

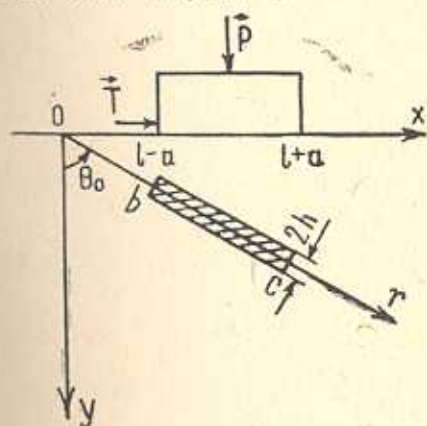
УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ЛИНЕЙНЫМ
 УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГРИЛИЦКИЙ Д. В., ЕВТУШЕНКО А. А., ПАУК В. И.

В литературе широко представлены задачи теории упругости о давлении штампа на однородное основание. Взаимодействие штампа с различного рода неоднородностями тела (вырезами, трещинами, включениями), расположенными вблизи области контакта, изучено недостаточно. В предлагаемой работе поставлена и решена задача о давлении штампа на полуплоскость с произвольно расположенным тонким упругим включением.

Пусть к краю однородной изотропной полуплоскости $y \geq 0$ прижимается силой \vec{P} и сдвигается силой \vec{T} (фиг. 1) жесткий штамп, основание которого описывается гладкой функцией $y=f(x)$. Внутри полуплоскости вблизи области контакта расположено произвольно ориентированное упругое включение малой толщины $2h$. Предполагается, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий. Силы трения, возникающие под штампом, удовлетворяют закону Кулона. Механический контакт включения с матрицей принимается идеальным. Под действием штампа включение как жесткое целое поворачивается по часовой стрелке на неизвестный угол ϵ . В условиях плоской деформации требуется определить контактные напряжения под штампом, коэффициенты интенсивности напряжений у вершин включения и угол ϵ .



Фиг. 1

Граничные условия задачи:

а) на границе полуплоскости $y=0$

$$\tau_{xy}(x) = \sigma_y(x) = 0 \quad \text{при } |x-l| > a \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x) = k\sigma_y(x) \quad \text{при } |x-l| < a$$

$$v'(x) = f'(x) \quad \text{при } |x-l| < a$$

k — коэффициент трения

б) на срединной линии включения

$$\theta = \theta_0$$

$$[\tau_{r\theta}(r, \theta_0 +) + i\sigma_\theta(r, \theta_0 +)] - [\tau_{r\theta}(r, \theta_0 -) + i\sigma_\theta(r, \theta_0 -)] = f_1(r) + if_2(r)$$

$$[u'_r(r, \theta_0 +) + iu'_\theta(r, \theta_0 +)] - [u'_r(r, \theta_0 -) + iu'_\theta(r, \theta_0 -)] = f_3(r) + if_4(r) \quad (2)$$

$$f_k(r) = 0, \quad (k = \overline{1, 4}), \quad r \in [b, c], \quad u'_r = du_r / dr, \quad u'_\theta = du_\theta / dr$$

Индексами „+“ и „-“ отмечены верхняя и нижняя кромки включения, соответственно. Для определения $f_k(r)$, ($k = \overline{1, 4}$) служат условия взаимодействия тонкого упругого включения с матрицей [1]:

$$u'_r(r, \theta_0 +) + u'_r(r, \theta_0 -) = 2k_0 N(r) - k_1 [\sigma_\theta(r, \theta_0 +) + \sigma_\theta(r, \theta_0 -)]$$

$$[u_r(r, \theta_0 +) - u_r(r, \theta_0 -)] / h = -[\tau_{r\theta}(r, \theta_0 +) + \tau_{r\theta}(r, \theta_0 -)] / \nu_0 +$$

$$+ u'_\theta(r, \theta_0 +) + u'_\theta(r, \theta_0 -) \quad (3)$$

$$[u_\theta(r, \theta_0 +) - u_\theta(r, \theta_0 -)] / h = 2k_1 N(r) - k_0 [\sigma_\theta(r, \theta_0 +) + \sigma_\theta(r, \theta_0 -)]$$

$$u'_r(r, \theta_0 +) - u'_r(r, \theta_0 -) = -k_2 [\sigma_\theta(r, \theta_0 +) - \sigma_\theta(r, \theta_0 -)]$$

