

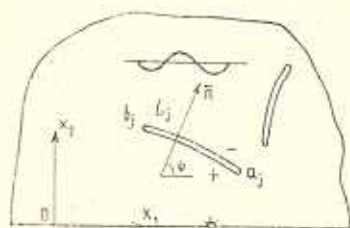
УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН МЕХАНИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ С
 ТУННЕЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В
 ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ФИЛЬШТИНСКИЙ М. Л.

Решение ряда статических и динамических задач электроупругости для тел с трещинами содержится, например, в [1—5]. Ниже рассматривается динамическая краевая задача электроупругости для пьезокерамического полупространства с туннельными криволинейными трещинами—разрезами, находящегося в состоянии продольного сдвига. Краевая задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений механических и электромагнитных величин. Представлены результаты расчетов.

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим отнесенную к кристаллофизической системе координат $ox_1x_2x_3$ полубесконечную пьезокерамическую среду $x_2 \geq 0$ (кристалл гексагональной системы *6mm*, пьезокерамика *PZT-4*, *PZT-5* и др.), ослабленную туннельными вдоль оси ox_3 криволинейными трещинами-разрезами L_j ($j = 1, 2, \dots, k$).



Фиг. 1

Пусть на берегах разрезов задана не зависящая от координаты x_3 непрерывная по Гельдеру сдвиговат нагрузка $Z_n = Z_n^+ = -Z_n^- = \text{Re}\{Z \exp(-i\omega t)\}$, а из бесконечности излучается монохроматическая SH-волна смещений (фиг. 1)

$$\omega_0 = \text{Re}\{W_0 \exp(-i\omega t)\}, \quad W_0 = z \exp\{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\} \quad (1.1)$$

$$\alpha_1 = \gamma_2 \cos \beta_*, \quad \alpha_2 = \gamma_2 \sin \beta_*, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{z}$$

$$z = \sqrt{\frac{c_{44}(1+z_0^2)}{\rho}}, \quad z_0^2 = \frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11} c_{44}}$$

Здесь ω —частота, β_* —угол между нормалью к фронту падающей волны и осью ox_1 ; c_{44} , e_{15} , ε_{11} и ρ —соответственно модуль сдвига, пьезокерамический модуль, диэлектрическая проницаемость и плотность материала.

Ниже будем предполагать, что полупространство может быть либо закреплено, либо свободно от сил вдоль границы $x_2=0$. Кроме этого, рассмотрим два типа электрических краевых условий: граница полупространства электродирована и заземлена ($E_1=0$); полупространство граничит с вакуумом ($D_2=0$)

Относительно разрезов предположим, что L_j —простые разомкнутые непересекающиеся дуги с кривизнами, удовлетворяющими условию Гёльдера.

В этих условиях в теле действуют сопряженные волновые поля механических напряжений продольного сдвига $\tau_{12}(x_1, x_2)$, $\tau_{23}(x_1, x_2)$, векторов электрической и магнитной напряженности $E_i(x_1, x_2)$, $H_i(x_1, x_2)$ и $H_{3i}(x_1, x_2)$.

Полная система уравнений поставленной задачи имеет вид: уравнения состояния пьезосреды

$$\tau_{23}=c_{44}\partial_2 w - e_{15}F_2, \quad D_1=e_{15}\partial_1 w + \epsilon_{11}F_1 \quad (1.2)$$

$$\tau_{13}=c_{44}\partial_1 w - e_{15}F_1, \quad D_2=e_{15}\partial_2 w + \epsilon_{11}F_2$$

уравнение движения

$$\partial_1 \tau_{23} + \partial_2 \tau_{13} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

уравнения Максвелла

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \text{grad}_0 \frac{\partial H_3}{\partial t} = 0, \quad \partial_2 H_3 = \frac{\partial D_2}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\partial_1 H_2 = -\frac{\partial D_2}{\partial t}, \quad \partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0$$

Электромагнитные граничные условия на берегах разрезов возьмем в виде

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^-, \quad H_s^+ = H_s^-, \quad B_n^+ = B_n^- \quad (1.5)$$

