ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, 1988, № 5 Механика

УДК 539.3:534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ

АВЕТИСЯН А. С.

В связи с широким применением различных конструкционных элементов, изготовленных из композитных материалов, в современной технике, все более актуальной становится изучение вопросов распространения волн в неоднородных средах. Неоднородность среды приводит к тому, что амплитуда и фаза волны становятся функциями координат. Тем самым, усложняется решение задач о распространении волн в неоднородных средах. Особое значение имеют проблемы, касающиеся взаимодействия механической и электромагнитной полей в неоднородных средах. Учет сопряженности механических и электромагнитных полей (пьезоэлектрический эффект, электрострикция и т. д.) еще более усложняют проблему.

Проблеме распространения волн в неоднородных упругих средах посвящены немало работ [3—4] и др. В этих работах исследуется распространение волн при конкретных законах неоднородности среды.

В работе [1] исследовано распространение электроупругих поверхностных волн типа Лява в случае неоднородного тонкого пьезоэлектрического слоя.

В настоящей работе исследуется вопрос распространения электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений относительно амплитудных и фазовых функций электроупругой монохроматической волны. Исследуется распространение сдвиговой электроупругой волны в неоднородном пьезоэлектрическом слое с линейной неоднородностью по толщине.

Рассмотрим распространение монохроматических электроупругих волн в неоднородной пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класс $6mm$). Пусть координатная ось oz параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость xoy есть плоскость изотропии. В этой плоскости плоское деформированное состояние не электроактивное. Исходя из этого, здесь будем исследовать распространение горизонтально поляризованных (SH) электроупругих монохроматических волн

$$\{\vec{u}, \Phi\} = \{0;\ 0;\ w(x, y, t);\ \Phi(x, y, t)\}$$

Уравнения антиплоского электроупругого состояния записываются в виде

$$\operatorname{div}\vec{\sigma}_z=\rho(x, y)\ddot{w}; \quad \operatorname{div}\vec{D}=0; \quad \vec{E}=-\operatorname{grad}\Phi \tag{1.1}$$

Механические напряжения σ_{zx}, σ_{yz} и компоненты вектора электрической индукции D_x, D_y для неоднородного пьезоэлектрика указанной симметрии будут

$$\sigma_{zx}=G(x, y)w_{,x}+e(x, y)\Phi_{,x}, \quad \sigma_{zy}=G(x, y)w_{,y}+e(x, y)\Phi_{,y}$$

$$D_x=e(x, y)w_{,x}-\varepsilon(x, y)\Phi_{,x}, \quad D_y=e(x, y)w_{,y}-\varepsilon(x, y)\Phi_{,y} \tag{1.2}$$

с учетом которых уравнения (1.1) можно привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}
G(x, y)\nabla^2 w(x, y, t)+\operatorname{grad}G(x, y)\operatorname{grad}w(x, y, t)+\\
+e(x, y)\nabla^2\Phi(x, y, t)+\operatorname{grad}e(x, y)\operatorname{grad}\Phi(x, y, t)=\rho(x, y)\ddot{w}(x, y, t)\\
e(x, y)\nabla^2 w(x, y, t)+\operatorname{grad}e(x, y)\operatorname{grad}w(x, y, t)-\\
\varepsilon(x, y)\nabla^2\Phi(x, y, t)-\operatorname{grad}\varepsilon(x, y)\operatorname{grad}\Phi(x, y, t)=0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Очевидно, что в отличие от случая однородного пьезоэлектрика уравнения деформации и электростатики не разделяются. Но если предполагать, что диэлектрическая проницаемость и пьезоэлектрический модуль в неоднородном пьезокристалле меняются идентичным образом, то есть $e(x, y)=a_0\varepsilon(x, y)$, то получим

$$\begin{gathered}
\nabla^2 w(x, y, t)+\frac{\operatorname{grad}f(x, y)}{f(x, y)}w(x, y, t)=\frac{1}{C^2(x, y)}\ddot{w}(x, y, t)\\
\nabla^2\psi(x, y, t)+\frac{\operatorname{grad}\varepsilon(x, y)}{\varepsilon(x, y)}\psi(x, y, t)=0
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$f(x, y)=G(x, y)+a_0 e(x, y); \quad C^2(x, y)=f(x, y)/\rho(x, y)$$

$$\psi(x, y, t)=\Phi(x, y, t)-a_0 w(x, y, t); \quad a_0 - \text{постоянная}.$$

Возьмем решение уравнений (1.4) в виде монохроматической волны

$$\begin{Bmatrix} w(x, y, t)\\ \psi(x, y, t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} A_w(x, y)\\ A_\psi(x, y)\end{Bmatrix}\exp i\left[\begin{Bmatrix}\varphi_w(x, y)\\ \varphi_\psi(x, y)\end{Bmatrix}-\omega t\right] \tag{1.5}$$

Здесь $A_w(x, y)$ и $A_\psi(x, y)$—амплитуды, а $\varphi_w(x, y)$ и $\varphi_\psi(x, y)$—укороченные фазы монохроматических волн.