$$\text{Здесь } N(r) = N_0 + \frac{1}{2h} \int_0^r [\tau_{r\theta}(t, \theta_0 +) - \tau_{r\theta}(t, \theta_0 -)] dt$$

$$N_0 = [\sigma_\theta(b, \theta_0 +) + \sigma_\theta(b, \theta_0 -)] / 2, \quad k_0 = (1 + \nu_0) / (8\mu_0)$$

$$k_1 = (3 - \nu_0) / (8\mu_0), \quad k_2 = (k_0^2 - k_1^2) / k_1, \quad \nu_0 = 3 - 4\nu_0$$

$\mu(\mu_0)$ — модуль сдвига, $\nu(\nu_0)$ — коэффициент Пуассона материала полуплоскости (включения), $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ — напряжения, $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$ — смещения в полярной системе координат (r, θ) с полюсом в точке 0.

В силу линейности поставленную задачу представим как сумму двух задач: о давлении штампа на полуплоскость без включения (задача 1) и об равновесии полуплоскости с тонким упругим включением (задача 2) при условии:

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(r, \theta_0 \pm) = \tau_{r\theta}(r, \theta_0 \pm) - \tau_{r\theta}^{(1)}(r), \quad \sigma_\theta^{(2)}(r, \theta_0 \pm) = \sigma_\theta(r, \theta_0 \pm) - \sigma_\theta^{(1)}(r)$$

$$u'_r{}^{(2)}(r, \theta_0 \pm) = u'_r(r, \theta_0 \pm) - u'_r{}^{(1)}(r), \quad u'_\theta{}^{(2)}(r, \theta_0 \pm) = u'_\theta(r, \theta_0 \pm) - u'_\theta{}^{(1)}(r)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$$

Решение задачи 1 при $\theta = \theta_0$ имеет вид [2, 3]

$$\{\sigma_r^{(1)}(r), \sigma_\theta^{(1)}(r), \tau_{r\theta}^{(1)}(r), u'_r{}^{(1)}(r), u'_\theta{}^{(1)}(r)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \{K_i(r, t)\} \tau_y(t) dt, \quad (i = \overline{0, 4}) \quad (4)$$

$$K_0(r, t) = R_1(r, t)x_1^2 + R_2(r, t)\beta_1^2 + 2R_3(r, t)x_1\beta_1$$

$$K_1(r, t) = R_2(r, t)\beta_1^2 + R_1(r, t)x_1^2 - 2R_3(r, t)x_1\beta_1$$

$$K_2(r, t) = (R_1(r, t) - R_2(r, t))x_1\beta_1 - R_3(r, t)(x_1^2 - \beta_1^2)$$

$$K_3(r, t) = (R_0(r, t) + R_1(r, t))x_1\beta_1 + R_4(r, t)x_1^2 + R_5(r, t)\beta_1^2$$

$$K_4(r, t) = (R_4(r, t) - R_5(r, t))\alpha_1\beta_1 + R_6(r, t)\beta_1^2 - R_7(r, t)\alpha_1^2$$

$$R_1(r, t) = 2(r\beta_1 - kr_0)r_0^2 K(r, t), \quad R_2(r, t) = 2(r\beta_1 - kr_0)r^2\beta_1^2 K(r, t)$$

$$R_3(r, t) = 2(r\beta_1 - kr_0)r_0r\beta_1 K(r, t), \quad R_4(r, t) = [(1-\nu)R_1(r, t) - \nu R_2(r, t)] / 2\mu$$

$$R_5(r, t) = [-\nu R_1(r, t) + (1-\nu)R_2(r, t)] / 2\mu$$

$$R_6(r, t) = [-r_0^2 + k((1-\nu)r^2\beta_1^2 + (2+\nu)r\beta_1r_0^2)]K(r, t) / \nu$$

$$R_7(r, t) = [-\nu r_0^2(r\beta_1 + kr_0) - (1-\nu)r^2\beta_1^2 - kr_0r^2\beta_1^2]K(r, t) / \nu$$

$$K(r, t) = [r^2\beta_1^2 + r_0^2]^{-1/2}, \quad r_0 = ra_1 - l - t, \quad \alpha_1 = \sin\theta_0, \quad \beta_1 = \cos\theta_0$$

