

УДК 534.1.539.3

К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОСТРИКЦИОННОГО ЭФФЕКТА В
 ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СЕГНЕТОКЕРАМИЧЕСКИХ
 ОБОЛОЧКАХ

БОГОМОЛЬНЫЙ В. М.

При действии сильного постоянного электрического поля на сегнетокерамику в неполярной фазе в ней индуцируется поляризация, при этом значительно меньшее дополнительное поле создает рабочие перемещения пьезоэлемента [1]. Электрострикционный эффект позволяет линейно (без гистерезиса) управлять величиной электромеханической связи, что объясняет целесообразность его применения в прецизионном приборостроении [2].

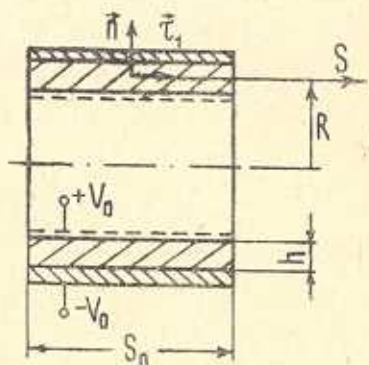
В известных работах рассматривались пьезоэлементы простейшей геометрической формы (стержни, пластины) [1, 2], цель этой работы — построение соотношений электроупругости для оболочек армированных металлическим слоем. Рассмотрим цилиндрическую оболочку из сегнетокерамики, на которой за счет разности температур закреплена металлическая оболочка.

При поляризации в направлении толщины оболочки уравнения электрострикционного эффекта относительно постоянных по времени механических напряжений и деформаций имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= s_{11}^E \sigma_1 + s_{12}^E \sigma_2 + s_{13}^E \sigma_3 + Q_{13} E_3^2, & \varepsilon_2 &= s_{11}^E \sigma_2 + s_{12}^E \sigma_1 + s_{13}^E \sigma_3 + Q_{12} E_3^2, \\ \varepsilon_3 &= s_{33}^E (\sigma_1 + \sigma_2) + s_{33}^E \sigma_3 + Q_{11} E_3^2 \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — относительные деформации в направлениях единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (фиг. 1); σ_i ($i = 1, 2, 3$) — механические напряжения; s_{ij}^E ($i = 1, 2, 3$) — упругие податливости сегнетокерамики; Q_{11}, Q_{12} — электрострикционные константы; E_3 — компонента вектора напряженности электрического поля в направлении толщины оболочки.

Начальные напряжения $\bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$, возникающие вследствие контактного давления между слоями — q_n , определяются методами плоской теории упругости [3].



Фиг. 1

При этом окружные напряжения σ_2 состоят из двух компонент $\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 + \sigma_2$, где $\bar{\sigma}_2$ зависят от E_3 , q_n и определяются в этой работе. Касательные контактные усилия, возникающие на поверхности сегнетокерамики за счет разности температур, учтены в виде поверхностной нагрузки $q_1 = f q_n$ (f — коэффициент трения), приложенной к сегнетокерамической оболочке.

Компонента вектора электрической индукции в направлении толщины оболочки D_3 выражается через тензор механических деформаций [1, 4] с учетом соотношений между эквивалентными электро-механическими и упругими постоянными [1, 5]

$$D_3 = \varepsilon_{33}^s E_3 + e_{31}^{sks} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + e_{33}^{sks} \varepsilon_3, e_{31}^{sks} = Q_{12} E_3 (c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11} E_3 c_{13}^E \quad (2)$$

$$e_{33}^{sks} = 2Q_{12} E_3 c_{13}^E + Q_{11} E_3 c_{33}^E, \varepsilon_{33}^s = \varepsilon_{33}^T - 2Q_{12} E_3 e_{31}^{sks} - Q_{11} E_3 e_{33}^{sks} \quad (3)$$

c_{ll} ($l = 1, 2, 3$) — упругие константы; $\varepsilon_{33}^s, \varepsilon_{33}^T$ — диэлектрические проницаемости сегнетокерамики, измеренные соответственно при деформациях и механических напряжениях, равных нулю.

