

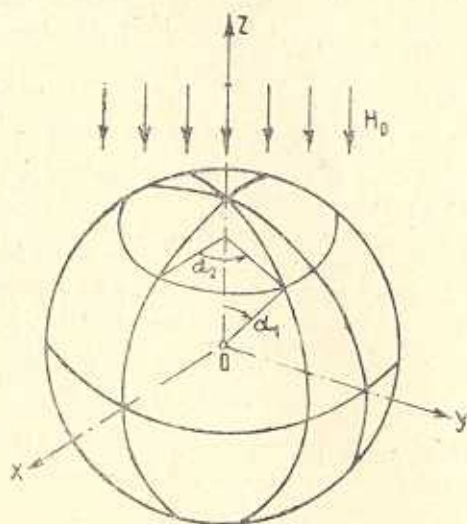
УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТОМЯГКОЙ  
 СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

МКРТЧЯН П. А.

В работе на основе линеаризованных уравнений и граничных условий возмущенного состояния исследуется поведение магнитомягкой сферической оболочки в переменном во времени однородном магнитном поле. Установлена возможность потери динамической устойчивости невозмущенного состояния. Получены формулы для определения критических частот, определяющие границы параметрического резонанса. Исследована зависимость ширины областей неустойчивости от напряженности магнитного поля.

1. Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины  $2h$  и радиуса срединной поверхности  $R$ , изготовленная из магнитомягкого материала, находится в нестационарном однородном магнитном поле  $\vec{H}_0(t)$ . Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Ортогональная система координат  $(a_1, a_2, a_3)$  выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам  $a_1, a_2$  ( $a_1$  — полярный угол,  $a_2$  — азимутальный), а ось  $a_3$  направлена по нормали к срединной поверхности (фиг. 1).



Фиг. 1

Принимаются следующие предположения: а) гипотеза Кирхгофа-Лева о недеформируемых нормалях; б) для среды, окружающей оболочку, считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума; в) подемоторная сила Ампера, пренебрежимо мала по сравнению с силой, обусловленной намагниченностью материала оболочки [1, 2]; г) для напряженности магнитного поля  $\vec{H}_0(t)$  выполняется условие квазистационарности.

Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле, имеет место намагничивание материала, приводящее к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве. Это изменение приводит к наложению на начальное поле  $\vec{H}_0$

$$\vec{H}_0 = H_0(t)(\sin \alpha_1 \vec{e}_1 - \cos \alpha_1 \vec{e}_3) \quad (1.1)$$

магнитного поля  $\vec{H}^0$ , которое создается намагничиванием тела и определяется из решения задачи магнитостатики. В результате, для невозмущенного магнитного поля  $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0$  в области, занимаемой оболочкой, получается выражение

$$\vec{H} = \frac{3H_0(1+2\mu_r)}{\Delta_0} \left\{ \left[ 1 + \frac{2(1-\mu_r)}{1+2\mu_r} \left( \frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \cos \alpha_1 \vec{e}_3 - \left[ 1 + \frac{\mu_r-1}{1+\mu_r} \left( \frac{R-h}{r} \right)^2 \right] \sin \alpha_1 \vec{e}_1 \right\} \quad (1.2)$$

где

$$\Delta_0 = 2(\mu_r - 1)^2 \lambda^3 - (2\mu_r + 1)(\mu_r + 2), \quad \lambda = (R-h)(R+h)^{-1}, \quad r = R + z_3$$

В (1.1), (1.2)  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_3$  — единичные векторы по направлениям соответствующих координатных линий,  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость материала оболочки.

Вследствие того, что магнитная проницаемость  $\mu_r$  отлична от единицы ( $\mu_r \gg 1$ ), на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления  $\vec{P}$ , определяемого формулой

$$\vec{P} = \frac{\mu_r - 1}{8\pi} (H_1^2 + \mu_r H_3^2) \vec{n}_0 \quad \text{при } z_3 = \pm h \quad (1.3)$$

где  $\vec{n}_0$  — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности оболочки.

