

УДК 531.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
 ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОГО ЗВЕНА МАНИПУЛЯТОРА НА
 ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

ГУКАСЯН А. А.

Работа является продолжением [1] и посвящена динамике и оптимизации управляемых плоских движений нагруженного упругого звена манипулятора на подвижном основании. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости.

1. *Механическая модель и уравнения движения.* Рассматривается механическая модель упругого манипулятора, кинематическая схема которого приведена на фигуре. Для описания уравнений движения манипулятора введем инерциальную $OXYZ$ и неинерциальную $O'X'Y'Z'$ системы координат. Управление вращательным движением стрелы $O'P$ в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$ осуществляется при помощи сосредоточенного момента сил $M(t)$, приложенного относительно оси $O'Z'$. Для описания упругих смещений стрелы вводится вращающаяся относительно $O'X'Y'Z'$ система координат $O'xuz$. Введем обозначения: L —длина стержня (стрелы); $x(0 \leq x \leq L)$ —координата точки нейтральной линии стрелы; φ —угол поворота стрелы относительно $O'X'$; $\vec{R}_0(t) = (x_0(t), y_0(t))^T$ —радиус-вектор основания упругого стержня (символ T означает транспонирование); $\vec{R}(t, x)$ —радиус-вектор точки нейтральной линии стержня с координатой x в момент времени t относительно точки O' ; $\vec{\omega}$ —вектор угловой скорости вращения стержня; $w(t, x)$ —упругие деформации стрелы; $\rho(x)$ —линейная плотность стрелы; $EJ(x)$ —жесткость стрелы на изгиб (E —модуль Юнга материала, $J(x)$ —момент инерции поперечного сечения стержня в точке x); $s(x)$ —площадь поперечного сечения стрелы. Функции $\rho(x)$, $J(x)$, $s(x)$ ($0 \leq x \leq L$) предполагаются достаточно гладкими. Груз в схвате манипулятора считается материальной точкой массой m_1 . Ускорение силы тяжести \vec{G} считается направленным вдоль оси OY .

В соответствии с линейной теорией упругости считаем, что упругие смещения стрелы малы (большая изгибная жесткость $EJ(x)$) по сравнению с ее длиной $w/L = O(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$, а максимальный период собственных упругих колебаний стрелы T_0 мал по сравнению с характерным временем процесса управления T ($T_0/T = O(\epsilon^{1/2})$) [2]. На-

чальные распределения $\omega(t_0, x)$, $\omega_l(t_0, x)$ при этом считаются малыми, а $\varphi \sim 1$, $\dot{\varphi} \sim \varepsilon^{1/2}$, $\ddot{\varphi} \sim \varepsilon$.

Используя принцип Гамильтона—Остроградского [3], получим линейное интегро-дифференциальное уравнение движения стрелы манипулятора, в виде

$$\int_0^L \rho(x) s(x) x [x \ddot{\varphi} + (\ddot{y}_0 + g) \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi + \ddot{w}(t, x)] dx + I_1 \ddot{\varphi} +$$

$$+ I_2 [\ddot{w}(t, L) + (\ddot{y}_0 + g) \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi] = M; \quad I_1 = L^2 m_1, \quad I_2 = L m_2$$

с начальными условиями $\varphi(t_0) = \varphi^0$, $\dot{\varphi}(t_0) = \omega^0$, $\omega(t_0, x) = f_1(x)$, $\dot{\omega}(t_0, x) = f_2(x)$.

Из (1.1) следует, что управляющий момент $M(t)$ имеет порядок ε .

Уравнение колебаний упругой стрелы манипулятора имеет вид:

$$\rho(x) s(x) \ddot{w}(t, x) + [EJ(x) w''(t, x)]'' = -\rho(x) s(x) [x \ddot{\varphi} - \ddot{x}_0 \sin \varphi + (\ddot{y}_0 + g) \cos \varphi]$$

с граничными условиями

$$\omega(t, 0) = \omega'(t, 0) = \omega''(t, L) = 0$$

$$[EJ(x) w''(t, L)]' = m_1 [L \ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, L) + (\ddot{y}_0 + g) \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi]$$

где штрих означает производную по x .