Можно показать [4], что амплитуды механических и электромагнитных величин выражаются через две функции W и F в виде

$$T_{23} = c_{44}(1 + z_0^2)\partial_2 W + e_{15}\partial_1 F, \quad T_{13} = c_{44}(1 + z_0^2)\partial_1 W - e_{15}\partial_2 F$$

$$E_1^* = \partial_2 F - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}\partial_1 W, \quad E_2^* = -\partial_1 F - \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}\partial_2 W \quad (1.6)$$

$$D_1^* = \epsilon_{11}\partial_1 F, \quad D_2^* = -\epsilon_{11}\partial_2 F, \quad H_3^* = -i\omega\epsilon_{11}F$$

Здесь T_{23}, \dots, H_3^* —амплитуды соответствующих механических, электрических и магнитных величин. Функции W и F удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 W + \gamma_2^2 W = 0, \quad \nabla^2 F = 0 \quad (1.7)$$

2. *Интегральные представления решений динамической задачи электроупругости для трещины продольного сдвига.* Волновые поля в полупространстве с дефектами складываются из прямой и отраженной от границы полупространства волн, а также рассеянного дефектами поля.

В соответствии с этим функции W и F представим в виде

$$W(x_1, x_2) = -\frac{1}{4} \int_L [W] \left\{ \frac{\partial}{\partial z} G(\zeta; z) dz - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} G(\zeta; z) d\bar{z} \right\} + W_0 - A W_1 \quad (2.1)$$

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ f(\zeta) H(\zeta; z) dz - f(\bar{\zeta}) \overline{H(\zeta; z)} d\bar{\zeta} \right\}$$

$$G(\zeta; z) = H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - A H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1), \quad \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$$

$$\bar{\zeta} = \zeta_1 - i\zeta_2, \quad H(\zeta; z) = \ln(\zeta - z) + A \ln(\zeta - \bar{z})$$

$$(\zeta_1, \zeta_2) \in L = \cup L_j, \quad W_1 = \tau \exp[-i(x_1 x_1 - x_2 x_2)]$$

Здесь $[W]$ — скачок амплитуды перемещения на L , случай $A = -1$ соответствует свободному, граничащему с вакуумом, полупространству, случай $A = 1$ — закреплённому и покрытому заземленным электродом полупространству.

Представления (2.1) удовлетворяют соответственно уравнениям (1.7), механическим и электрическим краевым условиям указанных типов на границе полупространства $x_2 = 0$, а также условиям излучения [6]

3. *Интегральное уравнение краевой задачи.* По формулам (1.6) находим интегральные представления величин $T_n = T_{1n} \cos \psi + T_{2n} \sin \psi$, E_n^* и D_n^* (ψ — угол между нормалью к левому берегу разреза и осью ox_1). Подстановка предельных значений E_n^* и D_n^* при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ в граничные условия (1.5) приводит к зависимостям

$$f(\zeta) = \frac{e_{12}}{2\epsilon_{11}} e^{-i\psi} \left[\frac{dW}{ds} \right], \quad \overline{f_1(\bar{\zeta})} = \frac{e_{12}}{2\epsilon_{11}} e^{i\psi} \left[\frac{dW}{ds} \right] \quad (3.1)$$

Условие непрерывной продолжимости вектора механических напряжений через L выполняется автоматически, а механическое граничное условие на одном из берегов L приводит к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_L p'(\zeta) g(\zeta, \zeta_0) ds + \int_L p(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) ds = N(\zeta_0) \quad (3.2)$$

$$g(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0} + A \gamma_0^2 \operatorname{Im} \frac{e^{-i\psi_0}}{\zeta - \bar{\zeta}_0}$$

$$g_1(\zeta, \bar{\zeta}_0) = \frac{\pi i \gamma_2^2 (1 + \alpha_0^2)}{4} [AH_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi + \psi_0) - \\ - H_0^{(1)}(\gamma_2 r_0) \cos(\psi - \psi_0) + H_2(\gamma_2 r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0) - \\ - AH_2^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \cos(\psi - \psi_0 + 2\alpha_{10})] \\ p(\zeta) = \frac{|W|}{2}, \quad p'(\zeta) = \frac{dp(\zeta)}{ds}$$

