ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 5, 1988 Механика

УДК 539.3:534.1

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

РАДОВИНСКИЙ А. Л.

Достигнутый в последние годы значительный прогресс в изучении магнитоупругих колебаний тонких пластин и оболочек связан, в первую очередь, с использованием уравнений [1, 2], полученных С. А. Амбарцумяном, Г. Е. Багдасаряном, М. В. Белубекяном путем совместного интегрирования трехмерных уравнений Максвелла и уравнений теории упругости в тонкой области, занятой материалом оболочки. Однако, применение этих уравнений в расчетной практике существенно ограничивается тем, что в общем случае при их решении требуется учет электромагнитных параметров, получаемых решением трехмерной задачи электродинамики в окружающей оболочку среде. В монографии [1], работах С. О. Саркисяна ([3] и других, ссылки на которые содержатся в указанной статье) это затруднение снимается путем введения в двумерные уравнения интегральных членов, что в некоторых случаях позволяет эффективно решать конкретные задачи.

В представленной здесь работе, используя асимптотические свойства уравнений [1, 2], показано, что в низкочастотном диапазоне уравнения с некоторой степенью точности можно разбить на две подсистемы, решение первой из которых (система дифференциальных уравнений в частных производных) определяет собственные числа, формы колебаний и вихревые токи в оболочке, а вторая состоит в решении задачь Дирихле для внешней области и служит для нахождения в ней магнитного поля вихревых токов оболочки.

1. Будем исходить из следующих уравнений:

$$\vec{L}^h\vec{u}-\lambda^2\vec{u}=-\beta(\mathrm{grad}_3 F\times\vec{i}_3)\times\vec{B};\quad j_1\gamma\Delta_3 F+j_2 D f=i\,\mathrm{rot}_3(\vec{u}\times\vec{B}) \qquad (1.1)$$

$$\Delta\Phi=0,\ F=\Phi_s^+-\Phi_s^-,\ f=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)_s^+=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)_s^-$$

$$\gamma=(2h\mu_0\sigma)^{-1}\sqrt{\frac{\rho}{E}},\quad \beta=(2Fh\mu_0)^{-1},\quad \lambda^2=\frac{\rho\omega^2}{E},\quad i=\sqrt{-1}$$

Здесь α_j ($j=1, 2, 3$) — триортогональная система координат, введенная в окружающем оболочку пространстве V так, что срединная поверхность оболочки S совпадает с координатной поверхностью

$\alpha_3=0$, $\vec{i}_j$—соответствующие орты, $\vec{B}$—значение на S вектора магнитной индукции поля сторонних источников, $\vec{u}$—перемещения оболочки, Φ—магнитный потенциал (в V магнитная индукция поля вихревых токов $\vec{b}=\mathrm{grad}\,\Phi$), λ—частотный параметр, ω—круговая частота (множитель $\exp(i\omega t)$ отброшен), ρ, E, h, σ—плотность, модуль Юнга, полутолщина и проводимость оболочки, μ_0—магнитная постоянная, $\vec{L}^h$—оператор уравнений линейной теории оболочек [4], $(\ )^{\pm}_{S}=(\ )_{\alpha_3\to\pm 0}$, $\Delta\,(\Delta_S)$—оператор Лапласа в V (на S), j_1, j_2—условные множители, введенные для удобства последующего изложения (пока их надо считать равными единице).

Уравнения (1.1) получены в [5] путем линеаризации нелинейных уравнений электромеханики тонких упругих оболочек с точностью $O(\eta^{1-p})$ ($\eta=h/R$—относительная полутолщина, R—характерный размер S, p—показатель изменяемости искомого состояния [4]). Уравнения (1.1) также могут быть получены из [3] введением магнитного потенциала и отбрасыванием слагаемых $O(\eta^{1-p})$.

Для решения конкретных задач к уравнениям (1.1) надо добавить условие ограниченности решения Φ на бесконечности и некоторые условия на краю оболочки Γ, о которых будет сказано ниже.

