ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 4, 1988 Механика

УДК 539.319

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСОВ НА ГРАНИЦАХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО РАЗРЕЗА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

БАГДОЕВ А. Г., МАРТИРОСЯН А. Н.

Плоские задачи о импульсах, приложенных к берегам трещины в анизотропной среде, решены в [1, 2, 3]. Пространственная задача о трещине в изотропной среде рассмотрена в [4]. В данной работе дается решение пространственной задачи о движущейся трещине с определением коэффициентов интенсивности напряжений. Производится оценка применимости метода [5] к пространственным задачам.

§ 1. Решение задачи о импульсе, приложенном к границам движущейся трещины

В пространственной задаче, вводя компоненты $u_{1,2,3}$ вектора смещения по осям x, y, z, где $x=\bar{x}-Vt$, $\bar{x}$, y, z—неподвижная система координат, V—скорость трещины, t—время, можно сформулировать следующую задачу о полубесконечной движущейся трещине $(y=0)$.

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0,\ |x|<\infty,\quad |z|<\infty$$
$$\sigma_{yy}=\sigma_{-}(x,z,t),\ x<0;\quad u_2=0,\quad x>0 \tag{1.1}$$

Для простоты вначале выбирается нагрузка $\sigma_{-}(x,z,t)=-P\delta(x-\xi)\delta(z-\eta)H(t-\tau)$, где δ—дельта-функция, H—единичная функция, P, ξ, η—постоянные, $\xi<0$.

Уравнения движения в перемещениях для изотропной среды в пространственном случае имеют вид

$$(a^2-b^2)\frac{\partial\Delta}{\partial x}+b^2\nabla^2u_1=\Delta_1u_1,\quad (a^2-b^2)\frac{\partial\Delta}{\partial y}+b^2\nabla^2u_2=\Delta_1u_2$$
$$(a^2-b^2)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+b^2\nabla^2u_3=\Delta_1u_3,\quad \Delta=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z} \tag{1.2}$$
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-2V\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}+V^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

и нулевых начальных данных.

Решение ищется в виде интегральных трансформант Лапласа и Фурье по x, z

$$\bar{u}_{1,2,3}=\sum_{n=1}^{2}\int\int_{-\infty}^{\infty} u_{1,2,3}\exp(i\alpha x+i\gamma z+iy\beta_n)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\beta_n=\sqrt{\left(\frac{\omega+V\alpha}{c_n}\right)^2-\alpha^2-\gamma^2},\quad c_1=a,\quad c_2=b,\quad \omega=is \tag{1.3}$$

где s—параметр преобразования Лапласа. Проведем разрезы плоскости α и выделим однозначные ветви функций β_n [4]. Вводя также функции

$$\bar{\bar{u}}_2=U^+ + U^-,\quad \bar{\sigma}_y=\Omega^- + \Omega^+,\quad \Omega^+ = -\frac{P}{4\pi^2 s}\exp(-i\alpha\xi-i\gamma\eta-\tau s),\quad U^-=0$$

где индекс показывает, в какой полуплоскости функции аналитичны, можно из (1.3), (1.1) получить следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$4ib^4(V^2C_0)^{-1}\beta_2^+F^+U^+=(\Omega^+ + \Omega^-)/\beta_2^-F^-$$

$$F^\pm(\alpha,\gamma)=\frac{\alpha_3^\mp-\alpha}{\sqrt{\alpha_1^\mp-\alpha}\sqrt{\alpha_2^\mp-\alpha}}\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mp 1}^{\alpha_2^\mp}\ln\frac{R(\zeta,\gamma)}{R(\zeta,\gamma)}\frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}\right] \tag{1.4}$$

$$R(\alpha,\gamma)=(\beta_2^2-\alpha^2-\gamma^2)^2+4(\alpha^2+\gamma^2)\beta_1\beta_2,\quad R(\alpha_3^\pm,\gamma)=0$$

$$C_0=4[(1-b^{-2}V^2)(1-a^{-2}V^2)]^{1/2}[4\sqrt{(1-V^2b^{-2})(1-V^2a^{-2})}-(V^2b^{-2}-2)^2]^-$$

$$\alpha_n^\pm=(c_n^2-V^2)^{-1}[\omega V\pm c_n\sqrt{\omega^2-\gamma^2(c_n^2-V^2)}]$$

$$\beta_n^\pm=\sqrt{(Vc_n^-\mp 1)(\alpha_n^\mp-\alpha)},\quad \beta_n=\beta_n^+\beta_n^{-1},\quad c_3=c_R$$

где c_R есть корень функции Релея.

