ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫЕМКИ НА НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ГЛУБИНЕ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

РАППОПОРТ Р. М.

1. Рассматриваются решения краевых задач, которые возникают при исследовании напряженно-деформированного состояния трансверсально изотропного упругого массива с бесконечно простирающимся цилиндрическим отверстием при действии переменных по глубине объемных сил. В этом случае решение записывается в виде частного решения неоднородного уравнения и общего решения системы однородных уравнений. Частное решение—напряжения и перемещения в сплошном полупространстве при действии заданных объемных сил—обозначено через

$$u^*, \ldots, \sigma_z^*$$

Общий интеграл ищется при следующих граничных условиях: при

$$z=0 \quad \tau_{rz}=\sigma_z=0$$

$$r=a \quad \tau_{rz}^0=0, \quad \sigma_r^0=-\sigma_r^* \tag{1.1}$$

(плоскость изотропии горизонтальна, ось z вертикальна).

Предполагается, что функция σ_r^* абсолютно интегрируема в промежутке $(0, \infty)$.

Во втором параграфе поставленная задача решается разложением по собственным функциям, а в [1] показано, что решения краевых задач, полученные таким образом, не являются единственными. В данном случае оно дополняется слагаемым, полученным на основании [2]. Выбор результата зависит от дополнительных условий.

2. Решение системы однородных уравнений строится на основании [3]. При осевой симметрии имеем:

$$u_r=\frac{\partial F}{\partial r}, \quad 2GF=(1-\nu)\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}-\nu_2 D^2\Pi \tag{2.1}$$

$$w=-\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\tau}{G_1}, \quad \tau_{rz}=\frac{\partial \tau}{\partial r}, \quad \tau=-\frac{\partial}{\partial z}D^2\Pi \tag{2.2}$$

$$\sigma_z=D^2D^2\Pi, \quad \sigma_r=D^2\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}-\frac{2Gu_r}{r} \tag{2.3}$$

$$\sigma_\theta = D^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - 2G\frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{2.3}$$

Функция П удовлетворяет уравнению

$$\beta_{11}\frac{\partial^4 \Pi}{\partial z^4} + \left(2\beta_{12} + \frac{1}{G_1}\right)D^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \beta_{33}D^2D^2\Pi = 0 \tag{2.4}$$

$$\text{где } E\beta_{11} = 1-\nu^2, \quad E_1\beta_{12} = -\nu_1(1+\nu), \quad E\beta_{33} = \left(1-\frac{\nu_1^2 E}{E_1}\right)$$

$$2(1+\nu)G = E, \quad \nu_2 E_1 = \nu_1 E$$

D^2—оператор Лапласа на плоскости; E, E_1—модули упругости в плоскости изотропии и в направлении оси z; ν, ν_1—коэффициенты Пуассона; G_1—модуль сдвига в вертикальной плоскости.

Построение решения, удовлетворяющего (1.1), связано со значительными трудностями, которые ряд авторов обходят удачным выбором приближенных решений [4, 5].

В настоящей работе предварительно решается вспомогательная задача, причем получаемые результаты могут рассматриваться как шаги итерационного процесса точного решения исходной задачи.

При решении вспомогательной задачи второе условие (1.1) заменяется равенствами

$$\text{при } r = a \quad \tau_{rz} = 0, \quad u_r = u_0 \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что функция П представима в виде

$$\Pi = \sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty A_i(\gamma)\varphi_i(\gamma z)K_0(\gamma r)d\gamma \tag{2.6}$$

где $\varphi_i(\gamma z)$ — однородные решения, которые равны:

$$\varphi_1(\gamma z) = m_2 \sin m_1\gamma z - m_1 \sin m_2 \gamma z \tag{2.7}$$

$$\varphi_2(\gamma z) = \cos m_1\gamma z - \cos m_2\gamma z \tag{2.8}$$

$K_0(x)$—функции Макдональда; m_i—корни характеристического уравнения.