Кроме того, согласно работы [4]

$$v^{(1)}(x, 0) = \frac{k(1-x)}{4\mu} \sigma_y(x) + \frac{1+x}{4\mu\pi} \int_{-a}^a \frac{\tau_y(t)}{t-x} dt, \quad |x-l| < a \quad (5)$$

Используя результаты работы [5] для случая задачи 2, получаем

а) на линии $\theta = \pi/2$

$$v^{(2)}(x, 0) = u_0^{(2)}(r, \pi/2) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \sum_{i=1}^4 Q_i(r, t) f_i(t) dt - a_4 \frac{A_2}{r} \quad (6)$$

$$Q_1(r, t) = [(1-x)\alpha_1 \dot{J}_1(r, t) + 2\beta_1 \dot{J}_2(r, t) - (1-x)\beta_1 \dot{J}_3(r, t)] / (4\mu r)$$

$$Q_2(r, t) = [(1-x)\beta_1 \dot{J}_1(r, t) + (1+x)d_1 \dot{J}_2(r, t) + 2\beta_1 \dot{J}_4(r, t)] / (4\mu r)$$

$$Q_3(r, t) = -\beta_1 [\dot{J}_1(r, t) + \dot{J}_4(r, t)] / r, \quad Q_4(r, t) = \beta_1 \dot{J}_3(r, t) / r$$

$$\dot{J}_1(r, t) = rt\beta_1 / T(r, t), \quad \dot{J}_2(r, t) = \frac{1}{2} (t^2 - r^2) / T(r, t)$$

$$\dot{J}_3(r, t) = rt(2rt + (t^2 + r^2)\alpha_1) / T^2(r, t)$$

$$\dot{J}_4(r, t) = rt(t^2 - r^2)\beta_1 / T^2(r, t), \quad T(r, t) = t^2 + r^2 - 2rt\alpha_1$$

б) на линии $\theta = \theta_0$

$$\sigma_0^{(2)}(r, \theta_0 +) = \frac{1}{2} f_1(r) + a_1 t_2(r) - a_2 t_3(r) + a_3 h_3(r)$$

$$\sigma_0^{(2)}(r, \theta_0 +) = \frac{1}{2} f_2(r) - a_1 t_1(r) + a_2 t_4(r) + a_3 h_2(r)$$

$$u_r^{(2)}(r, \theta_0 +) = \frac{1}{2} f_3(r) + a_2 t_1(r) - a_1 t_4(r) + 2\mu a_2 h_3(r) + \frac{a_4}{r} A_1$$

$$u_0^{(2)}(r, \theta_0 +) = \frac{1}{2} f_4(r) + a_3 t_2(r) - a_2 t_3(r) + 2\mu a_2 h_4(r) + \frac{a_4}{r} A_2 \quad (7)$$

$$a_1 = (1-x) / (2\mu(1+x)), \quad a_2 = 2\mu / (1+x), \quad a_3 = x / (2\mu(1+x))$$

$$a_4 = (1+x)/(4\mu), \quad t(r) = \frac{1}{\pi} \int_b^c \frac{f_i(t)}{t-r} dt, \quad A_i = \frac{1}{\pi} \int_b^c f_i(t) dt$$

$$h_i(r) = \frac{1}{\pi} \int_b^c \sum_{j=1}^4 k_{ij}(r,t) f_j(t) dt, \quad (i = \overline{1,4})$$

$k_{ij}(r, t)$ — регулярные ядра.

Подстановка соотношений (5), (6) в граничное условие (1), а выражений (4), (7) в условия взаимодействия (3) с учетом обозначений (2) приводит к системе пяти сингулярных интегральных уравнений относительно искомого нормального давления под штампом $\sigma_y(t)$ и функций скачков $f_i(t)$, ($i = \overline{1,4}$)

$$\begin{aligned} \gamma_0 q(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{q(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 [\lambda_{1j}(\xi) + Q_{1j}(\xi, \eta)] \varphi_j(\eta) d\eta = \varphi'(\xi), \quad |\xi| < 1 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 R_{k0}(\zeta, \eta) q(\zeta) d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 \left[\frac{z_{kj}}{\eta - \zeta} + \lambda_{kj}(\zeta) + b_{kj} S(\zeta, -\eta) + \right. \\ \left. + R_{kj}(\zeta, \eta) \right] \varphi_j(\eta) d\eta + \lambda_{k\xi} = 0, \quad (k = \overline{2,4}) \end{aligned} \quad (8)$$