Обозначим $f(\alpha,\gamma)=-\dfrac{P\exp(-\tau s-\alpha\xi i-\gamma z i)}{4\pi^2 s\beta_2^-F^-}$ и представим функцию $f(\alpha,\gamma)$ в виде $f(\alpha,\gamma)=f^+(\alpha,\gamma)+f^-(\alpha,\gamma)$,

$$f^-(\alpha,\gamma)=\frac{P}{4\pi^2 s}\int_{\alpha_1^+}^{\infty}\frac{\sqrt{\eta_1-\alpha_1^+}D_-^{-1}(\eta_1,\gamma)\exp(-\tau s-i\gamma\eta-i\xi\eta_1)}{(\alpha_3^+-\eta_1)\sqrt{1+Vc_2^{-1}(\eta_1-\alpha)}}\,d\eta_1 \tag{1.5}$$

$$D_\pm(\alpha,\gamma)=\frac{F^\pm(\alpha,\gamma)}{\alpha_3^\mp-\alpha}\sqrt{\alpha_1^\mp-\alpha}\sqrt{\alpha_2^\mp-\alpha},\quad D_\pm^{-1}(\alpha,\gamma)=1/D_\pm(\alpha,\gamma)$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и решая уравнение Винера-Хопфа по α, можно получить, в частности,

$$\Omega^- = -f^-(\alpha,\gamma)\beta_2^-(\alpha,\gamma)F^-(\alpha,\gamma) \tag{1.6}$$

Сделаем видоизменение аналогично [5] для функций $D_\mp$, $D_\mp^{-1}$ по переменной α

$$D_{\pm}(\alpha,\gamma)=1+\int\limits_{\alpha_1^{\mp}}^{\alpha_2^{\mp}}\frac{F_1(u,\gamma)}{u\pm\alpha}\,du,\quad D_{\pm}^{-1}(\alpha,\gamma)=1+\int\limits_{\alpha_1^{\mp}}^{\alpha_2^{\mp}}\frac{F_2(u,\gamma)}{u\pm\alpha}\,du \tag{1.7}$$

$$F_1(u,\gamma)=\varphi(u,\gamma)\exp[\varkappa(u,\gamma)],\quad F_2(u,\gamma)=-\varphi\exp(-\varkappa)$$

$$\varphi=\frac{4(u^2+\gamma^2)}{\pi|R(u,\gamma)|}\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{b^2}\right)}\sqrt{u-\alpha_1^+}\sqrt{u-\alpha_1^-}\sqrt{(\alpha_2^+-u)(u-\alpha_2^-)}$$

$$\varkappa(u,\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^+}\ln\frac{R(\zeta,\gamma)}{\bar{R}(\zeta,\gamma)}\frac{d\zeta}{\zeta-u}$$

На плоскости x, z решение можно записать в форме Смирнова-Соболева в виде двукратных интегралов. Удобно для получения решения около края трещины ввести запись ($x>0$, $y=0$)

$$\sigma_y=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}ds\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega^-(\alpha,\gamma)\exp(st+i\alpha x+i\gamma z)\,d\alpha\,d\gamma \tag{1.8}$$