2. *Задача кинематического управления.* Ниже для определенности исследуется задача поворота однородной ($\rho, J, s = \text{const}$) нагруженной упругой стрелы манипулятора при $g=0$, $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0 = \text{const}$.

Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом.

Пусть в произвольный начальный момент времени $t=t_0$ состояние системы определяется величинами

$$\varphi(t_0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega^0, \quad \omega(t_0, x) = f_1(x), \quad \dot{\omega}(t_0, x) = f_2(x)$$

Требуется за заданное время T привести груз из начального состояния (2.1) в заданное конечное состояние с гашением упругих колебаний в конце процесса управления,

$$\varphi(T) = \varphi^* \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \quad \omega(T, x) = \dot{\omega}(T, x) = 0$$

и минимизировать функционал $\Phi[u]$, характеризующий качество управления.

Управление системой (1.1)—(1.3), (2.1), (2.2) осуществляется изменением углового ускорения вращения упругого звена манипулятора. В качестве критерия оптимальности возьмем квадратичный функционал.

$$\Phi[u] = \int_0^T [u(t)]^2 dt \rightarrow \min_u, u \in U, (u(t) = \ddot{\varphi}(t)) \quad (2.3)$$

физический смысл которого составляют энергетические затраты привода. В уравнениях (1.1), (1.2) и в условиях (1.3) перейдем к новым безразмерным переменным

$$x_1 = x/L, \quad w_1(t, x) = w(t, x)/L, \quad x_{01} = x_0/L, \quad y_{01} = y_0/L \quad (2.4)$$

$$t_1 = t / (\rho L^3 s / EJ)^{1/2}, \quad M_1 = ML / EJ$$

Уравнения (1.1), (1.2) и условия (1.3) для переменных (2.4) с последующим опусканием индексов «1» принимают вид

$$\int_0^1 x [x \ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi + \ddot{w}(t, x)] dx + \gamma [\ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi + \ddot{w}(t, 1)] = M \quad (2.5)$$

$$\ddot{w}(t, x) + w^{IV}(t, x) = -(x \ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi) \quad (2.6)$$

$$w(t, 0) = w'(t, 0) = w'(t, 1) = 0$$

$$w'''(t, 1) = \gamma [\ddot{\varphi} + \ddot{w}(t, 1) + \ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi], \quad \gamma = m_1 / m \quad (2.7)$$

Собственные функции задачи (2.6), (2.7) с точностью до постоянных c_n определяются следующим образом:

$$X_n(x) = c_n [\operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x + \beta_n (\sin \lambda_n x - \operatorname{sh} \lambda_n x)] \quad (2.8)$$

где $\beta_n = (\operatorname{ch} \lambda_n + \cos \lambda_n) / (\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

c_n — определяются из условий ортогональности собственных функций. Собственные значения λ_n задачи (2.6), (2.7) определяются из уравнений

$$1 + \operatorname{ch} \lambda_n \cos \lambda_n + \gamma \lambda_n (\operatorname{sh} \lambda_n \cos \lambda_n - \operatorname{ch} \lambda_n \sin \lambda_n) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.6) при (2.7) ищем в виде

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \quad (2.10)$$

Из (2.6), (2.7), (2.10) следует, что $C_n(t)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{C}_n(t) + \lambda_n^4 C_n(t) = f_n[\varphi(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{R}_0(t)], \quad n \geq 1$$

где

$$f_n[\varphi(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{R}_0(t)] = \left\{ -\ddot{\varphi} \left[\int_0^1 x X_n(x) dx + \gamma X_n(1) \right] + \right. \quad (2.11)$$

$$\left. + [\ddot{x}_0 \sin \varphi - \ddot{y}_0 \cos \varphi] \left[\int_0^1 X_n(x) dx + \gamma X_n(1) \right] \right\} / \alpha_n^2$$

Так как соотношения (2.1)–(2.3) и уравнения (2.5)–(2.7), (2.11) автономны (стационарны), то в задаче оптимального управления зависимость управления от времени будет входить в виде разностей $t-t_0$, $T-t_0$. Поэтому ее можно рассматривать при $t_0=0$, а затем произвести замену $t \rightarrow t-t_0$, $T \rightarrow T-t_0$ [4].