Найдем условия существования монохроматических волн (1.5) для уравнений электроупругости (1.4). С учетом (1.5) из (1.4) после несложных преобразований находим системы уравнений, которым должны удовлетворять амплитуды $A_w(x, y)$; $A_\psi(x, y)$ и фазы $\varphi_w(x,y)$; $\varphi_\psi(x, y)$:

$$(\operatorname{grad}U_w)^2-(\operatorname{grad}\varphi_w)^2+\nabla^2 U_w+\frac{\operatorname{grad}f(x, y)}{f(x, y)}\operatorname{grad}U_w+\frac{\omega^2}{C^2(x, y)}=0 \tag{1.6}$$

$$2\mathrm{grad}\,U_w\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_w+\nabla^2\varphi_w+\frac{\mathrm{grad}\,f(x,y)}{f(x,y)}\,\mathrm{grad}\,\varphi_w=0$$

$$(\mathrm{grad}\,U_\varphi)^2-(\mathrm{grad}\,\varphi_\varphi)^2+\nabla^2U_\varphi+\frac{\mathrm{grad}\,\varepsilon(x,y)}{\varepsilon(x,y)}\,\mathrm{grad}\,U_\varphi=0$$

$$2\mathrm{grad}\,U_\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\varphi_\varphi+\nabla^2\varphi_\varphi+\frac{\mathrm{grad}\,\varepsilon(x,y)}{\varepsilon(x,y)}\,\mathrm{grad}\,\varphi_\varphi=0 \tag{1.7}$$

где
$$U(x,y)=\ln A(x,y)$$

Точные решения полученных систем нелинейных уравнений дают решения

$$w(x,y,t)=\exp[U_w(x,y)+i\varphi_w(x,y)-i\omega t] \tag{1.8}$$

$$\Phi(x,y,t)=\exp[U_\varphi(x,y)+i\varphi_\varphi(x,y)-i\omega t]+a_0w(x,y,t)$$

Если аналогично гармонической волне ввести вектор $\vec{k}=\mathrm{grad}\,\varphi$, то этот вектор будет функцией координат x и y как по величине, так и по направлению.

Таким образом, задача о распространении монохроматических волн в неоднородной пьезоэлектрической среде приводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений типа (1.6) относительно амплитуд и фаз волны.

2. Пусть неоднородный по толщине пьезоэлектрический слой отнесен к системе декартовых координат таким образом, что занимает область $\{|x|<\infty,\ |y|\leqslant h;\ |z|<\infty\}$. Тогда все физические характеристики материала будут функциями координаты y. Рассмотрим распространение монохроматической электроупругой SH волны в направлении оси ox, когда поверхности $y=\pm h$ металлизированы и свободны от механических нагрузок

$$\sigma_{zy}(x,\pm h,t)=0,\quad \Phi(x,\pm h,t)=0 \tag{2.1}$$

Требуя, чтобы волна распространялась по оси ox, мы предопределяем функции $\varphi_w(x,y)$ и $\varphi_\varphi(x,y)$:

$$\mathrm{grad}\{\varphi_w(x,y);\ \varphi_\varphi(x,y)\}=k\cdot\vec{i}_x \tag{2.2}$$

Допущения, сделанные по отношению неоднородности пьезоэлектрика и о направлении распространения волны, дают возможность утверждать, что амплитуды волны будут изменяться только по толщине слоя. Следовательно, уравнения (1.6) и (1.7) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2U_w}{dy^2}+\frac{f'(y)}{f(y)}\frac{dU_w}{dy}+\left(\frac{dU_w}{dy}\right)^2-k^2(1-V^2(y))=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2U_\varphi}{dy^2}+\frac{\varepsilon'(y)}{\varepsilon(y)}\frac{dU_\varphi}{dy}+\left(\frac{dU_\varphi}{dy}\right)^2-k^2=0 \tag{2.4}$$