$$z_3(\zeta) = \gamma_1 \varphi_2(\zeta), \quad |\zeta| < 1$$

Здесь $q(\zeta) = \sigma_y(t/a)$, $\varphi'(\xi) = f'(l+a\xi)$

$$\varphi_i(\eta) = f_i(a_0 + b_0 \eta), \quad (i = 1, 2), \quad \varphi_i(\eta) = \frac{4\mu}{1+x} f_i(a_0 + b_0 \eta), \quad (i = 3, 4)$$

$$a_1 \tilde{z} = r - l, \quad b_0 \tilde{z} = r - a_0, \quad a_0 = (c+b)/2, \quad b_0 = (c-b)/2$$

$$\gamma_0 = k \frac{1-x}{1+x}, \quad \gamma_1 = -4\delta \frac{1-x_0}{(3-x_0)(1+x_0)}, \quad S(\zeta, -\eta) = \text{sign}(\zeta - \eta)$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{13} = 0, \quad \lambda_{12} = (1+x)/(2\delta+1-x), \quad \lambda_{1k} = 0, \quad (k = 1, 3, 4), \quad \lambda_{2k} = 0, \quad (k = \overline{2,4})$$

$$\lambda_{12}(\xi) = 1/(\xi + d_3), \quad \lambda_{21}(\zeta) = 2/(\zeta + d_2/d_1) + (1+x_0)d_0\delta/(8(1+x))$$

$$\lambda_{22}(\zeta) = 1/(\zeta + d_2/d_1), \quad \lambda_{33} = d_0/4, \quad \lambda_{31} = \lambda_{34} = 0$$

$$\lambda_{41} = (3-x_0)d_0\delta/(\delta(1+x)), \quad \lambda_{44} = d_0/4, \quad \lambda_{42} = \lambda_{43} = 0$$

$$z_{21} = [8x - (1+x_0)(1-x)\delta]/(4(1+x)), \quad z_{22} = z_{23} = 0$$

$$z_{24} = [-2(1-x) + (1+x)\delta]/(4(1+x)), \quad z_{31} = z_{34} = 0$$

$$z_{32} = 2[x - (1-x)\delta]/(1+x)^2, \quad z_{33} = (1-x+2\delta)/(2(1+x))$$

$$z_{41} = (1-x)(1+x_0)\delta/(2(1+x))^2, \quad z_{44} = (1-x+2\delta)/(4(1+x)), \quad z_{42} = z_{43} = 0$$

$$b_{21} = \pi d_0(1+x_0)/(8(1+x)), \quad b_{2k} = 0, \quad (k = \overline{2,4}), \quad b_{31} = \pi d_0/4$$

$$b_{3k} = 0, \quad (k = 1, 2, 4), \quad b_{41} = (3-x_0)d_0\delta/8, \quad b_{44} = (x_0-1)/(4(1+x))$$

$$b_{42} = b_{43} = 0, \quad d_0 = b_0/h, \quad d_1 = b_0/a, \quad d_2 = a_0/a, \quad d_3 = l/a, \quad \delta = \nu/\nu_0$$

$$R_{2k}(\tau, \bar{\tau}) = [(3 - x_0)\delta k_{2k}(\tau, \bar{\tau}) + 4k_{3k}(\tau, \bar{\tau})] / (1+x)^2$$

$$R_{3k}(\tau, \bar{\tau}) = [4k_{1k}(\tau, \bar{\tau}) \delta k_{1k}(\tau, \bar{\tau})] / (1+x)^2$$

$$R_{4k}(\tau, \bar{\tau}) = -(1+x_0)\delta k_{2k}(\tau, \bar{\tau}) / (1+x)^2, \quad (k=1, 2)$$

$$R_{i,k+2}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1+x}{4} R_{ik}(\tau, \bar{\tau}), \quad (i=2, 4, \quad k=1, 2)$$

$$R_{20}(\zeta, \tau) = K_3(\zeta, \tau) + \frac{3-x_0}{8} \delta K_1(\zeta, \tau) - \frac{1+x_0}{8} \sqrt{\min(1, \delta)} K_0(-1, \tau)$$

$$R_{30}(\zeta, \tau) = K_4(\zeta, \tau) - \delta K_3(\zeta, \tau) - K_4(-1, \tau) + \min(1, \delta) K_2(-1, \tau)$$

$$R_{40}(\zeta, \tau) = -\frac{1+x_0}{8} \delta K_2(\zeta, \tau) - \frac{3-x_0}{8} \sqrt{\min(1, \delta)} K_0(-1, \tau) + [(1+x)K_1(-1, \tau) - (3-x)K_0(-1, \tau)] \min(1, \delta) / 8$$