3. *Приближенное решение задачи оптимального управления.* После решения уравнения (2.6) при (2.7), задачу оптимального управления (2.1)–(2.3) можно записать в виде

$$\ddot{C}_n(t) + \lambda_n^2 C_n(t) = -a_n u(t) + b_n (\ddot{x}_0 \sin \varphi - \ddot{y}_0 \cos \varphi), \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

$$\dot{\varphi}(t) = u(t), \quad \omega(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t u(\tau)(t-\tau) d\tau$$

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega^0, \quad \varphi(T) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0$$

$$\Phi[u] = \int_0^T [u(t)]^2 dt \rightarrow \min_u, \quad n \geq 1$$

где

$$\alpha_n^2 a_n = \int_0^T x X_n(x) dx + \alpha_n^2 \gamma X_n(1), \quad \alpha_n^2 b_n = \int_0^T X_n(x) dx + \alpha_n^2 \gamma X_n(1)$$

Предполагаем, что ускорение основания мало и функции \ddot{x}_0 , \ddot{y}_0 можно представить следующим образом:

$$\ddot{x}_0 = \varepsilon^2 b_x, \quad \ddot{y}_0 = \varepsilon^2 b_y, \quad \text{где } b_x, b_y \sim 1, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в уравнение (3.1), получим

$$\ddot{C}_n(t) + \lambda_n^2 C_n(t) = -a_n u(t) + \varepsilon^2 b_n (b_x \sin \varphi - b_y \cos \varphi) \quad (3.3)$$

Применением принципа максимума к счетной системе уравнений для $C_n(t)$ при $\varepsilon=0$, задача оптимального управления (2.1)–(2.3) приводится к решению следующей проблемы моментов [5].

$$C_n(t) = A \cos \lambda_n^2 t + B \sin \lambda_n^2 t - \frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^t \sin^2 \lambda_n^2 (t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

$$\omega(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t (t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$\varphi(T) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \quad C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0 \quad (3.6)$$

$$\Phi[u] = \int_0^T [u(t)]^2 dt \rightarrow \min_u, \quad n \geq 1 \quad (3.7)$$

Решение задачи (3.4)–(3.7) ищем в виде [1]

$$u_0(t) = A_* t + B_* + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \lambda_n^2 t + B_n \cos \lambda_n^2 t) \quad (3.8)$$

В нулевом приближении для оптимального поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора имеем

$$u_0^{(0)}(t) = A_*^{(0)} t + B_*^{(0)}, \quad A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = 0 \quad (3.9)$$

Удовлетворяя соотношениям (3.5), (3.6), получим для коэффициентов $A_*^{(0)}$, $B_*^{(0)}$ следующие выражения:

$$A_*^{(0)} = -12(\varphi^* - \varphi^0 - \omega^0 T / 2) / T^2, \quad B_*^{(0)} = 6(\varphi^* - \varphi^0 - 2\omega^0 T / 3) / T^2 \quad (3.10)$$

Следовательно, оптимальное управление $u_0(t)$ при $\varepsilon = 0$, обеспечивающее поворот абсолютно жесткой модели звена манипулятора, определяется в виде

$$u_0^{(0)}(t) = -6(2t/T - 1)(\varphi^* - \varphi^0) / T^2 + 2(3t/T - 2)\omega^0 / T \quad (3.11)$$

Определим первое приближение для A_n и B_n . После подстановки $A_*^{(0)}$, $B_*^{(0)}$ в (3.8), учитывая соотношение $C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{\sin}{\cos} [\lambda_n^2 (T - \tau)] \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^{(1)} \sin \lambda_m^2 \tau + B_m^{(1)} \cos \lambda_m^2 \tau) d\tau = \\ & = -\frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^T u_0^{(0)}(\tau) \frac{\sin}{\cos} [\lambda_n^2 (T - \tau)] d\tau + A \frac{\cos}{-\sin} (\lambda_n^2 T) + B \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 T) \\ & \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решая счетную систему уравнений (3.12) при $n = m$, получим искомые коэффициенты $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$ ($n \geq 1$) в виде

$$A_n^{(1)} = -2\lambda_n^2 A / T a_n - D_n^s, \quad B_n^{(1)} = 2\lambda_n^2 B / T a_n - D_n^c \quad (3.13)$$