Функции φ_i обладают свойствами обобщенной ортогональности, то есть справедливы равенства

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2\varphi_i(\gamma z)}{\partial z^2}\frac{\partial^2\varphi_i(\gamma^* z)}{\partial z^2}dz - m_1^2 m_2^2\gamma^2(\gamma^*)^2 \times$$

$$\times \int_0^\infty \varphi_i(\gamma z)\varphi_i(\gamma^* z)dz = \frac{\pi}{2} b_i\gamma^2(\gamma^*)^2\delta(\gamma-\gamma^*) \tag{2.9}$$

где

$$b_1=m_1^2m_2^2(m_1+m_2)(m_1-m_2)^2, \quad b_2=(m_1^2-m_2^2)(m_1^3-m_2^3) \tag{2.10}$$

γ^* — фиксированное значение γ; $\delta(\gamma-\gamma^*)$ — дельта-функция. Кроме того, имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2\varphi_1(\gamma z)}{\partial z^2}\,\frac{\partial^2\varphi_2(\gamma^* z)}{\partial z^2}dz-m_1^2m_2^2\gamma^2(\gamma^*)^2\int\limits_0^\infty \varphi_1(\gamma z)\varphi_2(\gamma^* z)dz=0 \tag{2.11}$$

Равенства (2.9), (2.11) позволяют определить $A(\gamma)$ из граничных условий вспомогательной задачи. Эти условия преобразуются к виду

$$Eu_0-\nu_2(1+\nu)T_0=-\frac{\partial^3\Pi}{\partial r\partial z^2} \tag{2.12}$$

$$T_0=\int\limits_0^z \tau_{rz}(a)dz=-\frac{\partial}{\partial r}D^2\Pi \tag{2.13}$$

Из (2.4), (2.10)—(2.13) следует

$$\Pi\gamma^5K_1(\gamma a)A_i(\gamma)=2R_i(\gamma) \qquad (i=1,2) \tag{2.14}$$

$$R_i(\gamma)=\frac{2G}{1-\nu}\int\limits_0^\infty u_0\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}dz \tag{2.15}$$

Функции, определяемые (2.14), (2.15), удовлетворяют комбинированным граничным условиям. Следует проверить каждое из условий в отдельности. Если $T_0=0$, то слагаемые, зависящие от $A_i(\gamma)$, могут отличаться только постоянными множителями. Тогда имеем

$$T_0=c_1T_{01}+c_2T_{02}=0 \tag{2.16}$$

Определив постоянные c_i, подставив Π в (2.1)—(2.3), получим искомые величины. Например, при $r=a$ имеем

$$\sigma_r^0=\frac{2Gu_0}{a}+\sum_{i=1}^2 c_i\int\limits_0^\infty \gamma^2A_i(\gamma)\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2}K_0(\gamma a)d\gamma \tag{2.17}$$

Можно показать, что при известных условиях второе слагаемое в (2.17) существенно меньше первого. Если это так, то в качестве первого приближения решения исходной задачи рассматривается решение вспомогательной задачи, удовлетворяющее условиям:

$$\text{при} \qquad r=a \quad \tau_{rz}^0=0, \quad 2Gu_0^{(1)}=-a\sigma_r^0 \tag{2.18}$$

Погрешность расчета определяется разностью $\sigma_r^0-\sigma_r^{(1)}$.

В частных случаях интегралы, которыми определяется функция Π, могут быть представлены аналитически.

Если

$$u_0^{**}=\frac{2Gu_0}{1-\nu}=\exp(-\lambda z) \tag{2.19}$$

то

$$\Lambda_i(\gamma)=\frac{2}{\pi d_i K_1(\gamma a)}\, f_i(\gamma) \tag{2.20}$$

где

$$d_1=\frac{b_1}{m_1 m_2}\gamma,\quad d_2=\frac{b_2}{\lambda},\quad \mu_i=\frac{\lambda}{m_i}$$

$$f_i(\gamma)=\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^{m_i+1}}{\mu_i^2+\gamma^2}\,,\quad c_1=-m_1 m_2,\ c_2=m_1^2+m_1 m_2+m_2^2$$

Условия (2.19) могут быть использованы при решении ряда задач, возникающих на практике.

Рассмотрен пример расчета изотропного массива при условиях (2.18), (2.19) и установлено, что погрешность первого приближения решения исходной задачи, удовлетворяющего (1.1) зависит от числа λ и убывает с уменьшением λ. При $\lambda=0.1$ погрешность не превышает 2%.

3. Второе решение вспомогательной задачи строится на основании [2] с использованием (2.2)—(2.6).

Функция П принимается в виде

$$\Pi=\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \alpha[B_i(\alpha)\exp(-m_i\alpha z)]P_0(\alpha r)\,d\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty\left[C_i(\beta)K_0\left(\frac{\beta r}{m_i}\right)\right]\cos\beta z\,d\beta \quad (i=1,2) \tag{3.1}$$

$$P_0(\alpha r)=J_0(\alpha r)Y_1(\alpha a)-Y_0(\alpha r)J_1(\alpha a)$$

где $J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно, первого и второго рода.

Функции $C_i(\beta)$ определяются из граничных условий для вспомогательной задачи.