где
$$V^2(y)=\omega^2/[k^2C^2(y)]$$

Введя обозначение $dU_w/dy=U_*(y)$, уравнение типа (2.3) приводится к уравнению Риккати

$$U'_*(y)=U_*^2(y)-[f'(y)/f(y)]U_*(y)+k^2[1-V^2(y)]$$

которое при произвольной неоднородности среды не имеет аналитического решения. Но если функция $f'(y)/f(y)$ непрерывна в интервале $-h<y<h$, то решение уравнения Риккати приводится в отличное от нуля решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами относительно амплитуды $A_w(y)$

$$\frac{d^2A_w(y)}{dy^2}+\frac{f'(y)}{f(y)}\frac{dA_w(y)}{dy}-k^2[1-V^2(y)]A_w(y)=0 \qquad (2.5)$$

Аналогичным образом, решение уравнения (2.4) приводится к решению линейного уравнения относительно амплитуды электрического потенциала $A_\varphi(y)$

$$\frac{d^2A_\varphi(y)}{dy^2}+\frac{\varepsilon'(y)}{\varepsilon(y)}\frac{dA_\varphi(y)}{dy}-k^2A_\varphi(y)=0 \qquad (2.6)$$

Очевидно, что полученные уравнения (2.5), (2.6), соответствующие рассматриваемому частному случаю, можно сразу получить из (1.4), представляя искомые функции $w(x,y,t)$ и $\varphi(x,y,t)$ в виде

$$\mathcal{F}(x,y,t)=A(y)\cdot\exp\{i(kx-\omega t)\}$$

Пусть неоднородность по толщине пьезоэлектрического слоя является линейной

$$\gamma(y)=\frac{\gamma^++\gamma^-}{2}+\frac{\gamma^+-\gamma^-}{2h}y \qquad (2.7)$$

где γ^+ и γ^- соответствуют значениям физических характеристик $G(y)$, $\rho(y)$, $\varepsilon(y)$ на границах слоя $y=\pm h$, соответственно.

С учетом законов неоднородности слоя (2.7) уравнения (2.5) и (2.6) преобразуются к виду

$$(1+g_0y)\frac{d^2A_w}{dy^2}+g_0\frac{dA_w}{dy}+k^2\left\{\left(\frac{v_\Phi^2}{c_0^2}-1\right)+\left(\rho_0\frac{v_\Phi^2}{c_0^2}-g_0\right)y\right\}A_w=0 \qquad (2.8)$$

$$(1+\varepsilon_0y)\frac{d^2A_\varphi}{dy^2}+\varepsilon_0\frac{dA_\varphi}{dy}-k^2(1+\varepsilon_0y)A_\varphi=0 \qquad (2.9)$$

здесь $g_0=\dfrac{1}{h}\dfrac{\bar{G}^+-\bar{G}^-}{\bar{G}^++\bar{G}^-}$, $\rho_0=\dfrac{1}{h}\dfrac{\rho^+-\rho^-}{\rho^++\rho^-}$, $\varepsilon_0=\dfrac{1}{h}\dfrac{\varepsilon^+-\varepsilon^-}{\varepsilon^++\varepsilon^-}$, $c_0^2=G_0/\mathcal{P}_0$,

$G_0=(\bar{G}^++\bar{G}^-)/2$, $\mathcal{P}_0=(\rho^++\rho^-)/2$, $\bar{G}^\pm=G^\pm+a_0e^\pm$, $v_\Phi=\omega/k$.

Решения уравнения (2.8) и (2.9) с помощью представления искомых функций $A_w(y)$ и $A_\varphi(y)$ в виде

$$F(y)=\exp(-k\varkappa y)\cdot Z(\xi),\quad y=\lambda\xi+\mu$$

приводятся к решению вырожденных гипергеометрических уравнений относительно функции $Z(\xi)$. Решения $A_{\varpi}(y)$ и $A_{\delta}(y)$ представляются вырожденными гипергеометрическими функциями $F(a;1;\xi)$ и $M(a;1;\xi)$:

$$A_{\varpi}(y)=\exp(-k\varkappa y)[C_1F(a;1;\xi)+C_2M(a;1;\xi)]$$

$$A_{\delta}(y)=\exp(-ky)\left|C_3F\left(\frac{1}{2};1;\eta\right)+C_4M\left(\frac{1}{2};1;\eta\right)\right| \tag{2.10}$$