Подставляя выражения (3) в (2) с учетом третьего соотношения (1), имеем

$$D_3 = E_3 \varepsilon_{33}^T - 2Q_{12} E_3^2 [Q_{12} (c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11} c_{13}^E] - \\ - Q_{11} E_3^2 (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E) + E_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) [Q_{12} (c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11} c_{13}^E] + \\ + E_3 (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E) [s_{13}^E (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + s_{31}^E \varepsilon_3 + Q_{11} E_3^2] \quad (4)$$

(здесь и в дальнейшем „волна“ над $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varepsilon}_2$, зависящими от E_3 и q_n , не ставится с целью упрощения обозначений).

В рассматриваемом случае предварительные механические напряжения $\bar{\sigma}_3$ (возникающие от контактного давления q_n) вычисляются по формуле [3]

$$\bar{\sigma}_3 = -q_n \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)$$

z — координата в направлении нормали к срединной поверхности оболочки толщиной h (фиг. 1).

Из первых двух уравнений (1) имеем

$$\sigma_1 = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - \hat{E}_3), \quad \sigma_2 = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 - \hat{E}_3) \quad (5)$$

$$\nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \quad \hat{E}_3 = (1 + \nu)(Q_{12} E_3^2 - q_n s_{13}^E / 2)$$

Распределение меридиональных и окружных деформаций по толщине оболочки определяется гипотезами Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{(0)} + z \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2^{(0)} + z \varepsilon_2 \quad (6)$$

$\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}$ — деформации срединной поверхности оболочки; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — изменения ее главных кривизн.

Для напряженности электрического поля можно использовать аналогичные (6) выражения [6]

$$E_z = E_3^{(0)} + zE_3^{(1)}, \quad E_3^{(0)} = -\frac{2V_0}{h} \quad (7)$$

где $\pm V_0$ —электрические потенциалы на электродах, расположенных на поверхностях оболочки с координатами $z = \pm h/2$.

Величина D_2 практически не изменяется по толщине оболочки [7]. Следуя [8], подставляем (5)–(7) в (4); приравняв в полученном выражении для D_2 сумму членов при z нулю, определяем $E_3^{(1)}$

$$E_3^{(1)} = \frac{F_3^{(0)} [hA(x_1, x_2) + (E_3^{(0)})^2 q_n s_{33}^E Q_{11} (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E)]}{h [B(\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}) + (E_3^{(0)})^2 c(q_n)]} \quad (8)$$

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \left[Q_{12} (c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11} c_{13}^E + \frac{s_{13}^E (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E)}{s_{11}^E (1-\nu)} \right]$$

$$B(\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}) = \varepsilon_{33}^T + (\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)}) [Q_{12} (c_{11}^E + c_{12}^E) + Q_{11} c_{13}^E] +$$

$$+ \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E (1-\nu)} (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E) (\varepsilon_1^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)} + q_n s_{13}^E)$$

$$c(q_n) = -6Q_{12}^2 (c_{11}^E + c_{12}^E) - 8Q_{11} Q_{12} c_{13}^E - 3Q_{11} c_{33}^E -$$

$$-4Q_{12} c_{13}^E - \frac{6s_{13}^E Q_{12}}{s_{11}^E (1-\nu)} (2Q_{12} c_{13}^E + Q_{11} c_{33}^E) +$$

$$+ 3s_{33}^E q_n \left(Q_{11} Q_{12} c_{13}^E + \frac{Q_{11}^2 c_{33}^E}{2} \right)$$

Используя соотношения (6), (7) и выражая усилия T_1 , T_2 , моменты M_1 , M_2 через интегралы от напряжений, получим следующие соотношения:

$$T_1 = D_N (\varepsilon_1^{(0)} + \nu \varepsilon_2^{(0)} - \hat{E}_3^{(0)}), \quad T_2 = D_N (\varepsilon_2^{(0)} + \nu \varepsilon_1^{(0)} - \hat{E}_3^{(0)}) \quad (9)$$

$$M_1 = D_M (x_1 + \nu x_2 - \hat{E}_3^{(1)}), \quad M_2 = D_M (x_2 + \nu x_1 - \hat{E}_3^{(1)})$$

$$D_N = \frac{h}{s_{11}^E (1-\nu^2)}, \quad \hat{E}_3^{(0)} = (1+\nu) \left[Q_{12} (E_3^{(0)})^2 - \frac{q_n s_{13}^E}{2} \right]$$

$$D_M = \frac{h^3}{12s_{11}^E (1-\nu^2)}, \quad \hat{E}_3^{(1)} = (1+\nu) \left(2Q_{12} E_3^{(0)} E_3^{(1)} - \frac{s_{13}^E q_n}{h} \right)$$

