

УДК 532.516

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

БАБАДЖАНИЯН Г. А., МНАЦАКАНЯН Р. Ж.

Рассматривается развитие стационарного изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями, одна из которых совершает плоско-параллельное поступательное движение с заданной скоростью U_1 . Задачи о динамическом взаимодействии потока жидкости или газа с подвижными поверхностями имеют многие практические приложения в современной технике.

Теоретические исследования этих задач имеют специфические особенности [1, 2, 3].

В большинстве этих исследований, кроме того, что за основу исходных уравнений принимаются линеаризованные уравнения Навье-Стокса, принимается также, что давление в поперечном сечении канала постоянно, которое, по нашему мнению, несколько искажает истинную картину движения.

В работе делается попытка решить задачу, сохранив в правой части второго уравнения движения (уравнения Навье-Стокса) член $\rho \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$, то есть учесть изменения давления в поперечном сечении плоского канала. Тогда, исходные уравнения движения жидкости можно взять в следующем виде:

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

В этой системе уравнений U есть средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы, v_x и v_y —соответствующие компоненты скорости по осям OX и OY , p —давление, ρ —плотность, ν —кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Если начало оси OY принимать на средней линии между плоскостями, то граничные условия задачи с развитием течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x &= U = \text{const}, \quad p = p_H = \text{const} \\ \text{при } y=h \quad x > 0, \quad v_x &= U_1, \quad v_y = 0 \\ \text{при } y=-h \quad x > 0, \quad v_x &= 0, \quad v_y = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p_H —значение давления в начале трубы, h —полурасстояние между плоскостями.

Вводя новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad P = \frac{p - p_{11}}{\rho U^2} \quad (1)$$

система уравнений (1) и граничные условия (2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (4)$$

$$\text{при } z=0 \quad u=0, \quad P=0$$

$$\text{при } \zeta=1 \quad z > 0, \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v=0 \quad (5)$$

$$\text{при } \zeta=-1 \quad z > 0, \quad u = -1, \quad v=0$$

Уравнения (4) при граничных условиях (5) решаем с помощью операционного исчисления: применяя к уравнениям (4) и граничным условиям (5) функциональное преобразование Лапласа, получим:

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{u}}{d\zeta^2} - \lambda \bar{u} - \lambda \bar{P}$$

$$\frac{dP}{d\zeta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 \bar{v}}{d\zeta^2}, \quad \lambda \bar{v} + \frac{d\bar{v}}{d\zeta} = 0 \quad (6)$$

$$\text{при } \zeta=1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = \frac{U_1 - U}{U} \frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0$$

$$\text{при } \zeta=-1 \quad z > 0 \quad \bar{u} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \bar{v} = 0 \quad (7)$$

Здесь λ —параметр преобразования Лапласа. Из системы уравнений (6) для \bar{v} получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{d\zeta^2} + (\lambda^2 - \lambda \text{Re}) \frac{d\bar{v}}{d\zeta} = 0 \quad (8)$$

Решая уравнение (8) и учитывая граничные условия (7), для \bar{v} будем иметь

$$\bar{v} = \frac{a+1}{2} \frac{\sin \beta \zeta - \zeta \sin \beta}{\beta \cos \beta - \sin \beta} + \frac{a-1}{2} \frac{\cos \beta - \cos \beta \zeta}{\beta \sin \beta} \quad (9)$$

Из системы уравнений (6) для \bar{u} и \bar{P} , соответственно, получим:

$$\bar{u} = \frac{a+1}{2} \frac{\sin \beta \zeta - \beta \cos \beta \zeta}{\lambda(\beta \cos \beta - \sin \beta)} - \frac{a-1}{2} \frac{\sin \beta \zeta}{\lambda \sin \beta} \quad (10)$$

$$\bar{P} = \frac{a+1}{2} \frac{\beta \cos \beta \zeta - \text{Re} \sin \beta \zeta}{\text{Re}(\beta \cos \beta - \sin \beta)} + \frac{a-1}{2} \frac{\sin \beta \zeta}{\text{Re} \sin \beta} \quad (11)$$