$$N(\zeta_0) = \frac{\pi Z}{c_{44}} + \pi i \gamma_2 (1 + \alpha_0^2) \{ \exp(-i(\alpha_1 \zeta_{10} + \alpha_2 \zeta_{20})) \times \\ \times \cos(\psi_0 - \beta_*) - A \exp(-i(\alpha_1 \zeta_{10} - \alpha_2 \zeta_{20})) \cos(\psi_0 + \beta_*) \}$$

$$r_0 = |\zeta_0 - \bar{\zeta}_0|, \quad r_{10} = |\zeta_0 - \bar{\zeta}_1|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta}_0)$$

$$\alpha_{10} = \arg(\zeta_0 - \bar{\zeta}_1), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta_0 = \zeta_{10} + i \zeta_{20}$$

$$\zeta, \bar{\zeta}_0 \in L, \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x)$$

Интегральное уравнение (3.2) в совокупности с дополнительными условиями равенства нулю скачков перемещений на концах разрезов

$$\int_{L_j} p'(\zeta) ds = 0 \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (3.3)$$

имеет единственное решение в классе функций, неограниченных на концах L_j [7].

4. *Динамический коэффициент интенсивности напряжений.* Введем параметризацию контура L . Положим

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad p'(\zeta) = \frac{\Omega_0(\beta)}{s'(\beta) \sqrt{1-\beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta} > 0 \\ \Omega_0(\beta) \in H[-1, 1] \quad (4.1)$$

Асимптотический анализ выражений $\partial_i W$ и $\partial_i F$ ($i=1, 2$), полученных из (2.1), с привлечением формул (1.6), позволяет найти главную сингулярную часть механических и электрических величин на продолжении за вершины трещины

$$\zeta_n^0 = -c_{44} \frac{\operatorname{Re}[e^{-i\omega t} \Omega_0(\mp 1)]}{\sqrt{2rs'(\mp 1)}}, \quad D_n^0 = \frac{e_{15}}{c_{44}} \zeta_n^0, \quad E_1^0 = E_2^0 = 0 \quad (4.2)$$

Здесь верхний знак относится к вершине трещины a , нижний — к b , r — расстояние от точки до вершины.

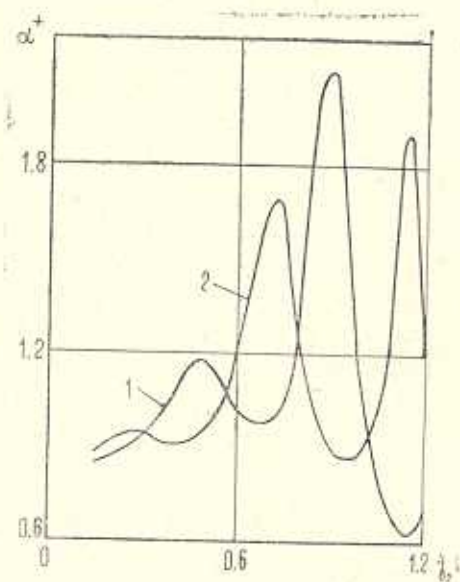
Напряженность электрического поля не имеет особенности в вершинах трещин. Это объясняется тем, что вектор \vec{E} непрерывно продолжается через разрезы в силу (1.5), условия $Z_n^+ = -Z_n^-$ и соотношений (1.2).

Динамический коэффициент интенсивности напряжений определяется обычным образом: $k_3 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta\theta}$ ($r \rightarrow 0$).

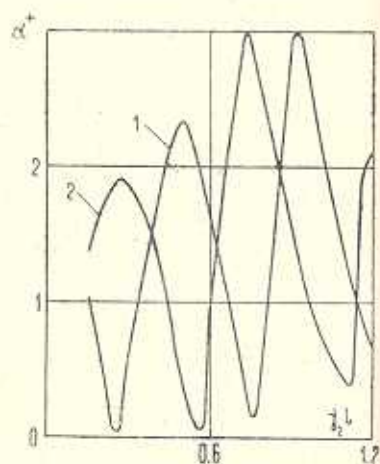
5. *Результаты расчетов.* Рассматривалась параболическая трещина в пьезокерамике $PZT=4$ ($c_{33} = 2,56 \cdot 10^{10}$ н/м², $e_{13} = 12,7$ к/м², $\epsilon_{11} = 730 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}$ ф/м), параметрическое уравнение которой

$$\zeta_1 = p_1 \beta, \quad \zeta_2 = p_2 + p_2 \beta^2, \quad -1 \leq \beta \leq 1 \quad (5.1)$$

Интегральное уравнение (3.2) с учетом (4.1) и (5.1) сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $\Omega_0(\beta)$ в узлах интерполяции согласно процедуре работы [8].