Использование дополнительной неизвестной ϵ , характеризующей жесткий поворот включения, вынуждает принять во внимание дополнительное условие, требующее равенства нулю главного момента M сил, действующих на включение со стороны матрицы

$$M = \int_0^c r(\sigma_0(r, \theta_0 +) - \sigma_0(r, \theta_0 -)) dr = 0 \quad (9)$$

Система уравнений (8) получена для произвольных механических и геометрических параметров задачи. Так, полагая $\delta=1$, получаем систему уравнений, описывающую вдавливание штампа в однородную полуплоскость. Устремив $\delta \rightarrow \infty (0)$, найдем систему уравнений задачи о давлении штампа на полуплоскость с трещиной (абсолютно жестким включением).

Для случая штампа с прямолинейным горизонтальным основанием $\varphi'(\xi) = 0$ построим решение системы сингулярных интегральных уравнений (8), (9) методом механических квадратур [6]. Пусть

$$q(\bar{\tau}) = \psi_n(\xi)(1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta, \quad \alpha + \beta = -1, \quad 0 < |\alpha|, |\beta| < 1$$

$$\varphi_i(\xi) = \varphi_i^{(n)}(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}, \quad (i=1, 4), \quad \gamma_0 = -\text{ctg} \pi \alpha$$

$\psi_n(\xi)$, $\varphi_i^{(n)}(\xi)$, ($i=1, 4$) - ограниченные функции. С помощью квадратурных формул Гаусса-Якоби и Гаусса-Чебышева [6] приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_n(\tau_k)}{\tau_k - \bar{\tau}_m} A_k + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \left\{ \sum_{k=1}^n Q_j(\bar{\tau}_m, \tau_k) B_k \varphi_j^{(n)}(\tau_k) + \lambda_{1j} C_j \right\} = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n R_{i0}(\tau_k, \bar{\tau}_m) \psi_n(\tau_k) A_k + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{z_{ij}}{\tau_k - \bar{\tau}_m} + b_{ij} S(\bar{\tau}_m - \tau_k) + \right. \right.$$

(10)

$$+ R_{ij}(\zeta_m, \tau_k) \left[\varphi_j^{(n)}(\tau_k) B_k + \lambda_{ij}(\zeta_m) C_j \right] + \lambda_i \varepsilon = 0, \quad (i = \overline{2, 4})$$

$$\varphi_3(\zeta_m) = \gamma_1 \varphi_2(\zeta_m), \quad (m = \overline{1, n-1})$$

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \varphi_2^{(n)}(\tau_k) B_k = 0$$

Здесь

$$A_k = -\frac{\pi 2^{-k} P_{n-1}^{(-\gamma_1, -\gamma)}(\tau_k)}{\sin \pi \alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau_k)}, \quad (k = \overline{1, n}), \quad B_k = \begin{cases} 1/n, & (k = \overline{2, n-1}) \\ 1/2n, & (k = \overline{1, n}) \end{cases}$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\tau_k) = 0, \quad \gamma_k = \cos \frac{\pi(k-1)}{n-1}, \quad (k = \overline{1, n})$$

$$P_{n-1}^{(-\gamma_1, -\gamma)}(\zeta_m) = 0, \quad \zeta_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2(n-1)}, \quad (m = \overline{1, n-1})$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cdot)$ — полиномы Якоби. К системе уравнений (10) следует прибавить дискретизированный аналог условий равновесия штампа и включения, имеющий вид

$$\sum_{k=1}^n \psi_n(\tau_k) A_k = -1, \quad \sum_{k=1}^n \varphi_j^{(n)}(\tau_k) B_k = C_i, \quad (i = \overline{1, 4}) \quad (11)$$

Значения постоянных C_i ($i = \overline{1, 4}$) приведены в [7].