Здесь $a = \frac{U - U_1}{U}$, $\beta^2 = \lambda^2 - \lambda \text{Re}$

Совершив обратные преобразования Лапласа и переходя к старым переменным, для v_y , v_x и p получим

$$v_y = (2U - U_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_n - \text{Re}} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \beta_n y/h}{\sin \beta_n} \right) \exp(\lambda_n x/h) + U_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_k - \text{Re}} [(-1)^k \cos \pi k y/h - 1] \exp(\lambda_k x/h) \quad (12)$$

$$v_x = \frac{3}{2} \left[U + \frac{y^2}{2h^2} (U_1 - 2U) \right] + \frac{U_1}{2} \left(\frac{v}{h} - \frac{1}{2} \right) + (2U - U_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n (2\lambda_n - \text{Re})} \times \left(\frac{\cos \beta_n y/h}{\cos \beta_n} - 1 \right) \exp(\lambda_n x/h) + U_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k \sin \pi k y/h}{\lambda_k (2\lambda_k - \text{Re})} \exp(\lambda_k x/h) \quad (13)$$

$$p = p_H - \frac{3\mu U}{2\text{Re}} (2U - U_1) \frac{x}{h} - \frac{\mu U}{10} (2U - U_1) - \frac{\mu U U_1}{\text{Re}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k \sin \beta_k y/h}{2\lambda_k - \text{Re}} \exp(\lambda_k x/h) - \frac{(2U - U_1) \mu U}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \lambda_n \cos \beta_n y/h - \text{Re} \sin \beta_n}{\lambda_n (2\lambda_n - \text{Re}) \sin \beta_n} \exp(\lambda_n x/h) \quad (14)$$

В формулах (12), (13) и (14) λ_n и λ_k — соответственно, простые отрицательные корни уравнений $\text{tg} \sqrt{\lambda_n^2 - \lambda_n \text{Re}} = \sqrt{\lambda_n^2 - \lambda_n \text{Re}}$, $\lambda_n^2 - \text{Re} \lambda_n - \pi^2 h^2 = 0$.

Найдем значение силы трения.

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = - \frac{3\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{U_1}{2U} \right) y + \frac{\mu U_1}{2h} + \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n}{h(2\lambda_n - \text{Re})} y - \frac{\sin \beta_n y/h}{\sin \beta_n} \right] \exp(\lambda_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k}{2\lambda_k - \text{Re}} - (-1)^k \cos \pi k y/h \right] \exp(\lambda_k x/h) \quad (15)$$

Значения трения на стенках будут

$$\tau^h = - \frac{3\mu U}{h} + \frac{2\mu U_1}{h} + \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{2\lambda_n - \text{Re}} - 1 \right) \exp(\lambda_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{2\lambda_k - \text{Re}} - 1 \right) \exp(\lambda_k x/h) \quad (16)$$

$$\tau^{-h} = \frac{3\mu U}{h} - \frac{\mu U_1}{h} - \frac{\mu (2U - U_1)}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{2\lambda_n - \text{Re}} - 1 \right) \exp(\lambda_n x/h) - \frac{\mu U_1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{2\lambda_k - \text{Re}} - 1 \right) \exp(\lambda_k x/h) \quad (17)$$

На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величины будут

$$\begin{aligned}
 v_{y\infty} &= 0, \quad v_{x\infty} = \frac{3}{2} \left[U + \frac{y^2}{2h^2} (U_1 - 2U) \right] + \frac{U_1}{2} \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \right) \\
 p_{x\infty} &= p_{II} - \frac{3\rho U}{2\text{Re}h} (2U - U_1)x - \frac{\rho U}{10} (2U - U_1) \\
 \tau_{x\infty} &= -\frac{3\rho U}{h^2} \left(1 - \frac{U_1}{2U} \right) y + \frac{\rho U_1}{2h}
 \end{aligned} \quad (18)$$

Сила трения на стенках для стабилизированного участка примет следующие значения:

$$\tau_{\pm}^h = \frac{\rho}{h} (2U_1 - 3U), \quad \tau_{\mp}^h = \frac{\rho}{h} (3U - U_1) \quad (19)$$

Анализ полученных результатов:

1. Формулы (12), (13), (14) и (15) дают решение поставленной задачи в уточненном виде по сравнению с работой [2], так как здесь давление принимается переменным по поперечному направлению канала (согласно второму уравнению системы (1)). Как видно из этих выражений, уточненные результаты искомых функций отличаются от результатов, полученных в работе [2].

2. Для стабилизированного участка ($x \rightarrow \infty$) результаты решений, полученных в этой работе, полностью совпадают с результатами работы [2], то есть на этом участке изменения законов скоростей, давления и силы трения не зависят от того, принимается ли давление переменным в поперечном направлении канала или нет.

3. Как показывают полученные формулы и соответствующие вычисления, сила трения в начальном участке больше, чем в стабилизированном участке.

