

УДК 624.075

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
УПРУГО ЗАЩЕМЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

ЧЕРЕНКОВА М. В.

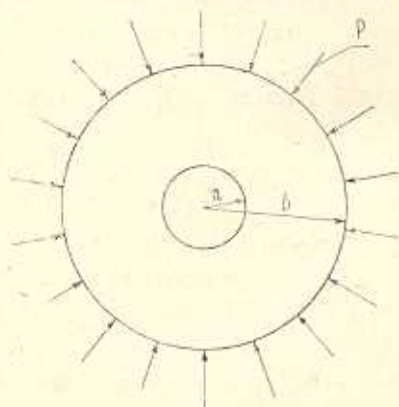
Устойчивости упругих кольцевых пластин посвящены работы [1—6]. Обзор некоторых из них можно найти в статье [7].

В указанных работах авторы использовали классическую теорию изгиба пластин, в которой деформации поперечного сдвига  $\gamma_{iz}$  ( $i=r, \theta$ ) считаются пренебрежимо малыми ( $r, \theta, z$ —цилиндрические координаты с началом отсчета в точке пересечения срединной плоскости с осью пластины). С применением новых конструкционных материалов, в частности, стеклопластиков, имеющих модули сдвига  $G_{iz}$  ( $i=r, \theta$ ) значительно меньшие, чем модули упругости  $E_i$  ( $i=r, \theta, z$ ), возникла необходимость оценить влияние деформаций, пренебрегаемых в классической теории. Известны решения, относящиеся к поперечному изгибу и устойчивости анизотропных пластин [8—9], но до конца рассмотрен лишь случай трансверсальной анизотропии материала пластины, когда можно записать следующие соотношения для модулей упругости  $E_r=E_\theta \neq E_z$  и коэффициентов Пуассона  $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta r}$ ;  $\nu_{rz}=\nu_{zr}=\nu_{z\theta}=\nu_{\theta z}$  [9—10].

Однако еще больший практический интерес представляет случай цилиндрической анизотропии, когда  $E_r=E_z \neq E_\theta$ ;  $\nu_{rz}=\nu_{zr}$ ;  $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta r}$ ;  $\nu_{\theta z}=\nu_{z\theta}$ . Ниже исследован именно этот случай для задачи об осесимметричной форме потери устойчивости кольцевой пластины.

Рассмотрим кольцевую пластину, которая на внешнем контуре  $r=b$  упруго защемлена и нагружена равномерно распределенными

сжимающими усилиями  $p$  [Н/М] (фиг. 1); предполагается, что внутренний контур  $r=a$  не закреплен и свободен от нагрузки. В нашем решении, учитывающем сдвиги, используется теория С. А. Амбарцумяна [8] и, в частности, принято, что касательные напряжения в сечениях  $r=\text{const}$  меняются по параболическому закону:  $\tau_{rz}=1,2 \times \times (h^2/4-z^2)\varphi$ , где  $h$ —толщина пластины,  $\varphi(r, \theta)$ —искомая функция координат  $r, \theta$ .



Фиг. 1

Перезывающие силы в тех же сечениях определяются интегрированием касательных напряжений по толщине пластины:

$$Q_x = \frac{h^2}{12} \varphi \quad (1)$$

Согласно общим уравнениям, данным в [8], для рассматриваемой здесь осесимметричной формы потери устойчивости дифференциальные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \varphi) &= -\frac{12}{h^2} Z \quad (2) \\ D_r \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right) - D_0 \frac{1}{\rho} \frac{d w}{d\rho} + \frac{h^2}{10 G_{rz}} \left( \frac{D_0}{D_r} \frac{\varphi}{\rho} - \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\varphi}{d\rho} \right) \right) + \frac{h^2}{12} \rho \varphi &= \\ &= \frac{h^2}{10} \left( A_2 Z - A_1 \frac{d}{d\rho} (\rho Z) \right) \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = r/b$ ,  $w$  — перемещение произвольной точки срединной поверхности в направлении оси  $z$ ,  $D_r$ ,  $D_0$  — цилиндрические жесткости пластины в радиальном и окружном направлениях;

$$G_{rz} = \frac{E_r}{2(1+\nu_{rz})}; A_1 = -\frac{E_r \nu_{rz} + \nu_{r0} \nu_{0z}}{E_z (1-\nu_{r0} \nu_{0r})}; A_2 = -\frac{E_0 \nu_{0z} + \nu_{0r} \nu_{rz}}{E_z (1-\nu_{r0} \nu_{0r})}$$

