} = k d_2^{(2)} I'_m(z); \quad h_{\alpha 0}^{(2)} = ik d_2^{(2)} I_m(z); \quad h_{\beta 0}^{(2)} = d_2^{(2)} imk I_m(z)/z$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2, $d_1^{(1)}$, $d_2^{(2)}$ определим из граничных условий (1.11). Для определения четырех постоянных мы имеем шесть граничных условий. Как показал дальнейший ход решения, для определения этих постоянных достаточно использовать условие непрерывности нормальной составляющей h_γ и одно из условий для тангенциальных составляющих h_α или h_β. При этом неиспользованное условие относительно другой тангенциальной составляющей будет удовлетворяться тождественно.

После определения постоянных C_1 и C_2 имеем следующее решение для функции:

$$h_{\alpha 0} = \frac{4\pi j_0 w_0}{c} \delta_{2n} [z_1 I_m(z) K'_m(z_1) - z_2 K_m(z) I'_m(z_2)] +$$

$$+ \frac{4\pi\sigma i m}{c} [\Phi_0(z_1) K_m(z_1) I_m(z) - \Phi_0(z_2) I_m(z_2) K_m(z)] \tag{2.11}$$

Подставляя (2.7)—(2.9) в (1.12) и производя соответствующие интегрирования с использованием разложений для функций I_m, K_m при $h/R \ll 1$:

$$I_m(z) \simeq I_m(kR) + k\gamma I'_m(kR), \quad K_m(z) \simeq K_m(kR) + k\gamma K'_m(kR)$$

получим следующее выражение для функции $Q(\alpha, \beta)$ в приближении $kh \ll 1$; $h/R \ll 1$; $k^2 hR \ll 1$;

$$Q(\alpha, \beta) \simeq \frac{8\pi h j_0}{c^2} \Delta_0^2 w (\delta_{1n} + \delta_{2n})$$

Учитывая, что $\delta_{1n} + \delta_{2n} = 1$, получим следующие интересующие нас уравнения устойчивости токонесущей цилиндрической оболочки:

$$D\Delta_0^4 w + \frac{2Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (-1)^n \frac{8\pi j_0^2 R h^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Delta_0^2 w = \frac{8\pi j_0^2 h}{c^2} \Delta_0^2 w \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) совпадают с уравнениями, полученными в работах [1, 2] при допущениях осесимметричного (одномерного) характера электромагнитных возмущений и пондеромоторных сил. В [1, 2] приведены также решения уравнения (2.12) для шарнирно опертой оболочки. Для оболочки, изготовленной из меди при соотношениях $R/L=0{,}2$; $R/h=200$; $h=10^{-3}$ м, имеем следующие критические значения плотности электрического тока, превышение которых приводит к потере упругой устойчивости:

$$j_{01}=1{,}4\cdot 10^4 \text{ ка}/\text{м}^2; \quad j_{02}=7{,}9\cdot 10^4 \text{ ка}/\text{м}^2$$

ON EQUATION OF MAGNETOELASTIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL CARRING ELECTRICAL CURRENT

K. B. KAZARIAN

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՀՈՍԱՆՔԻ ՓՈԽԱԴՐՄԱՆԸ ԾԱՌԱՅՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Կ. Բ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Ստացված է հոսանքատար գլանային թաղանթի կայունության հավասարումը հոսանքի անցման երկու տարբեր դեպքերի համար.

ա) հոսանքը թաղանթով անցնում է ծնիչի ուղղությամբ,

բ) հոսանքն անցնում է ծնիչի ուղղորդի աղեղի երկարությամբ։

Թաղանթի միջին մակերևույթի ձևի փոփոխմամբ պայմանավորված էլեկտրամագնիսական գրգռումները և պոնդերամոտորային ուժերը որոշված են սահմանափակումներ չդնելով թաղանթի միջին մակերևույթի գրգռումների բնույթի վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белубекян М. В., Казарян К. Б.* Выпучивание цилиндрической оболочки, служащей для транспортировки электрического тока. Межвузовский сб.: Механика, №2, 1982. ЕГУ, Ереван, с. 38—43.
2. *Белубекян М. В., Григорян Б. В., Казарян К. Б.* Магнитоупругая устойчивость соленоидальной токонесущей оболочки. Сб.: III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости» 1984, ЕГУ, Ереван, с. 36—40.
3. *S. Chattopadhyay, F. C. Moon.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electric current—Jour. App. Mechanics, 42, 4, 809—814, 1975.
4. *Долбин Н. И., Морозов А. И.* Упругие изгибные колебания стержня с электрическим током.—ПМТФ, 1966, №3.
5. *Белубекян М. В.* О статической устойчивости токонесущей пластинки.—Докл. АН Арм. ССР, 1982, т. 74, №5, с. 208—212.
6. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* К задаче устойчивости токонесущей пластинки. Тр. XIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Таллин, 1983, с. 25—28.
7. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
8. *Лурье А. И.* «Теория упругости». М.: Наука, 1970. 939 с.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
2.XI.1987