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 приведены значения $\alpha^+ = c_{44} |\Omega_0(1)| / (Z \sqrt{l s'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа $\gamma_2 l$ для случая $\tau = 0$, $Z = \text{const} \neq 0$, $p_1 = 1$, $p_2/2l = 3$; ($2l$ — длина разреза); кривая 1 построена для значений $A = 1$, $p = 0,5$; кривая 2 — для $A = -1$, $p = -0,5$.

Зная величины α^\mp и $\delta^\mp = \arg \Omega_0(\mp 1)$, находим коэффициент интенсивности k_3 по формуле

$$k_3 = -\sqrt{\pi l} Z \alpha^\mp c_{44} \cos(\omega t - \delta^\mp)$$

На фиг. 3 приведены графики величины $\alpha^+ = c_{44} |\Omega_0(1)| / (|T_{23}| \sqrt{l s'(1)})$ в зависимости от нормализованного волнового числа $\gamma_2 l$ для случая $Z = 0$, $\tau \neq 0$, $p_1 = 1$, $p_2/2l = 3$. Кривая 1 построена для значений $A = 1$, $p = 0,5$; кривая 2 — для $A = -1$, $p = -0,5$. Здесь величина T_{23} — амплитуда напряжения τ_{23} в падающей волне. Зная α^\mp и $\delta^\mp = \arg \Omega_0(\mp 1)$ находим динамический коэффициент интенсивности по формуле

$$k_3 = -\sqrt{\pi l} |T_{23}| \alpha^\mp \cos(\omega t - \delta^\mp)$$

INTERACTION BETWEEN THE WAVES OF MECHANICAL SHIFTS
WITH TUNNEL CRACKS OF LONGITUDINAL SHEAR IN
PIEZOCERAMIC HALF-SPACE

M. L. FILSHTINSKY

ՊԻԵՉՈԿԵՐԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿԻՍՏԱՐԱՄՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՄԵԼԵԱՆԻՍԿԱՆ
ՄԻՔՆԵՐԻ ՓՈՆԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ԹՈՒՆԵԼԱՅԻՆ
ՀԱՔԵՐԻ ՀԵՏ

Մ. Լ. ՖԻՇՏԻՆՍԿԻ

Ա մ փ ո փ ու մ

Կորագիծ թունելափայլ ճաքերով պիեզոկերամիկական կիսատարածու-
թյունում մեխանիկական տեղաշարժերի ալիքների փոխազդեցության մասին
էլեկտրատեղականության խնդիրը հանդիպում է տեղափոխությունների
թափանցիկ նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման: Այդ հավասար-
ումը լուծվում է թվային եզանակով կիրառելով Մոլոտոսկի տիպի բնթացա-
կարգ: Ընթացի գազաթում հաշվվում են մեխանիկական և էլեկտրական մեծու-
թյունների ինտենսիվության գործակիցները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудряцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 149—159.
2. Белокопытова Л. В., Фильштинский Л. А. Дзюмерная краевая задача электроупругости для пьезоэлектрической среды с разрезами.—ПММ, 1979, т. 43, вып. 1, с. 138—143.
3. Иваненко О. А., Фильштинский Л. А. Взаимодействии трещины и включения в пьезокерамическом полупространстве.—Прикладн. механика, 1983, т. 19, № 12, с. 52—58.
4. Партон В. З., Кудряцев Б. А. Динамическая антиплоская задача для пьезоэлектрической среды. Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1974, вып. 56, с. 3—13.
5. Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. Взаимодействие волн смещений с криволинейными трещинами продольного сдвига в пьезоэлектрической среде.—ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 822—826.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977. 736 с.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
8. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.—М.: Наука, 1973. 304 с.

Сумский филиал Харьковского
политехнического института
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
16.IX.1987