Под действием нагрузки  $\vec{P}$  в оболочке устанавливается начальное невозмущенное состояние, характеризующееся усилиями  $T_1^0$  и  $T_2^0$ . Эти усилия определяются из уравнений безмоментной теории оболочек при поверхностных условиях (1.3) и выражаются формулами:

$$T_1^0 = \frac{p_0(t)\mu_r R}{4} \left[ 1 + \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 + \frac{\beta A_2^2}{A_1^2} \right]$$

$$T_2^0 = -\frac{\rho_0(t) \mu R}{4} \left| 1 - \frac{3}{A_1^2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{3\beta A_2^2}{A_1^2} \right| \quad (1.4)$$

где

$$A_1 = R, \quad A_2 = R \sin \alpha_1, \quad \mu = \mu_r (\mu_1^2 - 9), \quad \beta = (\mu_2^2 - 9 \mu_1^2) \mu^{-1}$$

$$\mu_1 = 1 + 2\nu_r + 2(1 - \nu_r) \nu^2, \quad \mu_2 = 1 + 2\nu_r + (\nu_r - 1) \nu^2, \quad \rho_0 = \frac{9(\nu_r - 1) H_0^2}{8\pi \Delta_0^2}$$

2. Характеристики возмущенного состояния должны удовлетворять нелинейным уравнениям и граничным условиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работе [3], линеаризуются. Используя известные соотношения гипотезы Кирхгофа-Лява, приходим к следующим линейным уравнениям и граничным условиям возмущенного состояния [4, 5]:

а) система дифференциальных уравнений устойчивости оболочки

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial x_1} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{u}{R} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} (\tau_{13}^+ - \tau_{13}^-) &= 0 \\ \frac{1}{A_2} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial x_2} - \frac{h^2}{3R^3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\Delta + 2) w \right] + \frac{1 - \nu}{R} \left( \frac{v}{R} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{1 - \nu^2}{2Eh} (\tau_{23}^+ - \tau_{23}^-) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{h^2}{3R^3} \Delta - \frac{1 + \nu}{R} \right) \delta - \frac{h^2}{3R^3} (\Delta + 1 - \nu) (\Delta + 2) w - \frac{\nu(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{1 - \nu^2}{2Eh} \left[ \tau_{33}^+ - \tau_{33}^- + \frac{h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_1} [A_2 (\tau_{13}^+ + \tau_{13}^-)] + \frac{h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} [A_1 (\tau_{23}^+ + \tau_{23}^-)] + \right. \\ &\left. + \frac{T_1^0}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{T_2^0}{A_2^2} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

где индексами  $+, -$  отмечены значения соответствующих величин на поверхностях оболочки  $x_3 = \pm h$ ;  $u(x_1, x_2, t)$ ,  $v(x_1, x_2, t)$ ,  $w(x_1, x_2, t)$  — искомые тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности оболочки;  $\tau_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, 3$ ) — компоненты тензора упругих напряжений возмущенного состояния

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (A_2 u) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_1 v) \right] + \frac{2w}{R} \\ \Delta &= \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

б) уравнения для индуцированного во всем пространстве магнитного поля  $\vec{h}$ , обусловленного деформацией оболочки

$$\Delta_1 \Phi^{(i)} = 0, \quad \Delta_1 \Phi^{(e)} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{h}^{(i)} = \text{grad} \Phi^{(i)}, \quad \vec{h}^{(e)} = \text{grad} \Phi^{(e)} \quad (2.4)$$

где  $\Delta_1$  — трехмерный оператор Лапласа в сферической системе координат,

в) граничные условия на поверхностях  $x_1 = \pm h$

$$\sigma_{jk} \cdot n_k^0 = [T_{jk}^{(e)} - T_{jk}^{(i)}] n_k^0 \quad (2.5)$$

$$T_{jk} = \frac{1}{4\pi} (h_j B_k + h_k B_j - \vec{h} \cdot \vec{B} \delta_{jk}), \quad \vec{B}^{(e)} = \vec{H}^{(e)}, \quad \vec{B}^{(i)} = \mu_r \vec{H}^{(i)} \quad (2.6)$$

$$\Phi^{(i)} = \Phi^{(e)} + \frac{3H_0(\mu_r - 1)}{\Delta_0} \left[ 1 + 2\nu_r + 2(1 - \nu_r) \left( \frac{R - h}{r} \right)^2 \right] w \cos z_1$$

$$\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r} - \frac{3H_0(\mu_r - 1)}{\Delta_0 \mu_r A_1^2 A_2} \left[ 1 + 2\nu_r + (\mu_r - 1) \left( \frac{R - h}{r} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial z_1} (A_2^2 w) \quad (2.7)$$