$Z$  — фиктивная поперечная нагрузка, вычисляемая для неоднородного напряженного состояния кольцевой пластины.

$$Z = N_r \frac{d^2 w}{d\rho^2} + N_0 \frac{1}{\rho} \frac{d w}{d\rho} \quad (4)$$

где  $N_r(\rho)$  и  $N_0(\rho)$  — нормальные усилия, действующие в плоскости пластины и вызванные нагрузкой  $p$  в докритическом состоянии.

Строго говоря, эти усилия следует определять путем развития теории Ламе на случай анизотропии. Однако, это привело бы к весьма сложным выражениям [11] и результатам, которые во многих случаях практически мало отличаются от результатов, получаемых по обычным формулам Ламе для изотропного материала (в выполненных нами пробных расчетах для  $E_r = 0,44 E_0$  и отношении радиусов контурных линий 0,85 различие составляет доли процента). Поэтому ниже принято, как для изотропного материала, по формулам Ламе

$$N_r = -\frac{p}{1-\eta^2} \left( 1 - \frac{\eta^2}{\rho^2} \right) \quad (5)$$

$$N_0 = -\frac{p}{1-\eta^2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{\rho^2} \right) \quad (6)$$

Здесь  $\eta = a/b$ .

Выражение для  $Z$  можно записать в более компактном виде

$$Z = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dw}{d\rho} N_r \right) \quad (7)$$

Подставив (7) в (2) и произведя интегрирование полученного уравнения, можно выразить функцию  $\varphi$  через производную  $dw/d\rho$

$$\varphi = \frac{12}{h^3} \frac{\rho}{1-\gamma^2} \frac{dw}{d\rho} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) + \frac{C_0}{\rho} \quad (8)$$

где  $C_0$ —постоянная интегрирования. На свободном внутреннем контуре пластины ( $\rho = \gamma$ ) перерезывающая сила  $Q_r = 0$  и, согласно (1), должно быть справедливо равенство  $\varphi = 0$ . Отсюда из (8) следует, что  $C_0 = 0$ , то есть

$$\varphi = \frac{12}{h^3} \frac{\rho}{1-\gamma^2} \frac{dw}{d\rho} \left( 1 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right) \quad (9)$$

или, используя (5),

$$\varphi = -\frac{12}{h^3} N_r \frac{dw}{d\rho} \quad (10)$$

Подставив (10) в (3), получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно угла поворота нормали к срединной плоскости  $\theta = dw/bd\rho$ :

$$\begin{aligned} L_1(\theta) + L_2(\theta) + L_3(\theta) &= 0; \quad L_1(\theta) = \frac{d^2\theta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\theta}{d\rho} - \frac{D_\theta}{D_r} \frac{\theta}{\rho^2} - \frac{N_r b^2}{D_r} \theta \\ L_2(\theta) &= \frac{6}{5} \frac{1}{h} \frac{1}{G_{rz}} \left( \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d(N_r \theta)}{d\rho} \right) - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{N_r \theta}{\rho} \right) \\ L_3(\theta) &= -\frac{h^2}{10 D_r} \left( A_2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \theta N_r) - A_1 \frac{d^2}{d\rho^2} (\rho \theta N_r) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $L_1(\theta)$  соответствует левой части дифференциального уравнения классической теории пластин;  $L_2(\theta)$ —члены, характеризующие поправку к классической теории, обусловленную учетом сдвигов  $\gamma_{rz}$ ;  $L_3(\theta)$ —члены, учитывающие влияние напряжений  $\varepsilon_z$ .

