

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ВАРДАՅԱՆ Լ. Վ.

Вопросы колебаний двух параллельных бесконечных пластин во внешнем продольном магнитном поле и колебаний двух бесконечных параллельных пластин обсуждены в [1—2].

В настоящей работе рассматриваются магнитоупругие колебания двух параллельных упругих прямоугольных пластин в продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности.

1. Пусть две упругие прямоугольные тонкие электропроводящие пластинки, каждая постоянной толщины $2h$, ширины b и длины a , расположены параллельно друг другу. Пластинки находятся во внешнем продольном магнитном поле с постоянным вектором напряженности \vec{H}_0 .

Физико-механические свойства материалов пластин предполагаются одинаковыми и характеризуются электропроводимостью σ , плотностью ρ , модулем упругости E , коэффициентов Пуассона ν .

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что координатная плоскость (x, y) параллельна пластинкам и находится между ними на расстоянии l от средних плоскостей пластинок. Ось ox выбрана по направлению вектора напряженности заданного магнитного поля. Ось oz направлена в сторону первой пластинки.

В дальнейшем индексом (1) отмечаются все величины, относящиеся к пластинке, которая занимает область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z-l| \leq h$, а индексом (2)—величины, относящиеся к пластинке, занимающей область $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, $|z+l| \leq h$. Принимается, что пластинки находятся в среде, электромагнитные свойства которой отождествляются со свойствами вакуума.

Задача рассматривается в рамках линейной теории пластин и гипотезы магнитоупругости тонких тел [3], которая при указанных предположениях аналитически записывается следующим образом:

$$u_{xss} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad u_{yss} = -(z \mp l) \frac{\partial w_s}{\partial y}, \quad u_{zss} = w_s(x, y, t) \quad (1.1)$$

$$e_{xss} = \varphi_s(x, y, t), \quad e_{yss} = \psi_s(x, y, t), \quad h_{zss} = f_s(x, y, t) \quad (s=1, 2)$$

Здесь и в дальнейшем при $s=1$ следует брать верхний знак, а при $s=2$ —нижний.

В (1.1) u_{xs}, u_{ys}, u_{zs} —компоненты вектора перемещения произвольных точек пластин, w_s —нормальные перемещения точек средних поверхностей пластин, e_{xs}, e_{ys} —тангенциальные компоненты вектора индуцированного электрического поля, h_{zs} —нормальная компонента вектора напряженности индуцированного магнитного поля в областях, занимаемых пластинами.

В областях, занимаемых пластинами, имеем уравнения электродинамики, в которых ток смещения пренебрегается по сравнению с током проводимости. Во внешней области имеем уравнения электродинамики для вакуума.

Остальные компоненты индуцированного электромагнитного поля (e_{zs}, h_{xs}, h_{ys}) выразятся через искомые функции $w_s, \varphi_s, \psi_s, f_s$ и значений компонент индуцированного магнитного поля h_{xs} и h_{ys} на поверхностях пластин [3].

Принятые предположения позволяют для поперечных колебаний пластин получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_s}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_s}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\psi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) &= \frac{h_{xs}^+ - h_{xs}^-}{2h}, \quad \frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi_s = \frac{h_{ys}^+ - h_{ys}^-}{2h} \quad (1.2) \\ \frac{2Ek^2}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 w_s + 2\sigma h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} + \frac{2\sigma h H_0}{c} \left[\psi_s + \frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t} + \right. \\ &\left. + \frac{h^2 H_0}{3c} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial t} + \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2} \right) \right] \quad (s=1, 2) \end{aligned}$$

где $h_{xs}^+, h_{xs}^-, h_{ys}^+, h_{ys}^-$ —значения тангенциальных компонент магнитного поля на поверхностях $z = l+h, z = l-h, z = -l-h, z = -l+h$, соответственно.

В рассматриваемой задаче принимаются также дополнительные предположения относительно характера изменения возмущенного электромагнитного поля во внешних областях $z \geq l+h; z \leq -l-h$ [4].