где $D_n^{s,c} = \frac{2}{T} \int_0^T \left[-\frac{6}{T^2} \left(2\frac{t}{T} - 1 \right) (\varphi^* - \varphi^0) + \frac{2}{T} \left(\frac{3t}{T} - 2 \right) \omega^0 \right] \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 \tau) d\tau$

В следующем приближении A_* , B_* определяются согласно (3.5) после подстановки (3.13) в (3.8).

$$A_*^{(1)} = A_*^{(0)} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \left[C_n^s - \frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) \right] + B_n^{(1)} \left[C_n^c - \frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T \right] \right\} / T^2$$

$$B_*^{(1)} = B_*^{(0)} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) - C_n^s \right] + B_n^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T - C_n^c \right] \right\} / T \quad (3.14)$$

где

$$C_n^{s,c} = \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) \frac{\sin}{\cos} (\lambda_n^2 \tau) d\tau$$

Аналогично строятся последующие приближения для A_n , B_n и A_n , B_n . Доказательство сходимости рядов (3.8), (3.12), (3.14) можно получить стандартным образом на основе теоремы о неподвижной точке [6].

Итак, оптимальное, в смысле критерия качества $\Phi[u]$ (3.7) управление $u_0(t)$ с абсолютной погрешностью $O(\varepsilon^2)$ обеспечивает приведение упругой стрелы манипулятора в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса. Более точные вычисления в рамках поставленной задачи неоправданы, так как уравнения (2.5)–(2.6) являются приближенными: в них отброшены члены $O(\varepsilon^2)$.

$$u_0^{(1)}(t) = A_0^{(1)}t + B_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)}\sin\lambda_n^2 t + B_n^{(1)}\cos\lambda_n^2 t) \quad (3.15)$$

Оптимальный закон изменения угла поворота $\varphi(t)$ при $\varepsilon=0$ после приближенного определения управляющей функции $u_0(t)$ можно записать следующим образом:

$$\varphi_0(t) = \varphi^0 + \omega^0 t + \int_0^t (t-\tau)u_0^{(1)}(\tau)d\tau \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления движением упругой стрелы манипулятора с учетом движения основания. После сделанных предположений (3.2) задача приводится к решению следующей проблемы моментов [5]:

$$C_n(t) = A\cos\lambda_n^2 t + B\sin\lambda_n^2 t - \frac{a_n}{\lambda_n^2} \int_0^t u(\tau)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau + \\ + \varepsilon^2 b_n \left[\int_0^t (b_x \sin\varphi_0 - b_y \cos\varphi_0)\sin\lambda_n^2(t-\tau)d\tau \right] / \lambda_n^2 \quad (3.17)$$

$$u(t) = \ddot{\varphi}(t), \quad \omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \omega^0 + \int_0^t u(\tau)d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi^0 + \int_0^t (t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.18)$$

$$\varphi(T) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = \omega^* = 0, \quad C_n(T) = \dot{C}_n(T) = 0 \quad (3.19)$$

$$\Phi[u] = \int_0^T |u(\tau)|^2 d\tau \rightarrow \min_u, \quad n \geq 1 \quad (3.20)$$

где $\varphi_0(t)$ определяется из (3.16).

Решение задачи оптимального управления (3.17)–(3.20) ищем аналогично (3.8)

$$u_n(t) = A_n t + B_n + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\lambda_n^2 t + B_n \cos\lambda_n^2 t) \quad (3.21)$$

где коэффициенты A_n , B_n , A_{nc} , B_{nc} также можно определить методом последовательного приближения. В нулевом приближении для поворота абсолютно жесткой модели звена манипулятора ($A_{nc} = B_{nc} = 0$) коэффициенты $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$ управления $u_n(t)$ совпадают с коэффициентами $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$ (3.10).

