ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 4, 1988 Механика

УДК 539.3

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

ГНУНИ В. Ц., КАЗАРЯН Р. С.

Вопрос проектирования цилиндрических оболочек, работающих в жидкости, предполагает совместное решение уравнений теории оболочек и гидромеханики. Требование создания конструкций минимального веса при заданных ограничениях, вытекающих из условий эксплуатации и возможностей технологической реализации, приводит к необходимости решения оптимизационных задач теории гидроупругости тонких тел. Изготовление тонкостенных конструкций из новых композиционных материалов дает возможность свободного выбора параметров проектирования с целью создания конструкций минимального веса.

1. Пусть замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R, общей длины L, толщины h погружена в жидкость на достаточно большую глубину. Оболочка состоит из отсеков длины l, шарнирно опирающихся по торцам на жесткие шпангоуты. Ниже рассматривается задача проектирования отсека минимального веса из композиционного материала, обладающего заданной первой частотой собственных колебаний.

Система уравнений возмущенного состояния оболочки и жидкости, соответствующие граничные условия представляются в виде [1,2]

$$a_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(a_{66}-2a_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+a_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}Rq\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+Rq\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\rho_0\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{r=R} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

$$v=0,\quad T_{11}=0,\quad w=0,\quad M_{11}=0\qquad \text{при } x=0,\quad x=l \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w}{\partial t},\qquad \lim_{r\to\infty}\varphi=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\quad \text{при}\quad x=0,\quad x=l \tag{1.4}$$

Здесь $w(x, y, t)$ — прогиб, $\Phi(x, y, t)$ — функция усилий, $\varphi(r, x, y, t)$ — потенциальная функция возмущенного движения жидкости, r, x, y — соответственно, координаты по нормали, образующей и в окружном направлении, t — время, T_{ik} — усилия, причем

$$T_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\quad T_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\quad T_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

M_{ik} — моменты, причем

$$M_{11}=-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad M_{22}=-D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad M_{12}=-2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

ρ — плотность материала оболочки, ρ_0 — плотность жидкости, q — интенсивность жидкости, зависящая от глубины погружения оболочки,

$$a_{11}=\frac{C_{11}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2},\quad a_{22}=\frac{C_{22}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2},\quad a_{12}=\frac{C_{12}}{C_{11}C_{22}-C_{12}^2},\quad a_{66}=\frac{1}{C_{66}}$$

C_{ik}, D_{ik} — жесткости пакета оболочки из композиционного материала. Предполагается, что пакет оболочки по толщине составлен из чередующихся монослоев ортотропного композиционного материала, уложенных под углами $\pm\varphi$ к оси оболочки. Тогда

$$C_{ik}=B_{ik}h,\quad D_{ik}=B_{ik}h^3/12$$

Представлением

$$\Phi=\Phi_{mn}(t)\sin\lambda_m x\cos\mu_n y,\quad w=w_{mn}(t)\sin\lambda_m x\cos\mu_n y,\quad \varphi=\varphi_{mn}(r, t)\sin\lambda_m x\cos\mu_n y \tag{1.5}$$

тождественно удовлетворятся граничные условия (1.2), (1.4) и условие замкнутости.

Здесь $\lambda_m=m\pi/l$, $\mu_n=n/R$, m — число полуволн по образующей, n — число волн в окружном направлении.

В силу (1.5), из третьего уравнения (1.1) и условий (1.3), для определения $\varphi_{mn}(r, t)$ получается

$$\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial r}-\alpha_{mn}\varphi_{mn}=0 \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial r}\right|_{r=R}=\frac{\partial w}{\partial t},\quad \lim_{r\to\infty}\varphi_{mn}=0 \tag{1.7}$$

где $\alpha_{mn}=\lambda_m^2+\mu_n^2$.

Решением задачи (1.6), (1.7) является

$$\varphi_{mn}=-\frac{K_0(\alpha_{mn}r)}{\alpha_{mn}K_1(\alpha_{mn}R)}\frac{\partial w_{mn}}{\partial t} \tag{1.8}$$

где K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя второго рода.

Из первого уравнения (1.1), для определения $\Phi_{mn}(t)$ получается

$$\Phi_{mn}=\frac{\lambda_m^2}{R}\left[a_{11}\lambda_m^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+a_{22}\mu_n^4\right]^{-1} \tag{1.9}$$

Наконец, из второго уравнения системы (1.1), в силу (1.5), (1.8), (1.9), получается уравнение поперечных колебаний отсека оболочки относительно $w_{mn}(t)$

$$(1+M_{mn})\frac{d^2w_{mn}}{dt^2}+\Omega_{mn}^2w_{mn}=0 \tag{1.10}$$

Здесь Ω_{mn} —частота собственных колебаний оболочки, загруженной внешним всесторонним давлением интенсивности q

$$\Omega_{mn}=\omega_{mn}(1-q/q_{mn}^*)^{1/2} \tag{1.11}$$

где

$$\omega_{mn}=(K_{mn}/\rho h)^{1/2},\quad q_{mn}^*=K_{mn}/R(0{,}5\lambda_m^2+\mu_n^2) \tag{1.12}$$