Для решения уравнения (11) используем метод Бубнова-Галеркина, аппроксимируя угол  $\theta$  функцией

$$\theta = \frac{C_1}{\rho} + C_2 \rho + C_3 \rho^3 \quad (12)$$

которая уже использовалась в статье [4] для исследования устойчивости кольцевой пластины по классической теории. Там же оценена погрешность приближенного решения, составляющая не более 2%.

В рассматриваемом здесь случае упруго защемленного внешнего и свободного внутреннего контуров коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  должны быть такими, чтобы удовлетворялись условия  $M_r = 0$  при  $\rho = \gamma$  и  $M_r = -c\theta_0$  при  $\rho = 1$ . Здесь  $M_r(\rho)$ —внутренний изгибающий момент, который согласно [8] определяем следующим образом:

$$M_r = -\frac{D_r d\theta}{b} \frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{D_r}{b} \nu_{r\theta} \frac{\theta}{\rho} + \frac{1}{b} \frac{D_r}{G_{rz}} \left( \frac{d\varphi}{d\rho} + \nu_{r\theta} \frac{\varphi}{\rho} \right) - \frac{h^2}{10} \frac{1}{b} \Lambda_1 Z \quad (13)$$

$c$ —коэффициент упругого защемления,  $\theta_0$ —угол поворота вертикальных элементов наружного контура пластины. Принимая, что поворот происходит вокруг контура  $z=0$ , выражение для  $\theta_0$  записываем в виде

$$\theta_0 = -\theta + \frac{1}{2G_{rz}} \frac{h^2}{4} \varphi \quad (14)$$

Подставляя (12) в граничные условия, получим систему двух алгебраических уравнений, из которой можно выразить постоянные  $C_1$  и  $C_3$  через  $C_2$ :

$$\theta = C_2 \left( \rho + m_1 \frac{1}{\rho} + m_2 \rho^3 \right) \quad (15)$$

где

$$m_2 = \frac{U_1 Y_2 - U_2 Y_1}{Y_1 U_3 - U_1 Y_3}; \quad m_1 = - \left( \frac{Y_2}{Y_1} + m_2 \frac{Y_3}{Y_1} \right)$$

$$Y_1 = \frac{1}{\gamma^2} \left( K_1 \frac{h^2}{5\rho^2} \frac{x}{1-\gamma^2} - \nu_{r\theta} + 1 \right); \quad Y_2 = K_1 \frac{h^2}{5b^2} \frac{x}{1-\gamma^2} - \nu_{r\theta} - 1$$

$$Y_3 = \gamma^2 \left( K_1 \frac{h^2}{5b^2} \frac{x}{1-\gamma^2} - \nu_{r\theta} - 3 \right)$$

$$U_1 = \frac{h^2}{5b^2} \frac{x}{1-\gamma^2} (K_1 \gamma^2 + K_2 (1-\gamma^2) (\nu_{r\theta} - 1)) - \nu_{r\theta} + 1 + c_0 \left( K_2 \frac{h^2}{4b^2} x - 1 \right)$$

$$U_2 = \frac{h^2}{5b^2} \frac{x}{1-\gamma^2} (K_1 + K_2 (1-\gamma^2) (\nu_{r\theta} - 1)) - \nu_{r\theta} - 1 + c_0 \left( K_2 \frac{h^2}{4b^2} x - 1 \right)$$

$$U_3 = \frac{h^2}{5b^2} \frac{x}{1-\gamma^2} (K_1 (2 - \gamma^2) + K_2 (1-\gamma^2) (\nu_{r\theta} - 1)) - \nu_{r\theta} - 3 +$$

$$+ c_0 \left( K_2 \frac{h^2}{4b^2} x - 1 \right)$$

$$K_1 = \frac{E_r}{E_z} \frac{2 + \nu_{rz} - \nu_{r\theta} \nu_{\theta z}}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}; \quad K_2 = \frac{1 + \nu_{rz}}{1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}}$$

здесь  $x = \rho b^2 / D_r$ —безразмерный коэффициент нагрузки,  $c_0 = cb / D_r$ —безразмерный коэффициент упругого защемления.