Первое приближение для коэффициента A_{nc} , B_{nc} определяется из (3.17), (3.19) после подстановки $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$ в (3.21):

$$A_{nc}^{(1)} = -2i_n^2 A / T a_n - D_{nc}^s, \quad B_{nc}^{(1)} = 2i_n^2 B / T a_n - D_{nc}^c$$

где

$$D_{nc}^{s,c} = D_{nc}^{s,c} + \varepsilon^2 b_n \int_0^t (b_x \sin \varphi_0 - b_y \cos \varphi_0) \frac{\sin(i_n^2 \tau)}{\cos(i_n^2 \tau)} d\tau \quad (3.22)$$

Следующее приближение для коэффициентов A_n , B_n определяется из (3.18), (3.19) после подстановки $A_{nc}^{(1)}$, $B_{nc}^{(1)}$ в (3.21)

$$A_n^{(1)} = A_n^{(0)} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{nc}^{(1)} \left[C_n^s - \frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) \right] + B_{nc}^{(1)} \left[C_n^c - \frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T \right] \right\} / T^2 \quad (3.23)$$

$$B_n^{(1)} = B_n^{(0)} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{nc}^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} (1 - \cos \lambda_n^2 T) - C_n^s \right] + B_{nc}^{(1)} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} \sin \lambda_n^2 T - C_n^c \right] \right\} / T$$

где $C_n^{s,c}$ — определяются так, как в (3.14).

Следовательно, управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое обеспечивает оптимальное по критерию качество $\Phi[u]$ приведение упругой стрелы манипулятора на подвижном основании в заданное положение с гашением упругих колебаний в конце процесса, определяется приближенно и имеет вид

$$u_n^{(1)}(t) = A_n^{(1)} t + B_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{nc}^{(1)} \sin \lambda_n^2 t + B_{nc}^{(1)} \cos \lambda_n^2 t) \quad (3.24)$$

$$t \in [0, T], \quad u_n^{(1)}(t) = 0, \quad t > T$$

Согласно (3.18), (3.24) $\varphi(t)$ определяется интегрированием $u_n^{(1)}(t)$ по t .

$$\varphi_n(t) = \varphi_n^0 + \omega_n^0 t + \int_0^t (t - \tau) u_n^{(1)}(\tau) d\tau \quad (3.25)$$

После того, как приближенное выражение $w(t, x)$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq 1$ найдено в виде (2.10), требуемое значение управляющего момента сил $M(t)$ вычисляется из (2.5) квадратурой по x .

$$M(t) = - \int_0^1 x w^{(IV)}(t, x) dx + w'''(t, 1) = -w''(t, 0) \quad (3.26)$$

Согласно (3.26) ряд для $w''(t, 0)$ абсолютно и равномерно сходится для всех $t \in [0, T]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $-M$.

4. Исследование задачи динамического управления. Вводя новую переменную $z(t, x)$

$$z(t, x) = w(t, x) + x\varphi + \int_0^t (t-\tau)(\ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi) d\tau \quad (4.1)$$

уравнения (2.5), (2.6) и условия (2.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} z^{(iv)}(t, x) + z^{(iv)}(t, x) &= 0, \quad z(0, 0) = 0, \quad z'(t, 0) = \varphi, \quad z''(t, 1) = 0 \\ z''(t, 0) &= -M(t), \quad z'''(t, 1) = \gamma \dot{z}(t, 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$w(t, x) = z(t, x) - xz'(t, 0) - \int_0^t (t-\tau)(\ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi) d\tau$$

Из $w(0, x) = f_1(x)$, $\dot{w}_i(0, x) = f_2(x)$, $\varphi(0) = \varphi^0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega^0$ следует, что начальные условия для $z(t, x)$ имеют вид

$$z(0, x) = f_1(x) + x\varphi^0, \quad \dot{z}(0, x) = f_2(x) + x\omega^0 \quad (4.3)$$