где $F(a,b,x)$ и $M(a,b,x)$—гипергеометрические ряды

$$F(a;b;x)=1+\sum_{n=1}\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$M(a;b;x)=F(a;b;x)\cdot\ln|x|+\sum_{m=1}^{\infty}C^{m}_{a+m-1}\cdot\frac{x^m}{m!}\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{1}{a+n}-\frac{2}{1+n}\right) \tag{2.11}$$

$$\xi=(1/\lambda_1)(y-\mu_1);\quad \eta=(1/\lambda_2)(y-\mu_2),\quad \mu_1=-(1/g_0)$$

$$\lambda_1=\{2k[1-(\rho_0/g_0)(v_\Phi/c_0)^2]^{1/2}\}^{-1}$$

$$\mu_2=-(1/\varepsilon_0),\quad \lambda_2=(2k)^{-1},\quad \varkappa=[1-(\rho_0/g_0)(v_\Phi/c_0)^2]^{1/2}$$

$$a=\frac{1}{2}\{1-(1-\rho_0/g_0)(v_\Phi/c_0)^2[1-(\rho_0/g_0)(v_\Phi/c_0)^2]^{-1/2}\}$$

Для определения фазовой скорости v_Φ получим дисперсионное уравнение в виде

$$\det|C_{ij}(v_\Phi)|=0 \tag{2.12}$$

где

$$C_{j1}=(e^{\pm}/\varepsilon^{\pm})\exp(\mp k\varkappa h)\cdot F(a;1;\xi(\pm h)),\quad C_{j2}=(e^{\pm}/\varepsilon^{\pm})\exp(\mp k\varkappa h)\times$$

$$\times M(a;1;\xi(\pm h)),\quad C_{j3}=\exp(\mp kh)\cdot F\left(\frac{1}{2};1;\eta(\pm h)\right)$$

$$C_{j4}=\exp(\mp kh)\cdot M\left(\frac{1}{2};1;\eta(\pm h)\right)$$

$$C_{n1}=\left[\frac{a}{\lambda_1}F(a+1;2;\xi(\pm h))-k\varkappa F(a;1;\xi(\pm h))\right]\exp(\mp k\varkappa h) \tag{2.13}$$

$$C_{n2}=-\left[\frac{a}{\lambda_1}M(a+1;2;\xi(\pm h))+k\varkappa M(a;1;\xi(\pm h))\right]\exp(\mp k\varkappa h)$$

$$C_{n3}=(e^{\pm}/\bar{G}^{\pm})\left[\frac{1}{2\lambda_2}F\left(\frac{3}{2};2;\eta(\pm h)\right)-kF\left(\frac{1}{2};1;\eta(\pm h)\right)\right]\exp(\mp kh)$$

$$C_{n4}=-(e^{\pm}/\bar{G}^{\pm})\left[\frac{1}{2\lambda_2}M\left(\frac{3}{2};2;\eta(\pm h)\right)+kM\left(\frac{1}{2};1;\eta(\pm h)\right)\right]\exp(\mp kh)$$

$j=1;2;\quad n=3;4$

При отсутствии пьезоэлектрического эффекта элементы матрицы $C_{11}=C_{12}=C_{83}=C_{84}=0$, и дисперсионное уравнение в этом случае намного упрощается.

Дисперсионное уравнение (2.12) имеет сложный трансцендентный вид. Существование его решения означает, что в неоднородном пьезоэлектрическом слое, с линейной неоднородностью физических характеристик, возможно распространение сдвиговой электроупругой волны по направлению ox.

Рассмотрим предельные случаи. Предположим, что длина волны $l=2\pi/k$ очень мала по сравнению с толщиной неоднородного слоя $2h$. Используя асимптотики гипергеометрических функций $F(a, b, x)$ и $M(a, b, x)$ при $|x|\to\infty$

$$F(a, b, x)=\begin{cases}[\Gamma(b)/\Gamma(a)]x^{(a-b)}\cdot \exp x\cdot[1+0(x)^{-1}] & \text{при} \quad x\to+\infty\\ [\Gamma(b)/\Gamma(b-a)]\cdot(-1/x^{a})\cdot[1+0(|x|^{-1})] & \text{при} \quad x\to-\infty\end{cases}$$

$$M(a, b, x)=(1/x)^{a}[1+0(|x|^{-1})] \quad \text{при} \quad |x|\to\infty$$

получим

$$V^2_{\pm}=C_0^2(g_0/\rho_0)(1-\varkappa^4_{\pm})=(\bar{G}^{+}-\bar{G}^{-})(1-\varkappa^4_{\pm})/(\rho^{+}-\rho^{-}) \tag{2.14}$$

Здесь величины $\varkappa_{+}$ и $\varkappa_{-}$ — коэффициенты электромеханической связи пьезоэлектрика на поверхностях $y=\pm h$ неоднородного пьезослоя, соответственно.