В силу этих допущений получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \square h_{xs}^\pm &= \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_s}{\partial t} \right), \quad \square h_{ys}^\pm = \pm \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial f_s}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \right) \quad (s=1, 2) \\ \square &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1.3) \end{aligned}$$

где λ —некоторый характерный для данной задачи размер (в дальнейшем за характерный размер λ принимается длина полуволны упругих колебаний пластин).

Система уравнений (1.2)–(1.3) не замкнута. Для замыкания системы уравнений (1.2)–(1.3) необходимо иметь решения уравнений электродинамики для внешней области $-l+h \leq z \leq l-h$ с учетом ус-

ловий непрерывности соответствующих компонентов индуцированного электромагнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ и условий затухания на бесконечности.

В этой постановке решение задачи представляет значительные трудности. В дальнейшем рассмотрим случай близко расположенных пластин.

Тогда, для тангенциальных компонентов $h_x^{(3)}$, $h_y^{(3)}$ магнитного поля во внешней области между пластинами примем следующие допущения:

$$h_x^{(3)} = h_x^{(3)}(x, y, t), \quad h_y^{(3)} = h_y^{(3)}(x, y, t) \quad \text{при} \quad -l+h \leq z \leq l-h \quad (1.4)$$

Из уравнения электродинамики для внешней области между пластинами путем интегрирования по z в пределах от $-l+h$ до $l-h$ в силу (1.1) и (1.4) с учетом непрерывности тангенциальных компонентов индуцированного магнитного поля на поверхностях пластин $z=l-h$, $z=-l+h$ получим следующие уравнения:

$$\square h_{x1}^- = \square h_{x2}^+ = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] \quad (1.5)$$

$$\square h_{y1}^- = \square h_{y2}^+ = \frac{1}{2(l-h)} \left[\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right]$$

Система уравнений (1.2)–(1.3)–(1.5) является замкнутой.

2. Рассмотрим искомую задачу, в случае, когда прямоугольные пластинки шарнирно оперты по всему контуру

$$w_s = 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=b \quad (2.1)$$

$$w_s = 0, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=a \quad (s=1,2)$$

Предполагаем, что на краях пластин можно принимать приближенную модель идеального проводника. Тогда граничные условия для компонент электромагнитного поля на краях пластин [5] имеют вид

$$h_{xs}^+ = -h_{xs}^- = hH_0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}, \quad f_s = H_0 \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad h_{ys}^- = -h_{ys}^+ = hH_0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}$$

$$\psi_s = -\frac{H_0}{c} \frac{\partial w_s}{\partial t}, \quad \varphi_s = 0 \quad (s=1,2) \quad (2.2)$$

Решение систем уравнений (1.2)–(1.3)–(1.5), удовлетворяющее граничным условиям (2.1) и (2.2), представим в виде

$$Q_s = Q_0 e^{m t} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad Q_0 = \text{const}$$

$$q_s = q_0 e^{m t} \cos \lambda_m x \cos \mu_n y, \quad q_0 = \text{const}, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{a} \quad (s=1,2) \quad (2.3)$$

где под Q_s подразумевается любая из искоемых функций h_{xy}^+ , h_{xy}^- , ψ_s , ω_s , а под q_s —любая из h_{ys}^+ , h_{ys}^- , φ_s .

Подставляя (2.3) в (1.2)–(1.3)–(1.5), после некоторых преобразований получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд прегибов w_{01} и w_{02} :

$$\left\{ DK_{mn}^2 + 2\rho h \omega^2 + \frac{2zhAH_0}{c(x^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta \gamma_1}{N} + \frac{H_0 \omega (x^2-1)}{cA} \right) - \frac{M \gamma}{N} \right] \right\} w_{01} + \frac{2zhAH_0}{cN(x^2-1)} \left[M \gamma_1 - \left(1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3}\right) \beta \gamma \right] w_{02} = 0$$

$$\frac{2zhAH_0}{cN(x^2-1)} \left[M \gamma_1 - \left(1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3}\right) \beta \gamma \right] w_{01} + \left\{ DK_{mn}^2 + 2\rho h \omega^2 + \frac{2zhAH_0}{c(x^2-1)} \left[\left(1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3}\right) \left(\frac{\beta \gamma_1}{N} + \frac{H_0 \omega (x^2-1)}{cA} \right) - \frac{M \gamma}{N} \right] \right\} w_{02} = 0 \quad (2.4)$$