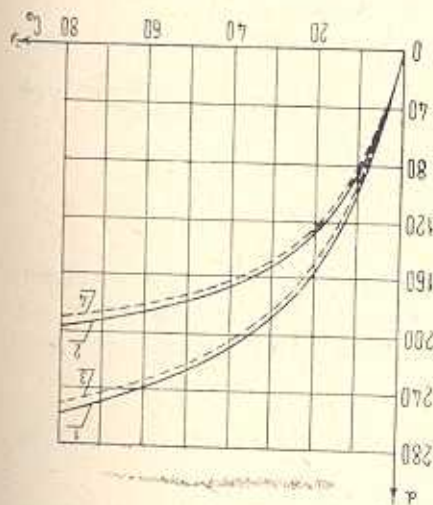
Выражение (15) удовлетворяет всем граничным условиям задачи и для завершения решения, следуя обычной процедуре метода Бубнова-Галеркина, подставим (15) в (11) и приравняем нулю интеграл:

$$\int_0^1 (L_1(\theta) + L_2(\theta) + L_3(\theta)) \theta d\rho = 0 \quad (16)$$

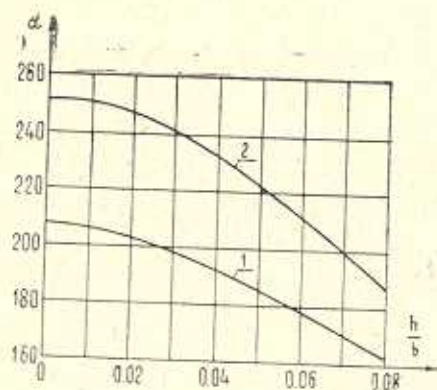
Отсюда можно найти практическое значение безразмерного коэффициента нагрузки  $\alpha$ .

Расчеты производились при  $\nu = 0,85$  для двух вариантов материала пластины: изотропного материала с  $E = 2,94 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0,3$  и анизотропного материала с  $E_r = E_z = 2,94 \cdot 10^{10}$  Па;  $E_\theta/E_r = 2,24$ ;  $\nu_{rz} = \nu_{zr} = 0,3$ ;  $\nu_{\theta z} = \nu_{z\theta} = 0,33$ ;  $\nu_{\theta r} = \nu_{r\theta} = 0,15$ .

Численные результаты представлены на фиг. 2 и фиг. 3. На фиг. 2 сплошными кривыми показаны зависимости искомого критического значения коэффициента нагрузки  $\alpha$  от коэффициента упругого защемления  $c_0$  для анизотропной пластины без учета сдвигов  $\gamma_{rz}$  (кривая 1) и с их учетом (кривая 2). Несколько ниже штриховыми кривыми 3 и 4 показаны соответствующие зависимости для изотропной пластины. (Относительная толщина пластины  $h/b$  при построении кривых 2 и 4 была принята равной 0,076). На фиг. 3 можно проследить для  $c_0 = 40$  (кривая 1) и  $c_0 = 80$  (кривая 2) влияние относительной толщины анизотропной пластины на критическое значение коэффициента нагрузки.



Фиг. 2



Фиг. 3

Значение  $\alpha$  при  $h/b \rightarrow 0$  соответствует классической теории, не учитывающей сдвига. При построении графиков было положено, что  $\sigma_z = 0$ , так как учет нормальных напряжений усложняет вычисления, но вносит существенно меньшую поправку, чем учет сдвигов  $\gamma_{rz}$ .

При малых значениях коэффициента упругого защемления допустимо пользоваться упрощенной моделью кольца, основанной на исходном предположении, что  $E_r = E_z = G_{rz} = \infty$ , то есть считать радиальные сечения недеформируемыми. Тогда при потере устойчивости по осесимметричной форме любой его радиус, оставаясь прямым, повернут на малый угол  $\psi$ .