Конечные условия могут быть выписаны после построения функции $z(t, x)$, как решения краевой задачи (4.2):

$$\begin{aligned} z(T, x) - z'(T, 0)x - \int_0^T (T-\tau)(\ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi) d\tau &= 0 \\ \dot{z}(T, x) - x\dot{z}'(T, 0) - \int_0^T (\ddot{y}_0 \cos \varphi - \ddot{x}_0 \sin \varphi) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\varphi(T) = z'(T, 0) = \varphi^*, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{z}'(T, 0) = 0$$

Решение краевой задачи (4.2) ищем в виде бесконечной суммы.

$$z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.5)$$

где собственные функции $X_n(x)$ и собственные значения λ_n определяются соотношениями

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n} + \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n}, \quad \operatorname{tg} \lambda_n - \operatorname{th} \lambda_n = 2\gamma \lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n \operatorname{th} \lambda_n \quad (4.6)$$

$$\{\lambda_n\}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$$

Коэффициенты Фурье $\theta_n(t)$ разложения (4.5) находятся из уравнений

$$\ddot{\theta}_n(t) + \lambda_n^4 \theta_n(t) = X_n'(0) M(t) / \alpha_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

с начальными условиями

$$\theta_n(0) = \frac{1}{x_n^2} \int_0^1 [f_1(x) + xz'(0,0)][1 + \gamma^2(x-1)] X_n(x) dx \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta}_n(0) = \frac{1}{x_n^2} \int_0^1 [f_2(x) + xz'(0,0)][1 + \gamma^2(x-1)] X_n(x) dx$$

Решение счетной системы (4.7) при (4.8) строится аналогично (2.11).

В случае управляющего момента $M(t)$ задача оптимального управления (2.1), (2.2) с функционалом

$$\Phi[M] = \int_0^T [M(t)]^2 dt \rightarrow \min_M, \quad M(t) \in \{M\} \quad (4.9)$$

также приводится к решению проблемы моментов. При этом надо иметь в виду, что ряды z , φ , \dot{z} , $\dot{\varphi}$ будут сходиться лишь для достаточно гладкой функции $M(t)$, $0 \leq t \leq T$. После определения конечных условий $\theta_n(T) = \theta_n^*$, $\dot{\theta}_n(T) = \dot{\theta}_n^*$, $n=0, 1, 2, \dots$ из (4.4), проблемы моментов приходят к виду [5]

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt = c_0^*, \quad \int_0^T M(t)dt = \dot{c}_0^* \quad (4.10)$$

$$\int_0^T \sin^2 \lambda_n^2 (T-t)M(t)dt = c_n^*, \quad \int_0^T \cos^2 \lambda_n^2 (T-t)M(t)dt = \dot{c}_n^*$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

где

$$c_0^* = [\theta_0^* - \theta_0(0) - \dot{\theta}_0(0)T] x_0^2 / X_0'(0), \quad \dot{c}_0^* = [\dot{\theta}_0^* - \dot{\theta}_0(0)] x_0^2 / X_0'(0)$$

$$c_n^* = [\theta_n^* - \theta_n(0) \cos^2 \lambda_n^2 T - \dot{\theta}_n(0) \lambda_n^{-2} \sin^2 \lambda_n^2 T] x_n^2 / X_n'(0)$$

$$\dot{c}_n^* = [\dot{\theta}_n^* + \theta_n(0) \lambda_n^2 \sin^2 \lambda_n^2 T - \dot{\theta}_n(0) \cos^2 \lambda_n^2 T] x_n^2 / X_n'(0)$$

$$n=1, 2, 3, \dots$$

Решение задачи оптимального управления (4.9), (4.10) имеет вид [5]

$$M(t) = d_0^1(T-t) + d_2^2 + \sum_{m=1}^{\infty} [d_m^1 \sin^2 \lambda_m^2 (T-t) + d_m^2 \cos^2 \lambda_m^2 (T-t)] \quad (4.11)$$