При осесимметричных деформациях выражение (8) можно упростить, если $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$ определить по безмоментной теории из следующих уравнений равновесия, записанных в безразмерной форме [9]:

$$\frac{dT_1^H}{ds} - \bar{T}_2^H \frac{dW^H}{ds} - q_1 = 0, \quad \frac{dN_1^H}{ds} - T_2^H - q = 0, \quad -\bar{T}_{2(0)}^H \frac{dW^H}{ds} = N_1^H \quad (10)$$

$$T_1^H = \frac{T_1}{D_N}, \quad T_2^H = \frac{T_2}{D_N}, \quad \bar{T}_{2(0)}^H = \frac{h\bar{T}_2^H}{2R}, \quad \bar{T}_2^H = \frac{\bar{T}_2}{D_N}, \quad q_1 = \frac{fq_n R}{D_N}$$

$$\bar{q} = \frac{q_n R}{D_N}, \quad \bar{s} = \frac{s}{R}$$

s —линейная координата, направленная вдоль образующей оболочки, R —радиус ее срединной поверхности, $\bar{T}_2 = -q_0 R(1+h/2R)$ —начальное окружное усилие сжатия, W^H —компонента вектора перемещений срединной поверхности оболочки в направлении единичного вектора \bar{n} (фиг. 1) ($W^H = W/R$).

Деформации выразим через перемещения [3]

$$\varepsilon_1^{(0)} = \frac{dU^H}{ds}, \quad \varepsilon_2^{(0)} = W^H, \quad \chi_1 = -\frac{1}{R} \frac{d^2 W^H}{ds^2}, \quad \chi_2 = 0 \quad (11)$$

Используя (7) (где $E_3 \approx E_3^{(0)}$), из (10), (11) получим уравнение для определения $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$

$$\frac{d^2 W^H}{ds^2} + r^2 W^H = f_0 \quad (12)$$

$$r^2 = \frac{1 + \mu \bar{T}_2^H - \mu^2}{\bar{T}_{2(0)}^H}, \quad f_0 = \frac{1}{\bar{T}_{2(0)}^H} \left[(1 - \mu) \hat{E}_3^{(0)} - \int_0^{\tilde{s}_0/2} q_1 d\tilde{s} - q \right]$$

Из следующих краевых условий находим решение уравнения (12), а затем $\varepsilon_1^{(0)}$ и $\varepsilon_2^{(0)}$

$$\left. \frac{dW^H}{ds} \right|_{\tilde{s}=0} = 0, \quad \left. T_1^H \right|_{\tilde{s}=\tilde{s}_0/2} = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon_1^{(0)} = (\bar{T}_2^H - \mu) \left[\left(\frac{\hat{E}_3^{(0)}}{1 - \mu} - \frac{q_0}{1 - \mu^2} \right) \frac{\cos r\tilde{s}}{\cos(r\tilde{s}_0/2)} - \frac{f_0 \cos r\tilde{s}}{r^2 \cos(r\tilde{s}_0/2)} \right] + \hat{E}_3^{(0)} + \frac{q_1 \tilde{s}_0}{2} \quad (14)$$

$$\varepsilon_2^{(0)} = \frac{1}{(1 - \mu^2)} [(1 + \mu) \hat{E}_3^{(0)} - q] \frac{\cos r\tilde{s}}{\cos(r\tilde{s}_0/2)} - \frac{f_0 \cos r\tilde{s}}{r^2 \cos(r\tilde{s}_0/2)} \quad (15)$$

Подставляя (15), (14) в (8), получим выражение для $E_3^{(0)}$ в зависимости только от одной функции χ_1 ($\chi_2 = 0$), что позволяет получить решение в явном виде. Для этого используем полную систему уравнения (10), в которой третье уравнение содержит $M_1^H = M_1/R D_N$ [9]

$$\frac{dM_1}{ds} - \bar{T}_{2(0)}^H \frac{dW^H}{ds} = N_1^H \quad (16)$$

Система уравнений (9)—(11) и (16) приводится к одному уравнению

$$\frac{d^4 W^H}{ds^4} - 2r^2 \frac{d^2 W^H}{ds^2} + s_1^4 W^H = f_1, \quad 2r^2 = -\frac{\bar{T}_{2(0)}^H D_N R^2}{D_M} \quad (17)$$

$$s_1^4 = \frac{1 + \mu \bar{T}_2^H - \mu^2}{m}, \quad m = \frac{D_M}{D_M R^2}, \quad f_1 = -\frac{\mu}{m} \int_0^{\tilde{s}_0/2} q_1 d\tilde{s}$$