Система уравнений (10), (11) решалась численно с помощью ЭВМ ЕС-1045 при следующих значениях параметров задачи: $\nu_0 = \nu = 0,3$, $d_0 = 10$, $d_1 = 1$.

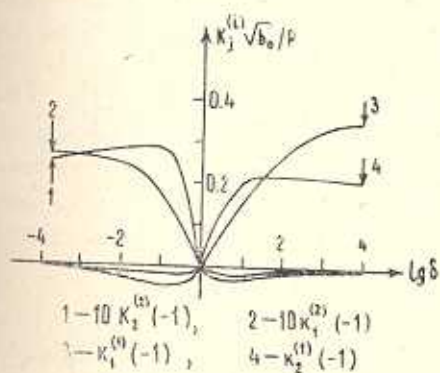
В табл. 1 приведена зависимость контактного давления под штампом от коэффициента трения k и от относительной жесткости включения δ . Результаты получены при значениях $d_2 = d_3 = 2$, $\theta_0 = \pi/3$. Видно, что параметры k и δ незначительно влияют на характер изменения $q(\tau)$. Увеличение k приводит к уменьшению $q(\tau)$ в центральных

Таблица 1

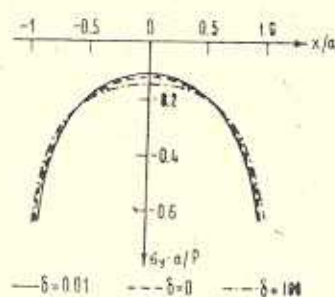
τ_k	$q(\tau_k)$					
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1,0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0,80	-0,1989	-0,1821	-0,2005	-0,1934	-0,2093	-0,2176
0,71	-0,1368	-0,1304	-0,1432	-0,1322	-0,1482	-0,1369
0,45	-0,1094	-0,1087	-0,1124	-0,1109	-0,1120	-0,1104
0,16	-0,0975	-0,0984	-0,0957	-0,0971	-0,0941	-0,0964
-0,16	-0,0970	-0,0981	-0,0952	-0,0960	-0,0933	-0,0956
-0,45	-0,1093	-0,1003	-0,1097	-0,1029	-0,1092	-0,1019
-0,71	-0,1392	-0,1222	-0,1465	-0,1378	-0,1476	-0,1404
-0,89	-0,2010	-0,1931	-0,2240	-0,2113	-0,2419	-0,2337
-1,0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\delta = 0,01$	$\delta = 100$	$\delta = 0,01$	$\delta = 100$	$\delta = 0,01$	$\delta = 100$
	$k = 0$		$k = 0,3$		$k = 0,5$	

точках области контакта и к его увеличению у краёв штампа. Аналогичная картина наблюдается при увеличении жесткости включения, то есть уменьшении параметра δ .

Кроме контактного давления в задаче определялись значения коэффициентов интенсивности напряжений на торцах включения по формулам, приведенным в [5]. На фиг. 2 показана зависимость этих коэффициентов от параметра δ , ($10^{-4} < \delta < 10^4$). Видно, что для мягких ($\delta \gg 1$) включений коэффициенты $k_1^{(2)}(-1)$ и $k_2^{(2)}(-1)$ значительно меньше $k_1^{(1)}(-1)$ и $k_2^{(1)}(-1)$. Для жестких ($\delta \ll 1$) включений, наоборот, определяющую роль играют $k_1^{(2)}(-1)$ и $k_2^{(2)}(-1)$. При отсутствии вклю-



Фиг. 2.



Фиг. 3.

чения ($\delta=1$) коэффициенты $k_1^{(1)}(-1)$, $k_2^{(1)}(-1)$, ($i=1, 2$) незначительно отличаются от нуля. Фиг. 2 построена при значениях $d_2=d_3=2$, $\theta_0=\pi/3$.

При решении также находилась величина угла жесткого поворота включения ε . В табл. 2 приведены значения $\varepsilon_0 b_0/P$ в зависимости от коэффициента трения k и угла θ_0 . Табл. 2 построена при $d_2=d_3=2$, $\delta=0.01$.

С помощью численного анализа показано, что если один из параметров d_2 или d_3 при втором фиксированном и равном 2 достигает значений 5—6, то есть штамп и включение расположены достаточно далеко друг от друга, то коэффициенты $k_1^{(1)}(-1)$, $k_2^{(1)}(-1)$, ($i=1, 2$) станут пренебрежимо малыми.