где коэффициенты d_0^1 , d_0^2 , d_m^1 , d_m^2 ($m=1, 2, 3, \dots$) определяются из (4.10)

$$d_0^1 = 6T^{-2}(2c_0^* T^{-1} - \dot{c}_0^*), \quad d_0^2 = -2T^{-1}(3c_0^* T^{-1} - 2\dot{c}_0^*) \quad (4.12)$$

$$d_m^1 = (c_m^* G_m - \dot{c}_m^* F_m) / (E_m G_m - F_m^2)$$

$$d_m^2 = (c_m^* F_m - \dot{c}_m^* E_m) / (F_m^2 - G_m E_m), \quad E_m = \int_0^T [\sin \lambda_m^2 (T-t)]^2 dt$$

$$F_m = \frac{1}{2} \int_0^T \sin 2\lambda_m^2 (T-t) dt, \quad G_m = \int_0^T [\cos \lambda_m^2 (T-t)]^2 dt, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

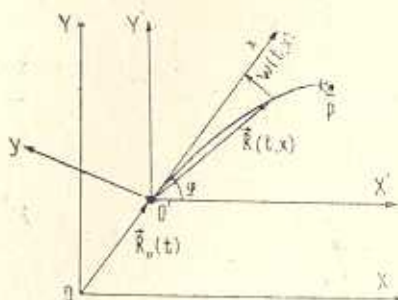
Оптимальное изменение угла поворота $\varphi(t)$ можно определить из $z'(t, 0) = \varphi(t)$.

Как указывалось в п. 2, оптимально управляющие функции $u(t)$, $M(t)$ из (3.8), (3.21), (4.11) построены для произвольного начального состояния $\varphi^0, \omega^0, f_1(x), f_2(x)$ в произвольный начальный момент времени t_0 . В результате замены $t \rightarrow (t-t_0), T \rightarrow (T-t_0)$, управления $u(t), M(t)$ могут быть определены как функции этих аргументов и линейные операторы от $\varphi^0, \omega^0, f_1(x), f_2(x)$.

$$u = u(t-t_0, T-t_0, \varphi^0, \omega^0, [f_1(x)], [f_2(x)])$$

$$M = M(t-t_0, T-t_0, \varphi^0, \omega^0, [f_1(x)], [f_2(x)]) \quad (4.13)$$

Заменяя в (4.13) начальные величины текущими $t_0 \rightarrow t, \varphi^0 \rightarrow \varphi, \omega^0 \rightarrow \omega, f_1(x) \rightarrow \omega(t, x), f_2(x) \rightarrow \omega_1(t, x)$, получим оптимальное в смысле (2.3), (4.9) управление в форме „синтеза“.



Фиг. 1

Итак, методом последовательного приближения получены оптимальные управляющие функции и оптимальное изменение угла поворота упругой стрелы манипулятора. Решения задач представлены в виде синтеза.

ABOUT A PROBLEM OF OPTIMAL OPERATION MOVEMENT OF THE ELASTIC SECTION OF A MANIPULATOR ON THE MOBILE BASE

A. A. GHUKASYAN

ՇԱՐԺԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆԵՎՈՂ ՄԱՆԵՊՈՒԿՅԱՏՈՐԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ՕՂԱԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԻ ԽՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ա. ՂՈՒԿԱՍՅԱՆ

Ա մ ֆ ո փ ու լ մ

Առաձգականության դժային տեսության սահմաններում, մեխանիկայի վարիացիոն սկզբունքի օգնությամբ, ստացված են շարժական հիմքի վրա գտնվող մանիպուլյատորի առաձգական օղակի շարժման և առաձգական տատանումների հավասարումները:

Ուսումնասիրված են մանիպուլյատորի, առաձգական օղակի օպտիմալ շարժման և վերջնական պրոցեսում առաձգական տատանումների կասեցման

կինեմատիկական և դինամիկական խնդիրները: Որպես օպտիմալության շահանիշ է վերցված քառակուսային ֆունկցիոնալը: Խնդիրները բերված են մոմենտների պրոբլեմի լուծմանը: Հաջորդական մոտարկումների մեթոդով ստացված են օպտիմալ դեկալարող ֆունկցիաները և մանիպուլյատորի առաձգական օղակի անկյունային շարժման օպտիմալ օրենքը: Խնդիրների լուծումները ներկայացված են սինթեզի տեսքով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора.—Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 5, с. 38—41.
2. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118—124.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.—Изв. АН СССР. ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1045—1103.
5. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. Н. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Институт механики АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
27.V. 1987