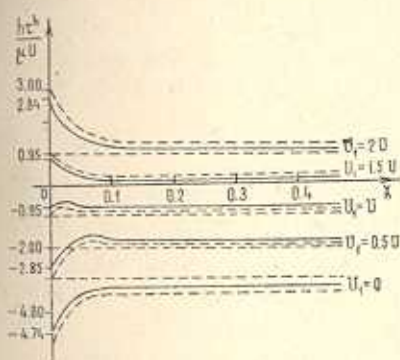
4. Из полученных формул видно, что изменения искомых величин для всего движения и особенно для стабилизированного участка существенно зависят от скоростей подвижной стенки (U_1) и основного потока (U). Эта особенность явно проявляется при вычислении трения на стенках. Как показывают полученные формулы, выбором скоростей подвижной стенки и основного потока можно управлять значением трения на стенках.

Законы изменения трения на стенках показаны на фиг. 1, 2. Графики построены при следующих данных: $\text{Re} = 10$, $U = 0,1$ м/сек, $U_1 = 0$; $U_1 = 0,5U$; $U_1 = U$; $U_1 = 1,5U$.

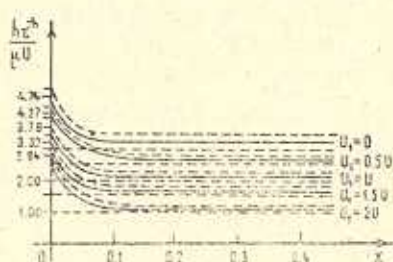
Из фигур видно, что в случае $U_1 = 0$ τ^h и τ^{-h} равны по абсолютным значениям, противоположны по направлениям, при увеличении x уменьшаются и в пределе, когда $x \rightarrow \infty$ (в стабилизированном участке) принимают постоянные значения.

Вычисления показывают (фиг. 1, 2), что при увеличении скорости верхней стенки U_1 τ^h и τ^{-h} уменьшаются. При этом в диапазоне $0 < U_1 < 1,5U$ τ^h отрицательно. При возрастании x , τ^h уменьшается по абсолютному значению и принимает свое минимальное значение для

определенного x , затем увеличивается и вдали от начального сечения принимает постоянные значения, различные для разных значений U_1 . Из фигур видно, что во всех случаях трение на стенках уменьшается при увеличении x , то есть трение в стабилизированном участке меньше, чем в начальном участке канала. Трение на нижней неподвижной стенке монотонно убывает как при возрастании U_1 , так и при увеличении x , оставаясь всегда положительным.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фигурах пунктирными кривыми показаны изменения τ^h и τ^{-h} в случае, когда $\partial p / \partial y = 0$. Как видно, значения τ^h и τ^{-h} в этом случае больше значений этих величин, когда $\partial p / \partial y \neq 0$ (то есть в нашем случае). Все остальные вышеуказанные закономерности в обоих предположениях остаются в силе.

Следовательно, уточненное решение задачи качественно не отличается от предыдущих, имеются только количественные поправки.

Из фигур видно также, что для всех значений $U_1 \neq 0$ сила трения на нижней неподвижной стенке больше силы трения на верхней подвижной стенке.

Из полученных формул и фигур выявляются все специфические особенности данного движения.

Результаты данной работы качественно подтверждают результаты и выводы работы [1].

ABOUT ONE EXACT SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATION

G. A. BABADJANIAN, R. G. MNATSAKANIAN

ՆԱԳԻՆ-ՍՏՈՔՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԵԿ ԶԵՂՐԻՏ
ԼՈՅՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Հ. ԲԱԲԱԶՅԱՆՅԱՆ, Բ. Գ. ՄՆԱՏԱԿԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ուսումնասիրվում է մաթոցիկ անսեղմելի հեղուկի ստացիոնար, իզոթերմիկ շարժման զարգացումը զուգահեռ հարթությունների միջև, որոնցից մեկը կասարում է հարթ-զուգահեռ համընթաց շարժում՝ տրված արագությունը:

Գտնված են արագությունների, ճնշման ու շիման ուժի փոփոխման օրենքները հարթ խողովակի երկարությամբ:

Կատարված են հարթ խողովակի պատերի վրա շիման ուժի փոփոխման դրաֆիկները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Антышев И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П. Анализ течения в канале с движущейся стенкой.—ИФЖ, 1985, №4, с. 592—597.
2. Бабаджанян Г. А., Мнацаканян Р. Ж. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными движущимися плоскостями.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, №3, с. 49—53.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М: Гостехиздат, 1955, 519 с.

Երևանский государственный
университет

Поступила в редакцию
3.11.1988