соответственно, частота собственных колебаний незагруженной оболочки и собственные значения задачи устойчивости оболочки, находящейся под действием всестороннего давления,

$$K_{mn}=D_{11}\lambda_m^4+2(D_{12}+2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2+D_{22}\mu_n^4+$$

$$+\frac{\lambda_m^4}{R^2}\left[a_{11}\lambda_m^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_m^2\mu_n^2+a_{22}\mu_n^4\right]^{-1} \tag{1.13}$$

$$M_{mn}=\frac{\rho_0}{\rho h}\frac{K_0(\alpha_{mn}R)}{\alpha_{mn}K_1(\alpha_{mn}R)} \tag{1.14}$$

—присоединенная масса жидкости.

Из (1.10) для частот собственных колебаний оболочки, погруженной в жидкость, получается

$$\tilde{\Omega}_{mn}=\Omega_{mn}(1+M_{mn})^{1/2} \tag{1.15}$$

2. Представляет интерес определение толщины оболочки, обеспечивающей заданную частоту колебаний при определенной глубине погружения.

Из уравнения (1.15), в силу (1.11)—(1.14), для определения h при заданных Ω_{mn} и q получается следующее уравнение для определения $h=h(m,\ n,\ q,\ \tilde{\Omega}_{mn})$:

$$h^3-B_{mn}h-C_{mn}=0 \tag{2.1}$$

$$B_{mn}=\frac{\tilde{\Omega}_{mn}^2-\dfrac{B_{11}^0}{\rho R^2}\left[\bar{a}_{11}m^4+(\bar{a}_{66}-2\bar{a}_{12})m^2\bar{n}^2+a_{22}\bar{n}^4\right]^{-1}m^4}{\dfrac{B_{11}^0\gamma^4}{12\rho R^4}\left[\bar{D}_{11}m^4+2(\bar{D}_{12}+2\bar{D}_{66})m^2\bar{n}^2+\bar{D}_{22}\bar{n}^4\right]}$$

$$C_{mn}=\frac{\dfrac{\rho_0R}{\rho\gamma}\tilde{\Omega}_{mn}^2k_{mn}+(0{,}5m^2+\bar{n}^2)\dfrac{q\gamma^2}{\rho R}}{\dfrac{B_{11}^0\gamma^4}{12\rho R^4}\left[\bar{D}_{11}m^4+2(\bar{D}_{12}+2\bar{D}_{66})m^2\bar{n}^2+\bar{D}_{22}\bar{n}^4\right]} \tag{2.2}$$

где введены обозначения

$$\gamma=\frac{\pi R}{l}, \quad \bar{n}=\frac{l}{\pi R}n, \quad \overline{D}_{ik}=\frac{12}{B_{11}^{0}h^{3}}D_{ik}, \quad \bar{a}_{ik}=B_{11}^{0}ha_{ik}$$

$$k_{mn}=\frac{K_0(\gamma\sqrt{m^2+\bar{n}^2})}{\sqrt{m^2+\bar{n}^2}K_1(\gamma\sqrt{m^2+\bar{n}^2})}$$

Для практических целей представляет интерес нахождение толщины h, обеспечивающей при заданном q значение первой частоты $\bar{\Omega}$. Очевидно, что искомую толщину и соответствующие m_0, n_0 необходимо определить из условий

$$h_0=\max_{m,\,n} h(m,\, n,\, q, \bar{\Omega}) \tag{2.3}$$

Таблица 1

Ω \ q	1 МПа	2 МПа	5 МПа	10 МПа	20 МПа
0 Гц	$h^*=3{,}31$ $n_0=5$ $\varphi^*=90^\circ$ $h_*=3{,}59$ $n_0=5$ $\varphi_*=0^\circ$	4,38 5 90 4,78 5 0	6,25 4 65 6,80 4 0	8,29 4 65 9,10 4 0	10,78 4 65 11,90 4 0
100 Гц	3,54 5 90 3,85 5 0	4,49 4 80 4,95 4 0	6,43 4 65 7,01 4 0	8,42 4 65 9,25 4 0	10,87 4 65 12,00 4 0
200 Гц	4,34 4 65 4,66 4 0	5,22 4 65 5,66 4 0	6,95 4 65 7,61 4 0	8,77 4 65 9,66 4 0	11,11 4 65 12,29 4 0
300 Гц	5,71 4 65 6,25 4 0	6,34 4 65 6,95 4 0	7,73 4 65 8,51 4 0	9,34 4 65 10,32 4 0	11,54 4 65 13,04 3 0
400 Гц	7,15 4 55 8,64 3 0	7,60 4 55 9,00 3 0	8,72 4 55 10,32 3 0	10,17 4 50 11,94 3 0	12,29 3 45 14,37 3 0
500 Гц	9,27 3 40 11,38 3 0	9,56 3 40 11,71 3 0	10,47 3 40 12,61 3 0	11,71 3 40 13,89 3 0	13,68 3 40 15,93 3 0

В случае оболочки из композиционного материала становится возможным постановка оптимизационной задачи. При заданных q, $\bar{\Omega}$ найти такой угол φ^*, чтобы h_0 принимало наименьшее значение, то есть найти

$$h^*=\min_{\varphi} h_0=\min_{\varphi}\max_{m,n} h(m, n, q, \tilde{\Omega}, \varphi) \qquad (2.4)$$

при $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

В качестве примера рассматривается отсек оболочки, изготовленный из материала СВАМ 5 : 1. Пусть $\pi R/l=0{,}5$, $R=1{,}5$ м и окружающая оболочку среда-вода. В этом случае $\rho/\rho_0=1{,}89$.