где  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции,  $T_{jk}$  — компоненты тензора напряжений Максвелла возмущенного состояния,  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера, индекс «i» обозначает принадлежность к внутренней области (пространство, занимаемое оболочкой), а индекс «e» — к внешней области.

Кроме условий (2.5) и (2.7) должны удовлетворяться условия затухания возмущений на бесконечности и условия конечности  $\vec{h}^{(i)}$  при  $r \rightarrow 0$ .

Решая задачи (2.3), (2.7), найдем выражения  $\Phi^{(i)}$  и  $\Phi^{(e)}$  в зависимости от  $w$ . Используя найденные выражения  $\Phi^{(i)}$  и  $\Phi^{(e)}$  из поверхностных условий (2.1), в силу (2.4) и (2.6) определяем величины  $\sigma_{jk}^+$ , входящие в уравнения (2.1). Подставляя указанные величины  $\sigma_{jk}^+$  в систему (2.1) и исключая неизвестные  $u$  и  $v$ , после некоторых преобразований, приходим к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно нормального перемещения  $w$ :

$$\begin{aligned} & [\beta(\Delta + 1)^2 + 1](\Delta + 2)w + \frac{\rho R^2}{E} (\Delta + 1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho_0(t) \nu R}{Eh} \left( \frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \Delta w - \frac{3A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + \left[ 1 - \frac{3}{A_1^2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w + \beta \left[ \frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{5A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} + 4 \left( 1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \right) w \right] \right\} + \frac{\rho_0(t) R (\mu_r - 1)}{Eh \mu_r} (\Delta + 1 - \nu) \left\{ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial F}{\partial z_1} - \right. \\ & \left. - \frac{\Phi}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial z_1} + \frac{\beta_1 \nu_r}{\mu_r - 1} \left[ 1 + \frac{1}{A_1^2} \left( \frac{\partial A_2}{\partial z_1} \right)^2 \right] w \right\} - \frac{\rho_0(t) R \mu_r}{4Eh} (\Delta + 1 - \nu) \times \quad (2.8) \\ & \times \left[ \Delta w + (1 - \beta) \left( \frac{A_2^2}{A_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2} - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} \Delta w \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$F = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} F_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos z_1) \cos \gamma z_2, \quad \partial^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2}$$

$$\Phi = \sum_{\xi=1}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{\xi} \Phi_{\xi\gamma} P_{\xi\gamma}(\cos z_1) \cos \gamma z_2, \quad \beta_1 = \mu_r (9\nu_r - \mu_1 \mu_2)$$

$$F_{\xi\gamma} = [\mu_1(\xi+1)\mu_{\xi\xi} + 3\xi\mu_{\xi\xi} + \beta_1] I_{\xi\gamma}^{(2)} + [3\mu_r\mu_{2\xi} - \mu_2\mu_{\xi\xi}] I_{\xi\gamma}^{(1)}$$

$$\Phi_{\xi\gamma} = [(\xi+1)(\mu_{\xi\xi} + \mu_1\mu_r)\mu_1 + 3\xi\mu_{\xi\xi} + 9\mu_r] I_{\xi\gamma}^{(2)} + (\mu_r\mu_{\xi\xi} - \mu_2\mu_{\xi\xi}) I_{\xi\gamma}^{(1)}$$

$$I_{\xi\gamma}^{(1)} = \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_2^2 w}{A_1^2} \right) P_{\xi\gamma}(\cos x_1) \cos \gamma x_2 dx_1 dx_2$$

$$I_{\xi\gamma}^{(2)} = \frac{1}{\|Y_{\xi\gamma}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial w}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} P_{\xi\gamma}(\cos x_1) \cos \gamma x_2 \sin x_1 dx_1 dx_2$$