2. Анализ свойств решений уравнений (1.1) будем вести асимптотическим методом, основанным на использовании малого параметра η. Данный метод был разработан А. Л. Гольденвейзером для исследования колебаний тонких упругих оболочек в вакууме [4], а затем обобщен автором на задачи гидроупругости оболочек [6] и магнитоупругости пластин [7]. Не останавливаясь на вопросах обоснования метода исследования (их можно найти в перечисленных работах), введем замены коэффициентов, независимых переменных и искомых величин согласно равенствам

$$\begin{gathered}\gamma=\eta^{a-1}\gamma_0,\quad \alpha_j=\eta^{p}R\xi_j,\quad \lambda=\eta^{r}R^{-1}\lambda_0\\ \Phi=\eta^{t}\Phi_0,\quad F=\eta^{t}F_0,\quad f=\eta^{t-p}R^{-1}f_0\end{gathered}\tag{2.1}$$

Числа a, r, p подберем так, чтобы для рассматриваемого состояния величины γ_0, λ_0 были $O(\eta^0)$, а дифференцирование по ξ_j не приводило бы к асимптотическому увеличению искомых величин. Тогда параметры p и r совпадут по смыслу с показателями изменяемости и частоты [7], а величины Φ_0, F_0, f_0 будут иметь одинаковый асимптотический порядок. Подставив (2.1) в левую часть второго уравнения (1.1), получим

$$j_1\gamma_0R^{-2}\Delta^*_\xi F_0+j_2 iR^{-2}\lambda_0 f_0=i\lambda\,\mathrm{rot}_3(\vec{u}\times\vec{B})\tag{2.2}$$

где множители $j_1=\eta^{t+a-1-2p}$ и $j_2=\eta^{t+r-p}$ определяют асимптотический порядок соответствующих слагаемых (Δ^*_ξ получен из Δ_* формальной заменой α_j на ξ_j). Примем порядок величины в правой части (2.2) за единицу и выберем число t так, чтобы асимптотически главное слагаемое в левой части (2.2) было $O(\eta^0)$. Тогда отвечающий ему множитель f_n в (1.1) можно положить равным единице, а множитель при второстепенном слагаемом—с точностью $O(\eta^\chi)$ $(\chi>0)$—равным нулю.

В зависимости от соотношения параметров (p, r, a) возможны два случая $(\varkappa=p+r+1-a)$:

$$\text{случай 1:}\quad \varkappa>0,\quad t=1-a+2p,\quad f_1=1,\ f_2=0,\ \chi=\varkappa$$

$$\text{случай 2:}\quad \varkappa<0,\quad t=p-r,\quad f_1=0,\ f_2=1,\ \chi=-\varkappa \tag{2.3}$$

3. Случаю 1 отвечают следующие приближенные уравнения:

$$\vec{L}^h\vec{u}-\lambda^2\vec{u}=-\beta(\mathrm{grad}_s F\times\vec{i}_3)\times\vec{B},\quad \gamma\Delta_s F=i\lambda\,\mathrm{rot}_3(\vec{u}\times\vec{B}) \tag{3.1}$$

$$\Delta\Phi=0,\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)_s^+=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\right)_s^-,\quad \Phi_s^+-\Phi_s^-=F \tag{3.2}$$

В этом случае задача магнитоупругости оболочки может быть решена интегрированием на поверхности S уравнений (3.1), образующих замкнутую систему относительно $\vec{u}$ и F. При этом, в каждой точке края оболочки может быть выполнено по пять краевых условий. Четыре из этих условий носят механический характер. Это—условия закрепления краев оболочки [4]. Пятое условие—электромагнитное. Выбор этого условия обсуждается ниже в п. 4. Для определения индуцированного магнитного поля в среде надо решить задачу (3.2), состоящую в интегрировании уравнения Лапласа в V при заданной величине F перепада значений функции Φ и при условии непрерывности нормальной производной от Φ на S, а также при условии ограниченности на бесконечности.

Случаю 2 отвечают уравнения (1.1), в которых, согласно (2.3), надо положить $f_1=0$, $f_2=1$. Получаемые при этом уравнения относительно $\vec{u}$, Φ, F, f надо решать совместно в трехмерной постановке. В случае, если $\varkappa=0$, надо положить $f_1=f_2=1$ и никаких упрощений исходных уравнений (1.1) не происходит.

Отметим, что возможность применения того или иного из сформулированных приближенных методов не зависит от уровня напряженности стационарного магнитного поля, а определяется только электромеханическими характеристиками и размерами оболочки (они определяют величину параметра a), частотой и формой колебаний (параметры r и p).