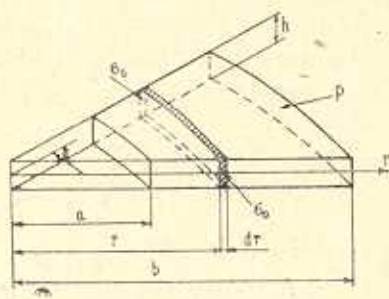
Рассмотрим секторный элемент кольца, соответствующий центральному углу  $d\theta$  (фиг. 4). В докритическом состоянии, вследствие податливости кольца в окружном направлении ( $E_\theta$  — конечно), все точки элемента под действием внешней нагрузки перемещаются вдоль своих радиусов на величину  $\Delta$ , так что относительная деформация в

любой точке кольца в окружном направлении равна  $-\Delta/r$ . При этом возникает окружное напряжение  $\sigma_\theta = -E_0 \Delta/r$ . Величину  $\Delta$  находим из уравнения равновесия элемента в докритическом состоянии:

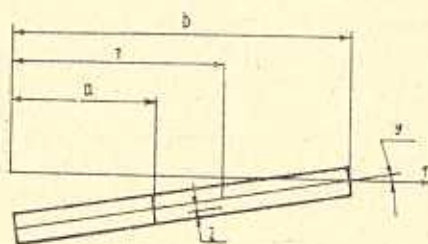
$$pb d\theta - 2h \int_a^b E_0 \frac{\Delta}{r} dr \frac{d\theta}{2} = 0$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{pb}{hE_0 \ln \frac{b}{a}} \quad (17)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, при потере устойчивости и повороте радиального сечения на угол  $\psi$  точка с координатами  $(r, z)$  перемещается по радиусу на величину  $z\psi - \Delta$  (фиг. 5). Соответственно этому окружное напряжение определяется выражением

$$\sigma_\theta = E_0 \frac{z\psi - \Delta}{r} \quad (18)$$

Момент системы этих напряжений в пределах всего сечения относительно оси  $r$  можно записать следующим образом:

$$M = \int_a^b \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \sigma_\theta [(b-r)\psi + z] dz dr$$

Подставляя сюда (17) и (18), получим

$$M = \psi \left[ \frac{pb^2}{\ln \frac{b}{a}} \left( 1 - \ln \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - \frac{E_0 h^2}{12} \ln \frac{b}{a} \right] \quad (19)$$

При повороте радиального сечения на угол  $\psi$  на внешнем контуре кольца возникнет реактивный момент, выражение которого для секториального элемента имеет вид

$$M_r d\theta = -c\psi b d\theta \quad (20)$$

Составив уравнение равновесия моментов рассматриваемого секториального элемента кольца (фиг. 6).

$$2M \frac{d\vartheta}{2} + M_1 d\vartheta = 0$$

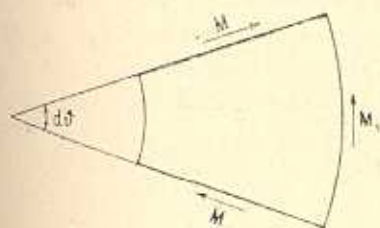
получим выражение для критической нагрузки осесимметричной формы потери устойчивости кольца

$$p = \frac{D_0}{b^2} \alpha_0$$

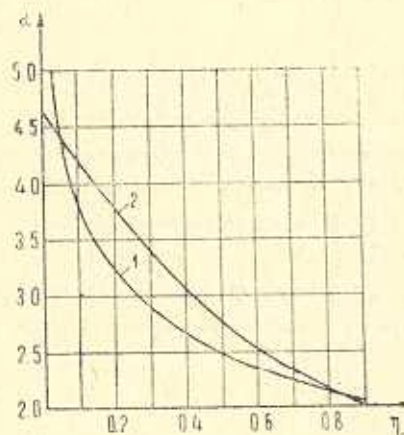
где

$$D_0 = \frac{E_0 h^3}{12}; \quad \alpha_0 = \ln \frac{b}{a} \frac{\ln \frac{b}{a} + c_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1} \quad \text{— безразмерный коэффициент}$$

критической нагрузки,  $c_0 = \frac{cb}{D_c}$  — безразмерный коэффициент упругого защемления.