$$\mu_{\xi\xi} = \frac{1}{R\Delta_{\xi\xi}} \left[ \left( \xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left( 3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) + \frac{\xi(1-\mu_r)}{\mu_r \lambda^{\xi+1}} \left( \mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right]$$

$$\mu_{\xi\xi} = \frac{1}{R\Delta_{\xi\xi}} \left[ \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)^{\xi}}{\mu_r} \left( 3\mu_r - \frac{\mu_2}{\lambda^{\xi}} \right) - \left( \xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left( \mu_2 + \frac{3\mu_r}{\lambda^{\xi+1}} \right) \right]$$

$$\mu_{\xi\xi} = \frac{1}{R\Delta_{\xi\xi}} \left[ \left( \xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) \left[ 3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] + \frac{3(\mu_r-1)^{\xi+1}}{\mu_r} \left[ \mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] \right]$$

$$\mu_{\xi\xi} = \frac{1}{R\Delta_{\xi\xi}} \left[ \left( \xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left[ \mu_1(\xi+1) - \frac{3\xi}{\lambda^{\xi+1}} \right] + \frac{(\xi+1)(\mu_r-1)}{\mu_r \lambda^{\xi}} \left[ 3\xi + \frac{\mu_1(\xi+1)}{\lambda^{\xi}} \right] \right]$$

$$\Delta_{\xi\xi} = \frac{\lambda^{-\xi}}{R-h} \left( \xi + \frac{\xi+1}{\mu_r} \right) \left( \xi + 1 - \frac{\xi}{\mu_r} \right) + \frac{\xi(\xi+1)^{\xi}}{R+h} \left( \frac{\mu_r-1}{\mu_r} \right)^{\xi}$$

$$\|Y_{\xi\gamma}\|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_{\gamma}}{2\xi+1} \frac{(\xi+\gamma)!}{(\xi-\gamma)!}, \quad \varepsilon_{\gamma} = \begin{cases} 2 & \text{при } \gamma=0, \\ 1 & \text{при } \gamma>0. \end{cases}$$

где  $P_{\xi\gamma}(x)$  — присоединенные функции Лежандра.

Решение уравнения (2.8) должно удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

3. Решение уравнения (2.8) представим в виде разложения

$$w = \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{k=0}^n w_{nk}(t) P_{nk}(\cos x_1) \cos kx_2, \quad (k \leq n, l=2,3,\dots) \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.8) и используя обычный процесс ортогонализации, для определения  $w_{nk}(t)$  получим бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Из указанной системы в первом приближении ( $n=l$ ) приходим к исследованию следующего уравнения:

$$\frac{d^2 w_{nk}}{dt^2} + \Omega_n^2 \left[ 1 - \frac{H_0^2(t)}{H_{0*}^2} \right] w_{nk} = 0 \quad (3.2)$$

где  $\Omega_n^0$  — частота собственных колебаний сферической оболочки в вакууме в отсутствии магнитного поля,  $H_{0*}$  — критическое значение напряженности магнитного поля, при котором оболочка теряет статическую устойчивость

$$\Omega_n^2 = \frac{E(\nu_n - 2)[1 - \zeta^2(\nu_n - 1)^2]}{\rho R^2(\nu_n - 1 + \nu)}, \quad H_{0_n}^2 = \frac{8\pi E h(\nu_n - 2)[1 - \zeta^2(\nu_n - 1)^2]}{9A_{kn} R(\nu_r - 1)(\nu_n - 1 + \nu)}$$

$$A_{kn} = \frac{\mu_r}{4\Delta_0^2(4\nu_n - 3)} \left\{ (1 - \zeta)(5\nu_n - 6) - 3\nu_n(\nu_n - 1) - \beta\lambda_n^2 + \frac{8(1 + \nu)}{\lambda_n - 1 + \nu} [\nu_n(1 - \zeta)(2\nu_n - k^2) + (6 + \zeta)\nu_n - 1, 5(5 + \zeta)k^2] - \frac{8\beta_1}{\mu} (3\nu_n^2 - k^2 - 2) \right\} + B_{kn}, \quad \nu_n = n(n+1)$$