При $x\to+0$ имеем $\alpha\to\infty$, что позволяет вычислить последний интеграл и после обращения преобразований [1] и некоторых несложных вычислений получить

$$\sigma_y=\frac{P}{2\pi^2\sqrt{-\xi x}}\operatorname{Re}i\,\frac{\partial}{\partial t}H\left(t_1^2-\frac{\eta_1}{c_1^2-V^2}\right)\left\{\frac{2c_1\xi i}{\eta_1\sqrt{c_1^2-V^2}}\sqrt{t_1^2-\frac{\eta_1}{c_1^2-V^2}}+\right.$$

$$+\int\limits_{\gamma_2^-}^{\gamma_2^+}\left(\int\limits_{L}^{\alpha_2^+}\frac{\sqrt{u-\alpha_1^+}}{\alpha_3^+-u}\frac{F_2(u,\gamma)}{\sqrt{u-L}}\,du\right)H\left(\frac{\eta_2}{c_2^2-V^2}-t_2^2\right)d\gamma+ \tag{1.9}$$

$$\left.+\int\limits_{\gamma_3^-}^{\gamma_3^+}\left(1-\int\limits_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^+}\frac{F_2(u,\gamma)}{\alpha_3^+-u}\,du\right)\sqrt{\frac{\alpha_3^+-\alpha_1^+}{\alpha_3^+-\alpha_1^+-L}}H\left(\frac{\eta_3}{c_3^2-V^2}-t_3^2\right)d\gamma\right\}$$

$$t_n=\frac{t-\tau}{-\xi}-\frac{V}{c_n^2-V^2};\quad \eta_n=\frac{(z-\eta)^2}{\xi^2}+\frac{c_n^2}{c_n^2-V^2};\quad L=\frac{t-\tau-\gamma(z-\eta)}{-\xi}$$

$$t_n-(z-\eta)\gamma_n^{\pm}+\frac{c_n\xi}{c_n^2-V^2}\sqrt{1-(c_n^2-V^2)(\gamma_n^{\pm})^2}=0,\quad n=1,2,3$$

где четко выделены отраженные от движущейся трещины и идущие от приложенной силы волны, имеющие скорости $\sqrt{c_n^2-V^2}$. В случае $z\to\eta$, $x\to+0$ получится решение в виде (1.9), где надо подставить

$$\gamma_n^{\pm}=\pm\frac{c_n}{c_n^2-V^2}\sqrt{\eta_n-t_n^2(c_n^2-V^2)},\quad \eta_n=\frac{c_n^2}{c_n^2-V^2}$$

Из (1.9), отбрасывая формально $-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int d\gamma$, полагая $\gamma=0$ и делая замену в интеграле по $u=\eta_1(1-\eta_1 V)^{-1}$, можно получить решение для плоской задачи, которое находится аналогично (1.9)

$$\sigma_y=\frac{P}{\pi\sqrt{x}}D_-\left(\frac{1}{V}\right)\sqrt{\frac{a}{a-V}}\left\{D^{-1}\left(\frac{1}{V}\right)\sqrt{\frac{a-V}{-\xi a}}-\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{V(t-\tau)-\xi}}\frac{D_-^{-1}(c_R^{-1})}{\sqrt{c_R^{-1}-T}}\times\right.$$

$$\left.\times H\left(\frac{1}{c_R}-T\right)-\frac{V^{-1}-c_R^{-1}}{V(t-\tau)-\xi}\int\limits_T^{b^{-1}}\frac{F_2(u)\sqrt{u-a^{-1}}\,du}{(u-V^{-1})(u-c_R^{-1})\sqrt{u-T}}H(b^{-1}-T)\right\} \quad (1.10)$$

где D_- дается (1.7), где полагается $\gamma=0$ и производится замена $u=\eta_1(1-\eta_1 V)^{-1}$ в интеграле. Из (1.10) можно получить коэффициент интенсивности напряжений. Полагая $\eta=0$, $\xi=0$, $x\to+0$, можно решить исходную задачу методом Винера-Хопфа. Тогда для коэффициента интенсивности напряжений получится, как и в [4]

$$\sigma_{yy}=\frac{P\sqrt{2}\sqrt{a(c_2^2-V^2)}}{4\pi x\sqrt{x|z|}\,c_R\sqrt[4]{a^2-V^2}}\frac{H(t-\tau)}{D_-(0,\infty)}$$