С целью определения эффекта оптимизации вычислены также

$$h_*=\max_{\varphi} h_0=\max_{\varphi}\max_{m,n} h(m, n, q, \tilde{\Omega}, \varphi)$$

и параметр h^*/h_*, показывающий степень физического совершенства рассматриваемого варианта конструкции.

В табл. 1 для различных уровней погружения оболочки и заданных частот собственных колебаний приведены значения h^* и h_*, а также значения n_0, φ^* и φ_*, при которых они достигаются. Следует отметить, что при заданных геометрических параметрах $m_0=1$ для всех рассмотренных случаев. В табл. 2 при тех же данных приведены значения h^* и h_* без учета влияния присоединенной массы.

Результаты вычислений показывают:

а) оптимальным выбором угла укладки монослоев φ^* можно заметно (до 20%) уменьшить толщину оболочки, обеспечивающую дан-

Таблица 2

Ω \ q	1 МПа	2 МПа	5 МПа	10 МПа	20 МПа
100 Гц	$h^*=3{,}36$ $n_0=5$ $\varphi^*=90°$ $h_*=3{,}65$ $n_0=5$ $\varphi_*=0°$	4,37 5 90 4,82 5 0	6,30 4 65 6,86 4 0	8,34 4 65 9,16 4 0	10,32 4 65 11,94 4 0
200 Гц	3,50 5 90 3,82 5 0	4,31 5 70 4,97 5 0	6,46 4 65 7,97 4 0	8,46 4 65 9,31 4 0	10,92 4 65 12,17 4 0
300 Гц	3,73 5 90 4,12 5 0	4,72 4 70 5,21 5 0	6,72 4 65 7,39 4 0	8,68 4 65 9,58 4 0	11,09 4 65 12,28 4 0
400 Гц	4,12 5 65 4,54 5 0	5,19 4 65 5,72 4 0	7,10 4 65 7,85 4 0	8,98 4 65 9,95 4 0	11,33 4 65 12,57 4 0
500 Гц	4,89 5 65 5,48 4 0	5,85 4 65 6,59 4 0	7,59 4 65 8,45 4 0	9,36 4 65 10,42 4 0	11,67 4 60 13,26 3 0

ный уровень частот собственных колебаний, при заданном уровне погружения;

б) с увеличением значения $\tilde{\Omega}$ влияние присоединенной массы существенно увеличивается, а при увеличении уровня погружения это влияние менее заметно;

в) наихудшие варианты укладки монослоев достигаются при $\varphi_* = 0°$;

г) с увеличением $\tilde{\Omega}$, q оптимальные значения углов укладки монослоев уменьшаются, уменьшается также число волн n_0, при котором достигается низшая (первая) частота собственных колебаний.

Отметим, что в табл. 1,2 при заданных $\tilde{\Omega}$ в верхних строчках приведены значения h^* в см, n_0 и наилучшего угла φ^* в градусах, а в нижних—значения h_*, n_0 и наихудшего угла φ_*.

В заключение укажем, что в настоящей работе определена та минимальная толщина и соответствующая оптимальная структура отсека оболочки, которая обеспечивает данную частоту собственных колебаний при определенном значении глубины погружения. Вопросы прочности оболочки здесь не затрагивались. При больших уровнях погружения ограничения на прочность могут быть активными и следует провести перерасчет конструкции. Однако это тема отдельной статьи.

CALCULATION OF OPTIMAL CYLINDRICAL SHELLS FROM COMPOSITION MATERIAL IMMERSED IN LIQUID

V. Ts. GNUNY, R. S. KAZARIAN

ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ԸՆԿՂՄՎԱԾ ԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՕՊՏԻՄԱԼ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ, Ռ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հեղուկի մեջ ընկղմված կոմպոզիցիոն նյութից գլանային թաղանթի օպտիմալ նախագծման խնդիրը։ Հիդրոառաձգականության կոնտակտային խնդրի լուծման հիման վրա որոշված է համակողմանի արտաքին ճնշմամբ բեռնավորված թաղանթի սեփական տատանումների հաճախականությունը։ Տրված առաջին հաճախականության և ընկղման խորության համար գտնված է փոքրագույն քաշի թաղանթը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек, М.: Наука, 1974. 446 с.
2. *Белубекян Э. В., Гнуни В. Ц.* Оптимальные задачи колебаний анизотропных слоистых цилиндрических оболочек.—Механика полимеров, 1976, № 5, с. 871—874.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.XII.1987