$$B_{kn} = \frac{1}{(2n+1)\Delta_0^2} \left\{ \frac{n^2 - k^2}{2n-1} [(n-1)a_n - c_n] + \frac{(n-k+1)(n+k-1)}{2n+3} \times \right. \\ \left. \times [(n+2)b_n + d_n] \right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ [n\nu_1 + (n-1)\nu_2] \left[ \frac{(n-1)(\nu_r - 1)}{\mu_r \lambda^n} \left( \nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^n} \right) - \left( n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n-1}} \right) \right] + 3(n-1)(\nu_r - 1) \left[ \frac{n(\nu_r - 1)}{\mu_r} \left( 3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n-1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( n-1 + \frac{n}{\nu_r} \right) \left( \nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^n} \right) \right] \right\} + \frac{\beta_1(\nu_r - 1)}{\mu_r}$$

$$b_n = \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (\nu_1 - \nu_2) \left[ \left( n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left( 3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \frac{(n+1)(\nu_r - 1)}{\mu_r \lambda^{n+2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + 3[n+1 + (n+2)\nu_r] \left[ \frac{(n+2)(\nu_r - 1)}{\mu_r} \left( 3\nu_r - \frac{\nu_2}{\lambda^{n+1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left( \nu_2 + \frac{3\nu_r}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \right\} + \frac{\beta_2(1 - \nu_r)}{\mu_r}$$

$$c_n = \frac{1}{\Delta_{2n}} \left\{ (n-1)(\nu_r - 3) \left[ \left( n-1 - \frac{n}{\nu_r} \right) \left( n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) + \frac{n(\nu_r - 1)}{\mu_r \lambda^{n-1}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) \right] - [(n-1)\nu_2 + n\nu_1] \left[ \left( n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) \left( 3n-3 + \frac{n\nu_1}{\lambda^{n-1}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n-1)(\nu_r - 1)\lambda^n}{\mu_r} \left( n\nu_1 - \frac{3n-3}{\lambda^n} \right) \right] \right\} + (\nu_r - 1)(n\nu_1^2 + 9) \quad (3.3)$$

$$d_n = \frac{1}{\Delta_{3n}} \left\{ (n+2)(\nu_1 - \nu_2) \left[ \left( n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) \left( 3n+3 + \frac{n\nu_1 + 2\nu_1}{\lambda^{n+1}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n+1)(\nu_r - 1)}{\mu_r} \left( n\nu_1 + 2\nu_1 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+2}} \right) \right] + [(n+2)\nu_r + 3(n+1)] \left[ \left( n+1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left( n\nu_1 + 2\nu_1 - \frac{3n+3}{\lambda^{n+1}} \right) + \frac{(n+2)(\nu_r - 1)}{\mu_r \lambda^{n+1}} \left( 3n+3 + \frac{n\nu_1 + 2\nu_1}{\lambda^{n+1}} \right) \right] \right\} + \\ + (1 - \nu_r)[(n+2)\nu_1^2 + 9]$$

$$\Delta_{2n} = \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)^{n-1}} \left( n-1 + \frac{n}{\nu_r} \right) \left( n - \frac{n-1}{\nu_r} \right) + \frac{n(n-1)(1-\nu_r)^{n-1}}{\nu_r}$$

$$\Delta_{2n} = \frac{\nu_r}{(1-\nu_r)^{n+1}} \left( n+1 + \frac{n+2}{\nu_r} \right) \left( n+2 - \frac{n+1}{\nu_r} \right) + \frac{(n+1)(n+2)(1-\nu_r)^{n+1}}{\nu_r}$$

В качестве примера рассмотрим задачу динамической устойчивости сферической оболочки, когда  $H_0(t) = H_0 + H_1 \cos \omega t$ . В этом случае уравнение (3.2) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \omega_{nk}}{dt^2} + \Omega_n^2 [1 - 2\beta_{nk}^{(1)} \cos \omega t - 2\beta_{nk}^{(2)} \cos 2\omega t] \omega_{nk} = 0 \quad (3.4)$$