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 7 кривой 1 представлена зависимость критического коэффициента нагрузки  $\alpha_0$  от соотношения радиусов пластины при  $c_0=0$ . Для сравнения приведена кривая 2, соответствующая изотропной пластине (см. решение Мейсснера [3], не содержащее учета сдвигов  $\gamma_{rz}$ ; при свободном опирании внешнего контура пластины такой учет даст весьма малую поправку). Для сопоставимости результатов значения  $\alpha$ , найденные в [3], разделены на разность  $(1-\nu^2)$ .

Как видно, уже при  $\eta=0,6$  погрешность приближенного решения менее 4%, а при больших значениях  $\eta$  точность модели увеличивается. Конечно, упругое защемление внешнего контура пластины существенно уменьшает область применимости приближенного решения. Так, для  $\eta=0,6$  уже при  $c_0=1$  погрешность достигает почти 17%; в слу-

чае жесткого защемления внешнего контура упрощенная модель лишается смысла, так как поворот радиальных сечений невозможен.

Отметим, что решение, относящееся к упрощенной модели, в сущности соответствует известному решению Р. Граммеля [12], если его распространять на случай упругого защемления одного из контуров кольца.

## THE INFLUENCE OF THE TRANSVERSE SHIFT ON THE STABILITY OF THE ELASTICALLY JAMMED COIL PLATE

M. V. CHERENKOVA

ԸՆԳՎԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԱԶԳԵՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՉԳԱԿԱՆ ԱՄՐԱԿՑՎԱՅ  
ՕՂԱԿԱԶԵՎ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Մ. Վ. ՉԵՐԵՆԿՈՎԱ

Ա Վ Փ Ա Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրված է ներքին եզրը ազատ, իսկ արտաքին եզրը առաձգական ամրակցված օղակաձև անիզոտրոպ սալի կայունության կորստի առանցքախմբարիկ ձևը՝ հավասարաչափ արտաքին ճնշման դեպքում: Հետազոտված է արտաքին բևեռ կրիտիկական արժեքի կախվածությունը սալի հաստությունից և սալի արտաքին եզրի ամրակցման կոշտությունից՝ առանց հաշվի առնելու և հաշվի առնելով ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաները ( $\gamma_{rz}$ ) և սալի անիզոտրոպիան: Դիտարկված է լուծման պարզեցման հնարավորությունը արտաքին եզրով ազատ ճնշված սալերի համար:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dean W. R. The elastic stability of an angular plate, Proceedings of the Royal Society, Series A, Math. and Physical Sciences, 1924, vol. 106, 737.
2. Lokchin A. C. Sur la stabilité d'une plaque renfermée entre deux cercles concentriques, Comptes Rendus, 1929, Tome 189, № 7, p. 316—317.
3. Meissner E. Über das Knicken kreisringförmiger scheiben, Schweizerische Bauzeitung, 1933, Bd. 101, s. 87—89.
4. Григोलюк Э. И. Устойчивость круглых кольцевых пластин, Инженерный сб., 1942, т. 5, вып. 2, с. 83—95.
5. Фельдман М. Р. Устойчивость кольцевой пластины.—Прикладная механика, 1955, № 4, с. 449—464.
6. Лизарев А. Д., Бареева Г. И. Устойчивость упруго-затемненной кольцевой пластины при неоднородном поле напряжений. Инженерный журнал, 1965, т. 5, вып. 3, с. 483—491.



7. Воробкова Н. Л., Преображенский И. И. Обзор исследований по устойчивости пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями. Сб.: Расчет пространственных конструкций.—М.: Стройиздат, вып. XV, 1973, с. 89—112.
8. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.—М.: Наука, 1967. 268 с.
9. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об устойчивости трансверсально изотропных круглых пластинок.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1966, т. XIX, № 2, с. 31—39.
10. Тарнопольский Ю. М., Раза А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков.—Рига: Знание, 1969. 274 с.
11. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.—М.: Наука, 1977. 416 с.
12. Grammel R. Die Kipperscheinungen bei elastischen Ringen, ZAMM, 1927, Bd. 7, Heft 3, ss. 198—210.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию  
3.III.1988