Решение уравнения (17) определяется из анализа корней его характеристического уравнения с учетом четности функции W^H относительно начала координат $\bar{s}=0$ (расположенного в центре оболочки). При $s_1 > r$ оно имеет вид [10]

$$W^H = C_1 \operatorname{ch} \alpha \bar{s} \cos \beta \bar{s} + C_2 \operatorname{sh} \alpha \bar{s} \sin \beta \bar{s} + f_1 / s^4 \quad (18)$$

$$\alpha = \left(\frac{s_1^2 + r^2}{2} \right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{s_1^2 - r^2}{2} \right)^{1/2}$$

где α, β — действительные положительные числа.

Постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из краевых условий (13), причем второе краевое условие соответствует при $\bar{s} = \bar{s}_0/2$ следующему выражению:

$$m_1 \frac{d^4 W^H}{d\bar{s}^4} + a \frac{d^2 W^H}{d\bar{s}^2} + b W^H + C = 0$$

$$m_1 = -\frac{m}{\nu}, \quad a = \frac{-\bar{T}_{21}^H}{\nu}, \quad b = \frac{\nu^2 - 1}{\nu}, \quad C = \frac{(1-\nu)\hat{E}_3^{(0)} - q}{\nu}$$

Соотношения электроупругости (9) получены для тонких оболочек произвольной формы. В случае цилиндрической оболочки они могут быть упрощены, при этом решения задачи в виде (18) определяется приведенными в [10] функциями А. Н. Крылова.

TO THE PROBLEM OF CALCULATING OF ELECTROSTRICTIVE EFFECT IN PRESTRESSED FERROELECTRIC SHELLS

V. M. BOGOMOLNY

ՆԱԵՆԱԻՆ ԼԱՐՎԱՅՈՒԹՅԱՄԸ ՍԵՔՆԵՏԱԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ԹՅՎԱՆՔՆԵՐԻ ԷԼԵՏՐՈՍՏՐԻԿՑԻԱԿԱՆ ԷՖԵԿՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Վ. Մ. ԲՈԳՈՄՈՆՆԻ

Ա Վ Փ Ո Փ Ն Վ

Ստացված են սեղնեաղեկրամիկայից պատրաստված դանային էլեկտրաառաձգական թաղանթի հաշվարկման խնդրի անալիտիկ լուծումը և էլեկտրաառաձգականության առնչությունները: Թաղանթը ամրանալորված է մետաղական շերտով և գտնվում է հաստատուն էլեկտրական դաշտի ազդեցության տակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазов В. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуковом. М.: ИЛ, 1952. 447 с.
2. Leung K. M., Liu K. T., Kyonba J. Large electrostrictive effect in Ba,PZT and its applications. — Ferroelectrics, 1980, 27, № 1-4, p. 41-43.

3. Лью А. Математическая теория упругости. М. Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
4. Улико А. Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел.—В сб.: «Тепловые напряжения в элементах конструкций», Киев, 1975, в. 15, с. 90—99.
5. Пьезокерамические преобразователи.—Собр. под ред. Пугачева С. И. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.
6. Drathkeller D. S., Kalnins A. Dynamic shell theory for ferroelectric ceramics.—*JASA*, 1970, 47, № 5, p. 1343—1353.
7. Ченский Е. В. О монодоменной поляризации сегнетоэлектриков с фазовым переходом первого рода.—ФТТ, 1970, т. 12, № 2, с. 586—591.
8. Борисейко В. А., Гринченко В. Т., Улико А. Ф. Соотношения электроупругости для пьезокерамических оболочек вращения.—Прикл. механика, 1976, т. 12, № 2, с. 26—39.
9. Арменакас А. Е. Влияние начальных напряжений на колебания свободно опертых цилиндрических оболочек.—Ракетн. техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 9, с. 115—122.
10. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.

Московский технологический институт

Поступила в редакцию
17.IV.1987