где

$$D_-^{-1}(0,\infty)=1+\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{F_2(u)du}{u},\quad d_n=\frac{c_n}{\sqrt{c_n^2-V^2}}$$

$$F_2(u)=-\varphi(u)\exp(-\varkappa(u)),\quad \varkappa(u)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d_1}^{d_2}\ln\frac{R(\zeta)}{\overline{R(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta-u}$$

$$\varphi(u)=\frac{4(u^2-1)}{\pi|R(u)|}\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{b^2}\right)}\sqrt{u^2-d_1^2}\sqrt{d_2^2-u^2}$$

$$R(u)=4(u^2-1)\sqrt{\left(1-\frac{V^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{b^2}\right)}\sqrt{d_1^2-u^2}\sqrt{d_2^2-u^2}+\left[\left(\frac{V^2}{b^2}-2\right)u^2+2\right]^2$$

§ 2. Случай силы, приложенной в начальном положении трещины

Вместо (1.1) согласно [6] следует записать при $y=0$ и $|z|<\infty$

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=0,\quad |x|<\infty \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy}=-P\delta(x+Vt-\xi)\delta(z-\eta)H(t-\tau),\quad x<0,\quad u_2=0,\quad x>0$$

Для задачи (2.1) получим уравнение Винера-Хопфа в виде (1.4), где

$$\Omega^+=P[4\pi^2(V\alpha i-s)]^{-1}\exp[-s\tau-(\xi-V\tau)\alpha i-i\gamma\eta]$$

Решая это уравнение и проводя обратное преобразование по α, γ, s на плоскости $y=0$, можно получить аналогично § 1 значение σ_{yy} при $x>0$. При $x\to+0$ для коэффициента интенсивности напряжений получим

$$\sqrt{2\pi x}\,\sigma_{yy}=P\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}H(\zeta_0)\left\{\left[1+\right.\right.$$

$$\left.+V\int_{\alpha_1^+}^{\alpha_2^+}\frac{F_2(u,\gamma)}{1+uV}\,du\right]\frac{\sqrt{1+V\alpha_1^+}\,H(\zeta_1)}{(1+V\alpha_3^+)\sqrt{t_0\zeta_1}}-\left(1-\int_{\alpha_1^+}^{\alpha_3^+}\frac{F_2(u,\gamma)\,du}{\alpha_3^+-u}\right)\frac{\sqrt{\alpha_3^+-\alpha_1^+}\,H(\zeta_3)}{(1+V\alpha_3^+)\sqrt{t_0\zeta_3}}-$$

$$\left.-\int_{\alpha_2^+-\zeta_2}^{\alpha_2^+}\frac{F_2(u,\gamma)\sqrt{u-\alpha_1^+}\,du\,H(\zeta_2)}{(\alpha_3^+-u)(1+uV)\sqrt{t_0(u-\alpha_2^++\zeta_2)}}\right\}d\gamma \qquad (2.2)$$

$$\zeta_0=t-\tau-(z-\eta)\gamma-t_0\alpha_1^+,\quad t_0=V\tau-\xi$$

$$\zeta_1=1+V\alpha_1^++\frac{\zeta_0}{t_0}V,\quad \zeta_3=\alpha_3^+-\alpha_1^+-\frac{\zeta_0}{t_0},\quad \zeta_2=\alpha_2^+-\alpha_1^+-\frac{\zeta_0}{t_0}$$

Полученные формулы можно сравнить с решением плоской задачи [5]