Замечание. Рассматриваемая задача (1.1) неконсервативна, а ее собственные значения, вообще говоря, комплексны. Причем $\mathrm{Re}\,\omega$ определяет колебательные свойства решения, а $\mathrm{Im}\,\omega$—затухание. В тех задачах, где представляет интерес определение $\mathrm{Im}\,\omega$, надо иметь в виду следующее. В случае 1 в головной (решаемой в первую очередь) подсистеме (3.1) содержится в качестве множителя мнимая единица i, а, следовательно, уже в исходном приближении могут быть определены значения $\mathrm{Im}\,\omega$. Поэтому, случай 1 можно назвать случаем относительно сильного демпфирования. В случае 2, положив $f_1=0$, получим головные уравнения с действительными коэффициентами, решая которые, как показал анализ, можно определить только $\mathrm{Re}\,\omega$, в то время как для определения $\mathrm{Im}\,\omega$ надо будет рассматривать последующие приближения. Это связано с тем, что при $\varkappa<0$ собственные значения задачи обладают свойством $\mathrm{Im}\,\omega \ll \mathrm{Re}\,\omega$. Поэтому случай 2 можно назвать случаем относительно слабого демпфирования. Для того, чтобы в случае 2 можно было бы определить $\mathrm{Im}\,\omega$ в исходном приближении, достаточно положить $f_1=1$, сохранив тем самым малый член, обусловливающий диссипативные свойства задачи.

4. Выбор электромагнитного краевого условия для произвольных условий закрепления оболочки представляет собой отдельную, весьма сложную задачу. Однако, для двух предельных случаев это условие можно сформулировать довольно просто. Это—случаи, в которых тела, находящиеся в контакте с краем оболочки, обладают характерными электромагнитными свойствами. К ним относятся диэлектрики (в том числе и воздух), не пропускающие электрического тока, и идеальный проводник, в котором магнитное поле равно нулю.

Учтем, что согласно [5] линейная плотность $\vec{I}$ вихревых токов и электрическое поле $\vec{e}$ в оболочке выражаются по формулам

$$\vec{I}=\mu_0^{-1}\,\mathrm{grad}_s F\times\vec{i}_3,\quad \vec{e}=(2h\sigma)^{-1}\,\vec{I}-i\omega\vec{u}\times\vec{B}$$

Совместим край оболочки Γ с α_1-линией. Условия на границе с диэлектриком и с идеальным неподвижным проводником будут соответственно иметь вид

$$(\vec{I}\cdot\vec{i}_1)_\Gamma=0 \quad \text{и} \quad (\vec{e}\times\vec{i}_1)_\Gamma=0 \tag{4.1}$$

Первое условие (4.1) (на границе с диэлектриком) выражается в форме равенства $(F)_\Gamma=0$. Второе условие с учетом того, что на границе с идеальным проводником нормальная компонента стационарного магнитного поля $B_3=0$, выполнится, в частности, если $(u_1)_\Gamma=0$ и $(\partial F/\partial\alpha_1)_\Gamma=0$. Первое из этих равенств входит в число четырех условий механического закрепления оболочки в неподвижной опоре. Из второго же следует, что $(\vec{I}\times\vec{i}_1)_\Gamma=0$, то есть что на краю отсутствуют касательные компоненты электрического тока, что соответствует известным физическим представлениям [8].

5. Рассмотрим в качестве примера задачу расчета осесимметричных колебаний бесконечной цилиндрической оболочки радиуса R в осевом магнитном поле с индукцией $\vec{B}=B\vec{i}_1$. Уравнения примем в форме [1].

Считая, что имеет место случай 1, запишем соответствующую головную систему уравнений

$$\left[1+\frac{h^2}{3R^2}\frac{d^4}{d\alpha_1^4}-\lambda R^2(1-\nu^2)\right]u_3=3BR(1-\nu^2)\frac{dF}{d\alpha_1} \tag{5.1}$$

$$\gamma \frac{d^2F}{d\alpha_1^2} = \sigma R B \frac{du_3}{d\alpha_1}$$

Решение будем искать в виде $u_3 = u_3^0 e^{ik\alpha_1}$, $F = F^0 e^{ik\alpha_1}$ (k—волновое число, u_3^0, F^0—амплитудные значения соответствующих величин). Получаемое из (5.1) частотное уравнение имеет вид

$$\Omega^2 - i\alpha\Omega - 1 = 0 \tag{5.2}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_s}, \quad \alpha = \frac{\sigma B^2}{\rho\omega_s}, \quad \omega_s^2 = \frac{(1-\nu^2)E}{\rho R^2}\left(1 + \frac{h^2k^4}{3R^2}\right)$$

где ω_s—частота собственных осесимметричных колебаний оболочки в отсутствии магнитного поля.