В (2.4)

$$K_{mn}^2 = \mu_m^2 + \mu_n^2, \quad \nu_n^2 = \mu_n^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \nu_{mn}^2 = K_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$$

$$\alpha = 4h(l-h)\nu_{mn}^2 + \frac{2(l-h)}{\lambda} + 1, \quad \beta = 4h(l-h)(4\pi\tau - \omega)\nu_{mn}^2 \frac{\omega}{c^2}$$

$$\gamma = \alpha \beta^2 + (x^2 - 1) \left[\frac{2\omega^2 \nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]$$

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(x^2-1)\omega^2 \nu_{mn}^2}{c^2}, \quad A = \frac{16\pi\tau\omega^3 h(l-h)\nu_{mn}^2 H_0}{c^2}$$

$$M = \frac{h^2 \nu_m^2 \mu_n^2 (x^2-1)}{3} + \left(1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3}\right) [(x^2-1)\nu_n^2 + \alpha \beta]$$

$$N = \left\{ \beta^2 + (x+1) \left[\frac{(x+1)\omega^2 \nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \beta^2 + (x-1) \left[\frac{(x-1)\omega^2 \nu_{mn}^2}{c^2} + \beta \left(\nu_{mn}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\}$$

Так как коэффициенты при w_{01} в первом и w_{02} во втором уравнении системы (2.4) и наоборот, одинаковы, то приравняв детерминант системы (2.4) нулю, получаем отдельные характеристические уравнения относительно общей частоты магнитоупругих колебаний двух пластин.

3. Примем, что расстояние между пластинами намного меньше длины волны то есть

$$2\sqrt{l_m^2 + \mu_n^2} (l-h) \ll 1 \quad (3.1)$$

Принимаются также следующие допущения:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_n^2, \quad 1 - \frac{h^2 \mu_n^2}{3} \approx 1, \quad |\omega| \ll 4\pi\tau$$

Тогда характеристическое уравнение системы (2.4), в силу (3.1), приводится к следующим двум отдельным уравнениям (в безразмерной форме):

$$\Omega^3 + a_1 \Omega^2 + (1 + a_2) \Omega + a_1 = 0 \quad (3.2)$$

где

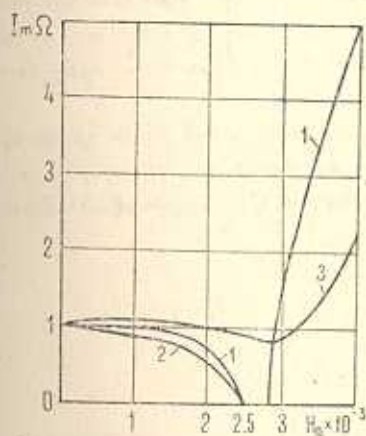
$$a_1 = \frac{c^2(K_{mn}^2 + 1/2h\lambda)}{4\pi\sigma\Omega_0}, \quad a_2 = \frac{\lambda_m^2(K_{mn}^2 + 1/2h\lambda)}{4\pi\rho\Omega_0^2 K_{mn}^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

$$\Omega^3 + (b_1 + b_2)\Omega^2 + \left(1 + \frac{b_1 b_2 \lambda_m^2}{K_{mn}^2}\right)\Omega + b_1 = 0 \quad (3.3)$$

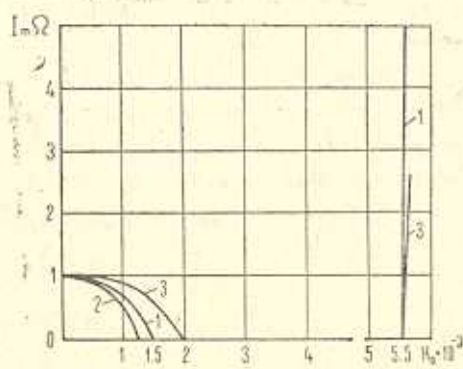
$$b_1 = \frac{8\pi\sigma h(l-h)K_{mn}^2}{\Omega_0}, \quad b_2 = \frac{\sigma H_0^2}{c^2\rho\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = \frac{Eh^2 K_{mn}^2}{3\rho(1-\nu^2)}$$