Полученные значения для фазовой скорости $v_ф$ напоминают характеристическое уравнение для поверхностных волн Гуляева-Блюстенна. В случае неоднородного слоя поверхностные сдвиговые волны вблизи поверхностей $y=\pm h$ распространяются с разными скоростями: $v_ф=V_{\pm}$, соответственно.

Из (2.14) очевидно, что если неоднородный слой на поверхностях $y=\pm h$ имеет характеристики таких пьезоэлектриков, для которых

$$(\bar{G}^{+}>\bar{G}^{-} \text{ и } \rho^{+}<\rho^{-}) \quad \text{или} \quad (\bar{G}^{+}<\bar{G}^{-} \text{ и } \rho^{+}>\rho^{-}) \tag{2.15}$$

то поверхностные волны по границам $y=\pm h$ не будут распространяться.

Если длина волны очень велика по сравнению с толщиной слоя $l=2\pi/k\gg 2h$, то заменяя в уравнении (2.12) вырожденные гипергеометрические функции на их асимптоты при $\xi, \eta\to 0$

$$F(a, b, \xi)\to 1,$$

$$M(a, b, \xi)=\begin{cases}-[1/\Gamma(a)]\cdot\ln\xi+0(|\xi\ln\xi|) & \text{при} \quad b=1\\ [1/\Gamma(a)](1/\xi)+0(|\ln\xi|) & \text{при} \quad b=2\end{cases}$$

получим, что линейная неоднородность пьезоэлектрического материала не вводит качественные поправки в общую картину длинных волн. Она только количественно изменяет скорость распространения длинных волн. При соблюдении условия (2.15) длинные волны также не могут распространяться.

Пара пьезоэлектриков — пьезокерамика ЦТС—4 ($c^{+}_{44}=2{,}56\cdot 10^{10}$ Па, $\rho^{+}=7{,}5\cdot 10^{3}$ кг/м^3, $e^{+}_{15}=12{,}5$ Кл/м^2, $\varepsilon^{+}_{11}=650\cdot 10^{-11}$ Ф/м) и окись цинка ($c_{44}^{-}=4{,}25\cdot10^{10}$ Па, $\rho^{-}=5{,}68\cdot10^{3}$ кг/м^3, $e_{15}^{-}=-0{,}59$ Кл/м^2, $\varepsilon_{11}^{-}=7{,}38\cdot10^{-11}$ Ф/м) имеют характеристики, удовлетворяющие условиям $\tilde{G}^{+}<\tilde{G}^{-}$ и $\rho^{+}>\rho^{-}$. Следовательно, в этом случае распространение поверхностных сдвиговых волн в неоднородном слое невозможно.

ABOUT PROPOGATION OF ELECTROELASTIC MONOCHROMATIC WAVE IN NONHOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC

A. S. AVETISIAN

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՊԻԵԶՈԷԼԵԿՏՐԻԿՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄՈՆՈՔՐՈՄԱՏԻԿ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Հետազոտվում է անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկում էլեկտրաառաձգական մոնոքրոմատիկ ալիքի տարածման հարցը։ Ստացված է ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որին բավարարում են ալիքի ամպլիտուդային և փուլային ֆունկցիաները։

Դիտարկվում է գծային անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկ շերտում սահքի ալիքի տարածման խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аветисян А. С.* Поверхностные электроупругие волны Лява в случае неоднородного пьезоэлектрического слоя.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1987, т. 40, № 1, с. 24—29.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. т. 1. М.—Л.: ГИТТЛ, 1951, 476 с.
3. *Bakirtas I., Maugin G. A.* Ondes de surface SH pures en elasticite inhomogene.—Journ. de Mécanique théorique et appliquée, 1982, vol. 1, № 6, p. 995—1013.
4. *Bhattacharya S. H.* Exact solutions of SH wave equation in transversely isotropic inhomogeneous elastic media.—Pure and Appl. Geophys., 1971, vol. 93, № 1, p. 19—35.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию 21.XII.1987