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{2\pi x}\,\sigma_y^0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-c_R^{-1}\dot l}{\sqrt{1-a^{-1}\dot l}}\,\frac{K(\dot l)g(t)}{\sqrt{l-\xi}}\,H(L-a^{-1}) \qquad (2.3)$$

$$g(t)=1-B\sqrt{\frac{c_R^{-1}-a^{-1}}{c_R^{-1}-L}}\,H(c_R^{-1}-L)-\int_L^{b^{-1}}\frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\sqrt{\frac{u-a^{-1}}{u-L}}\,du\,H(b^{-1}-L)$$

$$B=1-\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{F_1(u)}{c_R^{-1}-u}\,du,\quad F_1(u)=\gamma(u)\exp(\varkappa(u)),\quad F_2(u)=-\gamma(u)\exp(-\varkappa)$$

$$\gamma(u)=\frac{4}{\pi}u^2\sqrt{b^{-2}-u^2}\sqrt{u^2-a^{-2}}\,[(b^{-2}-2u^2)^4+16u^4(b^{-2}-u^2)(u^2-a^{-2})]^{-1/2}$$

$$\mathrm{K}(\dot l)=1-\dot l\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{F_2(u)\,du}{1-u\dot l},\quad \varkappa(u)=\frac{1}{\pi}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\alpha-u}$$

$$\varphi(\alpha)=\mathrm{arctg}[4\alpha^2\sqrt{b^{-2}-\alpha^2}\sqrt{\alpha^2-a^{-2}}\,(b^{-2}-2\alpha^2)^{-2}]$$

$$l=l(t),\qquad \dot l=\dot l(t),\quad L=(t-\tau)/(l-\xi)$$

Из (2.2), отбрасывая формально интеграл $-\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int d\gamma$ и полагая $\gamma=0$ и делая замену в интеграле по u, $u=\eta(1-\eta V)^{-1}$, можно получить (2.3). И обратно, заменяя в (2.3) t через $t-\gamma z$, умножая интеграл на $\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$ и интегрируя по γ, получим (2.2). Полученное соответствие пространственной и плоской задач дает основание предполагать, что и для переменной скорости указанное соответствие имеет место. При этом коэффициент интенсивности напряжений пространственной задачи при переменной скорости дается (2.2), $V=\dot{l}(t)$.

Аналогично [5] можно, зная величины σ_y^0 для частного вида нагрузки ((1.9), (2.2)), найти значение σ_y при произвольной $\sigma_-(x, z, t)$

$$\sigma_y\Big|_{y\to+0} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int\int_0^t \frac{\partial\sigma_-(\xi, \eta, \tau)}{\partial\tau}\,\sigma_y^0(t, \tau, x, \xi, z, \eta)\,d\tau\,d\xi\,d\eta$$

THE SOLUTION OF PROBLEM ABOUT IMPULSES ACTING ON BOUNDARY OF SEMI-INFINITE CUT MOVING WITH CONSTANT VELOCITY

A. G. BAGDOEV, A. N. MARTIROSIAN

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՄԲ ՇԱՐԺՎՈՂ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՃԵՂՔԻ ԵԶՐԵՐԻ ՎՐԱ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում տրվում է տարածական իզոտրոպ միջավայրում հաստատուն արագությամբ շարժվող կիսահարթության տեսք ունեցող ճեղքի խնդիրը, որի եզրերի վրա կիրառված են իմպուլսներ: Լուծումը գտնվում է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, ինչպես նաև ճեղքի եզրին ուղղահայաց փոփոխականի նկատմամբ Վիներ-Հոպֆի մեթոդի կիրառմամբ: Լարումների ինտենսիվության գործակցի համար ստացված են պարզ արտահայտություններ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. *27*, №2, с. 15—23.
2. *Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной граничной задачи для магнитоупругой среды.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. *27*, №6, с. 33—43.
3. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных имульсов.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. *27*, №3, ст. 10—20.
4. *Мартиросян А. Н.* О нестационарном движении упругого пространства с целью.—ПММ, 1976, т. *40*, №3, с. 544—553.
5. *Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—МТТ, 1979, №4, с. 54—73.
6. *Freund L. B.* Crack-propagation in an elastic solid subjected to general loodig. I—II J.—Mech. Phys. solids, 1972 (I), p. 129, (II) p. 141, vol. 20.

Институт механики АН Армянской ССР
Армянский педагогический институт им. X. Абовяна

Поступила в редакцию
29.IX.1987