Из первого условия (1.1) устанавливается зависимость между функциями $B_i(\alpha)$. Имеем

$$m_1 B_1(\alpha)=-m_2 B_2(\alpha)=Q(\alpha) \tag{3.2}$$

Функция $Q(\alpha)$ определяется из преобразования Вебера-Орра [6]

$$Q(\alpha)[J_1^2(\alpha a)+Y_1^2(\alpha a)]=\frac{2b_1}{\pi m_1 m_2}\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty\frac{(-1)^{m_i+1}\beta^2\varphi(\beta)}{m_i^2\alpha^2+\beta^2}\,d\beta \tag{3.3}$$

где $\varphi(\beta)$ — трансформанта Фурье функции u_0^{**}.

Изотропный массив рассмотрен в [2]. Если $u_0^{**}=\exp(-\lambda z)$, то напряжения σ_r^0, σ_θ^0 на границе массива определяются равенствами

$$\sigma_r^0=\frac{(1+\nu)u_0^{**}}{a}\left[-1+\omega(\lambda)\right],\quad \sigma_\varphi^0=\frac{(1+\nu)u_0^{**}}{a}\left[1+\frac{\nu}{1-\nu}\,\omega(\lambda)\right] \qquad (3.4)$$

где $\omega(\lambda)$ мало по сравнению с единицей.

4. Сопоставление решений (2.6) и (3.1) обнаруживает расхождение асимптотических разложений искомых функций, но удовлетворительное совпадение величин нормальных напряжений на пересечении границ области ($z=0$, $r=a$). Перемещения w при этом различаются.

Осесимметричная деформация многослойного полупространства рассматривалась в [7]. Авторы ошибочно полагают, что ими получено решение, удовлетворяющее (2.5). Это справедливо лишь при абсолютно жестком и гладком включении, в последнем случае такое решение вытекает из [3].

EFFECT OF A CYLINDRICAL HOLE ON STRESSES AND DISPLACEMENTS IN A TRANSVERSELY-ISOTROPIC HALF-SPACE SUBGECTED TO VOLUME FORCES VARYING ALONG DEPTH

R. M. RAPPOPORT

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎՐԱ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՓՈՐՎԱԾՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ ԸՍՏ ԽՈՐՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԾԱՎԱԼԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ռ. Մ. ՌԱՊՈՊՈՐՏ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Խնդրի լուծումը բերվում է ընդունված հաշվարկային մոդելի՝ անվերջ գլանային անցքով կիսատարածության դիտարկմանը՝ անցքի եզրագծով բաշխված նորմալ բեռի ազդեցության դեպքում։ Սկզբում դիտարկվում է օժանդակ խնդիր (անցքի եզրագծի վրա $\tau_{rz}=0$, $u_r=u_0$), որի լուծումը օգտագործվում է ինտեգրալները կառուցելու համար։

Օժանդակ խնդրի լուծումը միարժեք չէ և ստացվում է երկու եղանակով. 1) սեփական թվերի անընդհատ սպեկտր ունեցող համասեռ լուծումների օգնությամբ, 2) Հարությունյան—Աբրահամյանի մեթոդով։

Լուծումների համեմատությունը ի հայտ է բերում փնտրվող ֆունկցիաների ասիմպտոտիկական վերլուծությունների տարբերություն, իսկ տիրույթի սահմանագծում՝ արդյունքների բավարար համընկնում, որով արդարացվում է հաշվարկային մոդելի ընտրությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раппопорт Р. М.* Однородные решения теории деформации многослойного полупространства и некоторые их приложения. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1984, т. 37, № 1, с. 23—33.

2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Некоторые осесимметричные контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1969, т. *22*, №2, с. 3—13.
3. *Рappопорт Р. М.* О построении общих решений уравнений теории упругости трансверсально изотропных неоднородных тел.—ПММ, 1976, т. *40*, вып. 5, с. 956—958.
4. *Васильев В. З.* Концентрация напряжений около торца полубесконечного кругового цилиндра при осесимметричном нагружении.—Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 12, с. 29—31.
5. *Филин А. П., Каплун А. Ф.* Осесимметричное загружение полупространства с вертикальным цилиндрическим каналом, окаймленным обделкой конечной жесткости.—Сб.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, с. 256—265.
6. *Титчмарш Е.* Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: Изд-во иностр. лит. т. 1. 1960. 265 с.
7. *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Осесимметричная деформация упругого многослойного основания со сквозным цилиндрическим отверстием.—Сб.: Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1979, с. 142—149.

Ленинградская лесотехническая академия
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
10.II.1986