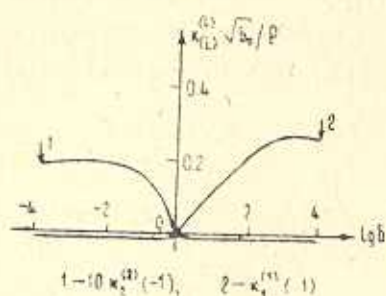
Таблица 2

	$k=0$	$k=0.15$	$k=0.3$	$k=0.45$	$k=0.6$
$\theta_0=0^\circ$	0.1797	0.2058	0.2327	0.2606	0.2893
$\theta_0=15^\circ$	0.1578	0.1837	0.2106	0.2387	0.2679
$\theta_0=30^\circ$	0.1157	0.1448	0.1711	0.1986	0.2274
$\theta_0=45^\circ$	0.0818	0.1056	0.1305	0.1567	0.1840
$\theta_0=60^\circ$	0.0459	0.0755	0.0960	0.1221	0.1541
$\theta_0=75^\circ$	-0.0027	0.0269	0.0474	0.0736	0.1055

Отметим случай геометрической и силовой симметрии задачи, который получается при $\theta_0=0$, $k=0$, $d_3=0$. Наличие включения приводит лишь к двум скачкам: $f_1(r)$ — касательных напряжений $\tau_{r\theta}(r)$ и $f_4(r)$ — производной от нормального смещения $u_r'(r)$.

На фиг. 3 показано распределение контактного давления под штампом в зависимости от параметра δ .

Фиг. 3 построена при $\nu_0=\nu=0,3$, $d_0=10$, $d_1=1$, $d_2=2$.



Фиг. 4

Фиг. 4 дает зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $k_2^{(2)}(-1)$ и $k_1^{(1)}(-1)$ от параметра δ . Она построена при тех же геометрических и механических параметрах задачи, что и фиг. 3.

Численный анализ показал, что если $d_2 > 5$, то есть включение расположено „далеко“ от края полуплоскости, оно не влияет на распределение контактных напряжений под штампом.

PRESSURE OF A PUNCH ON THE HALF-PLANE WITH A LINEAR ELASTIC INCLUSION

D. V. GRILITSKY, A. A. YEVTUSHENKO, V. I. PAOUK

ԳՐԱՇՄԻ ԸՆՇՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌՈՁԳԱԿԱՆ ԿԵՐԳՐԱԿՈՎ
ԿԻՍԱԶԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

Գ. Վ. ԳՐԻԼԻՏԿԻ, Ա. Ա. ԵՎՏՈՒՇԵՆԿՈ, Վ. Ի. ՊԱՍՈՒԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում լուծված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր կամայական ձևով դասավորված բարակ առաձգական ներդրակ պարունակող կիսահարթության վրա դրոշմի ճնշման մասին: Կիսահարթության եզրը դրոշմից դուրս ազատ է արտաքին ճիգերից: Դրոշմի տակ շփման ուժերը բավարարում են Կուլոնի օրենքին: Ներդրակը մոդելավորվում է լարումների և ներդրակի միջին դծի վրա տեղափոխումների ածանցյալների թույլնեղում:

Խնդիրը բերված է հինգ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի: Թվային վերլուծությամբ գտնված է դրոշմի տակ կոնտակտային ճնշման բախումը, ներդրակի ճակատներում լարումների ինտենսիվության գործակիցների արժեքները, ինչպես նաև, ներդրակի կոշտ պտույտի մեծությունը խնդրի մեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերի տարրեր արժեքների գեպրում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Сулим Г. Т. Сравнительный анализ моделей изгиба тонких упругих включений. Львов; 1985. 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4487—85 Деп. 34.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.: Наука, 1967. 402 с.
3. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 468 с.
4. Грилицкий Д. В., Попович Б. И. Плоские контактные задачи термоупругости. (Науч. пособие, Львов: ЛДУ, 1973. 114 с. На укр. яз.).
5. Ештушенко А. А. Упругое равновесие составной плоскости с произвольно расположенным упругим включением.—Прикл. матем. и механика, 1980, 44, № 5, с. 875—881.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости и электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
7. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями.—Прикл. матем. и механика. 1975, 39, № 3, с. 520—529.

Львовский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.VII.1987