Приведем численный анализ минимальной частоты согласно характеристическим уравнениям (3.2) и (3.3) для пластин шириной $b=10$ см, изготовленных из меди. Приведенные на фиг. 1 и 2 кривые 3 построены на основе численных результатов работы [6] относительно минимальной частоты колебаний ($m=1$) медной пластинки, а кривые 1 и 2 построены на основе численных результатов, исходя из уравнений (3.2) и (3.3) в случае, когда колебания не зависят от координаты y ($\mu_n=0$). Следует отметить, что в случае двух взаимодействующих пластин одной и той же длины волны соответствуют две частоты колебаний.

На фиг. 1 кривые 1 и 2 характеризуют частоты колебаний двух близко расположенных пластин с общей толщиной 0,04 см, а кривая 3—частота колебаний одной пластинки толщиной $2h=0,04$ см.



Фиг. 1



Фиг. 2

Кривая 3 показывает, что если в случае одной пластинки частота колебаний возрастает, то кривая 1 показывает, что в силу взаимодействия между близко расположенными пластинами частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 \approx 2,5 \cdot 10^3$ э, которое сохраняется

в определенном диапазоне изменения напряженности магнитного поля. В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 скорость возрастания частоты колебаний пластин намного больше по сравнению с частотой колебаний одной пластинки. Кривая 2 показывает, что с увеличением напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин уменьшается и достигает нулевого значения при $H_0 = 2,5 \cdot 10^3$ э.

Сравнение кривых 1 и 3 на фиг. 2 показывает, что если в случае одной пластинки с толщиной $2h = 0,01$ см частота колебаний достигает нулевого значения при $H_0 = 2 \cdot 10^3$ э (кривая 3), то для двух близко расположенных пластин частота колебаний принимает нулевое значение при $H_0 = 1,5 \cdot 10^3$ э (кривая 1). В дальнейшем, при увеличении напряженности магнитного поля H_0 частота колебаний пластин возрастает более интенсивно по сравнению с частотой колебаний одной пластинки.

VIBRATION OF TWO ELECTROCONDUCTIVE PLATES IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

L. V. VARDANIAN

ԵՐԿՈՒ ԶՈՒԳԱԶԵՌ ԷԼԵԿՏՐՈԶԱՂՈՐԳԻԶ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԵՐԻ
ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱՅՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆԻԱՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Դիտարկվում են երկու զուգահեռ էլեկտրահղորդիչ առաձգական ուղղանկյուն սալերի հարմոնիկ աատանումները, երբ սալերը գտնվում են իրենց միջին մակերևույթների զուգահեռ լարվածության վեկտոր ունեցող հատատուն մազնիսական դաշտում:

Բարակ մարմինների մազնիսաառաձգականության տեսության շրջանակներում ստացված են միմյանց մոտ գտնվող և եղբերում հոդակապերով ամրացված զուգահեռ ուղղանկյուն սալերի աատանումների հաճախականությունների որոշման բնութագրիչ հավասարումները:

Բերված են թվային արդյունքներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных электропроводящих бесконечных пластин в продольном магнитном поле.—Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости», Ереван (Цахкадзор): 1984.
2. Варданян Л. В. Магнитоупругие колебания двух параллельных токонесущих пластин.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 2, с. 33—42.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272 с.

4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2, с. 22—30.
5. *Белубекян М. В.* Приведение пространственной задачи колебаний проводящей пластинки к двумерной при наличии продольного магнитного поля.—Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Харьков: 1978. 23 с.
6. *Амбарцумян С. А.* Некоторые особенности колебаний пластинок в магнитном поле.—Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 194—200.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна.

Поступила в редакцию
22.V. 1987