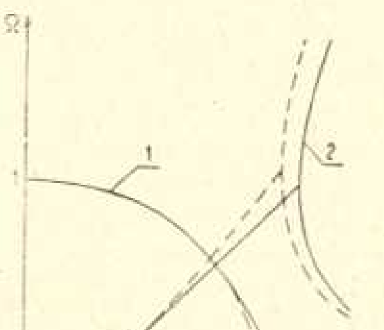
В [1] подобная задача была дважды решена в трехмерной постановке: один раз в рамках гипотез магнитоупругости, другой—на основе трехмерных уравнений магнитоупругости. В обоих случаях были получены частотные уравнения, которые в пределах применимости двумерной теории оболочек [4] для состояний с большой изменяемостью ($k \gg 1$) могут быть приведены к виду

$$\Omega^2 - i\alpha\left(1 + i\frac{\Omega}{\delta}\right)^{-1}\Omega - 1 = 0, \quad \delta = \frac{kR^{-1}}{\mu_0 \sigma h \omega_s} \tag{5.3}$$

Учитывая формулы (1.1), (2.1) для λ и γ, несложно проверить, что $\Omega/\delta \sim \eta^{\varkappa}$. Тогда в области определения случая I, то есть при $\varkappa > 0$ вторым слагаемым в круглой скобке (5.3) можно пренебречь в сравнении с единицей и полученное приближенное частотное уравнение совпадет с (5.2). Определяемые им собственные значения

$$\Omega = \frac{i\alpha}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

вообще говоря, комплексны. При $\alpha < 2$ уравнение (5.2) имеет два кратных мнимых корня. При $\alpha > 2$ колебания становятся апериодическими ($\operatorname{Re}\Omega = 0$).



Фиг. 1

На фиг. 1 приведена зависимость $\mathrm{Re}\,\Omega$ (кривая 1) и $\mathrm{Im}\,\Omega$ (кривая 2) от α, вычисленная по формуле (5.2). Здесь же пунктиром изображены соответствующие кривые, вычисленные по формуле (5.3) при $\delta=20$.

В заключение автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи, а также С. А. Амбарцумяна и участников семинара Института механики АН Арм. ССР за ценные замечания, сделанные при ознакомлении с изложенными в статье результатами.

ON REDUCING OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF MAGNETOELASTICITY OF THIN SHELLS TO TWO-DIMENSIONAL ONE

A. L. RADOVINSKY

ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՉԱՓ ԽՆԴՐԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ԵՐԿՉԱՓԻ

Ա. Լ. ՌԱԴՈՎԻՆՍԿԻ

Ամփոփում

Դիտարկված են ստացիոնար մագնիսական դաշտի առկայությամբ անօդ տարածությունում բարակ էլեկտրահաղորդիչ թաղանթների և սալերի տատանումների խնդրի ասիմպտոտիկական հատկությունները։

Ցույց է տրված, որ սպեկտրի ցածր հաճախականության մասում խնդիրը կարող է բերվել երկչափի, որն հետագայում լուծվում է մասնակի ածանցյալներով հավասարումների ինտեգրման միջոցով։

Բոլոր տեսական դրույթները լուսաբանվում են օրինակներով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. М.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин.—ПММ, 1973, т. 37, вып. 1, с. 114—130.
3. *Саркисян С. О.* К построению в целом двумерной теории колебаний проводящей тонкой оболочки методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругость.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, №5, с. 21—34.
4. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. *Радовинский А. Л.* Динамика упругих электропроводящих оболочек в постоянных и нестационарных магнитных полях.—ПММ, 1986, т. 50, вып. 5, с. 796—803.
6. *Радовинский А. Л.* Классификация свободных колебаний оболочек, содержащих жидкость.—Изв. АН СССР. МТТ, 1979, №6, с. 124—135.
7. *Радовинский А. Л.* О структуре спектра задачи магнитоупругости тонких пластин—Изв. АН СССР. МТТ, 1987, №1, с. 164—171.
8. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.

Всесоюзный заочный
машиностроительный институт

Поступила в редакцию
3.VI.1987