Здесь приняты обозначения

$$\Omega_n^2 = \Omega_n^{02} \left( 1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{2H_{0*}^2} \right)$$

$$\beta_{nk}^{(1)} = \frac{H_0 H_1}{H_{0*}^2} \left( 1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{H_{0*}^2} \right)^{-1}, \quad \beta_{nk}^{(2)} = \frac{H_1^2}{4H_{0*}^2} \left( 1 - \frac{2H_0^2 + H_1^2}{2H_{0*}^2} \right)^{-1}$$

Уравнение (3.4) имеет периодические коэффициенты и, как известно [6], при некоторых соотношениях между коэффициентами оно имеет неограниченно возрастающие решения. Границы областей главного параметрического резонанса, согласно [6], определяются следующими приближенными формулами:

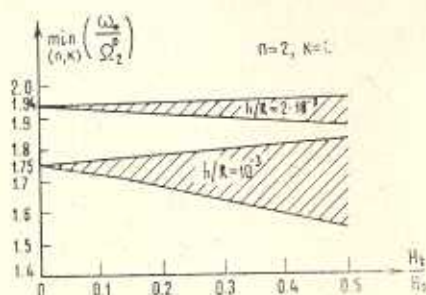
для областей, расположенных вблизи частоты  $2\Omega_n$

$$\frac{\omega_*}{\Omega_n} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{H_0}{H_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 \pm \frac{H_0 H_1}{H_{0*}^2} \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

для областей, расположенных вблизи частоты  $\Omega_n$

$$\frac{\omega_*}{\Omega_n} = \left[ 1 - \left( \frac{H_0}{H_{0*}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 \pm \frac{1}{4} \left( \frac{H_1}{H_{0*}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.6)$$

На основе (3.5) произведены вычисления минимальных критических значений частот  $\omega_*$  по числам волн  $n$  и  $k$ , определяющие границы области динамической неустойчивости, в зависимости от напряженности магнитного поля  $H_1$  при  $H_0 = 50$  кА/М. Для расчета принято, что оболочка изготовлена из материала НУ-РЕРМ 49, для которой  $\nu_r =$



Фиг. 2

$\approx 60800$ . С помощью результатов подсчета минимальных значений  $\omega_*$  на фиг. 2 показаны области динамической неустойчивости оболочки. Из фиг. 2 видно, что ширина области неустойчивости увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля. Кроме того критические значения частоты являются монотонно возрастающими функциями относительной толщины  $h/R$ .

## DYNAMIC STABILITY OF A SOFT-FERROMAGNETIC SPHERICAL SHELL IN A MAGNETIC FIELD

P. A. MKRTCHIAN

ՄԱԳՆԵՐՍՏԱԿԱՆ ՓԱՓՈՒԿ ՍՖԵՐԻԿ ՔԱՂԱՆԹԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿՍՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ՄԱԳՆԵՐՍՏԱԿԱՆ ԳՈՇՏՈՒՄ

Պ. Ա. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքում հետազոտված է մագնիսապետ փափուկ գնդային թաղանթի վարքը՝ քստ ժամանակի փոփոխական, համասեռ մագնիսական դաշտում: Ցույց է տրված թաղանթի շրջոված զիճակի դինամիկ կայունությունը կորցնելու հնարավորությունը: Գլխավոր պարամետրական ուղղանկյուն կրիտիկական հաճախականությունների որոշման համար ստացված են բանաձևեր: Ուսումնասիրված է մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը դինամիկ կայունության տիրույթների վրա:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мун, Пао И-синь. Магнитоупругое выпучивание тонкой пластинки.—Прикл. механика, 1968, № 1.
2. Мун, Пао И-синь. Колебания и динамическая неустойчивость стержня-пластины в поперечном магнитном поле.—Прикл. механика, 1969, № 1.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
4. Мкртчян П. А. Об уравнениях электромагнитоупругости сверхпроводящих сферических оболочек. III Всесоюзный симпозиум «Теоретические вопросы магнитоупругости». Изд. ЕрГУ, 1984. 116 с.
5. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. А. Устойчивость сверхпроводящей сферической оболочки в магнитном поле круговых токов.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1985, 38, № 5, с. 22—32.
6. Бологин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956, с. 586—593.

Երևանский политехнический институт им. К. Маркса

Поступила в редакцию  
25.V.1987