ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 539.377

ДВУХСЛОЙНОЕ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО, НАГРЕВАЕМОЕ ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

ИВАНИК Е. Г.

В практике применения кристаллов в различных технических и научных целях часто необходимо знание температурных напряжений в кристаллических телах. Это существенно, например, при выборе режима работы и отжиге кристаллов, при оценке термостойкости кристаллических тел и т. п. В связи с этим актуальной является проблема определения температурных напряжений в ортотропных кусочно-однородных телах, обусловленных нестационарными температурными полями.

Рассмотрим двухслойное ортотропное полупространство, состоящее из покрытия, занимающего область $0 \leqslant z < z_1$ и сопряженной с ним области $z_1 \leqslant z < \infty$. Пусть температура поверхности $z=0$ данного кусочно-однородного тела изменяется по закону

$$t|_{z=0} = t_0 \cos \omega_x x \exp(i\omega_\tau \tau) \tag{1}$$

где $t_0=\text{const}$, $\omega_x=\text{const}$, $\omega_\tau=\text{const}$.

Физико-механические характеристики такой системы представляются в виде

$$p_{ij}(z) = p_{ij}^{(1)} + (p_{ij}^{(2)} - p_{ij}^{(1)}) S_-(z-z_1) \tag{2}$$

где индексами 1, 2, соответственно, обозначены физико-механические характеристики покрытия и сопряженной с ним области,
$S_-(z-z_1) = \begin{cases} 1, & z \geqslant z_1, \\ 0, & z < z_1, \end{cases}$ — асимметричная единичная функция [1].

Уравнения термоупругости в данном случае запишутся таким образом [2]:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + [k_x^{(1)} + (k_x^{(2)} - k_x^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \left[\frac{1}{a_z^{(1)}} + \left(\frac{1}{a_z^{(2)}} - \frac{1}{a_z^{(1)}} \right) S_-(z-z_1) \right] t +$$

$$+ (1 - K_\lambda^{(z)}) \frac{\partial t}{\partial z}\bigg|_{z=z_1} \delta_-(z-z_1) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left\{ [\varepsilon_{11}^{(1)} + (\varepsilon_{11}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [\varepsilon_{13}^{(1)} + (\varepsilon_{13}^{(2)} - \varepsilon_{13}^{(1)}) S_-(z-z_1)] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} =$$

$$=\left[\frac{1}{c_{2a}^{(1)2}}+\left(\frac{1}{c_{2a}^{(2)2}}-\frac{1}{c_{2a}^{(1)2}}\right)S_-(z-z_1)\right]\ddot{u}+[\beta_{11}^{*(1)}+(\beta_{11}^{*(2)}-\beta_{11}^{*(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial t}{\partial x}+$$

$$+\left(1-\frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\left\{[\varepsilon_{55}^{(1)}+(\varepsilon_{55}^{(2)}-\varepsilon_{55}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+[\varepsilon_{13}^{*(1)}+(\varepsilon_{13}^{*(2)}-\varepsilon_{13}^{*(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right\}=$$

$$=\left[\frac{1}{c_{1a}^{(1)2}}+\left(\frac{1}{c_{1a}^{(2)2}}-\frac{1}{c_{1a}^{(1)2}}\right)S_-(z-z_1)\right]\ddot{w}+[\beta_{33}^{*(1)}+(\beta_{33}^{*(2)}-\beta_{33}^{*(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial t}{\partial z}+$$

$$+\left[\frac{\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}t+\frac{c_{13}^{(1)}-c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{\partial w}{\partial z}\right]\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1) \qquad (4)$$

В уравнениях (3), (4) введены обозначения

$$K_\lambda^{(z)}=\frac{\lambda_z^{t(2)}}{\lambda_z^{t(1)}},\quad k_x^{(j)}=\frac{\lambda_x^{t(j)}}{\lambda_z^{t(j)}},\quad \varepsilon_{11}^{(j)}=\frac{c_{11}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \varepsilon_{13}^{(j)}=\frac{c_{13}^{(j)}+c_{55}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \varepsilon_{13}^{*(j)}=\frac{c_{13}^{(j)}+c_{55}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}}$$

$$\varepsilon_{55}^{(j)}=\frac{c_{55}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}},\quad \beta_{11}^{*(j)}=\frac{\beta_{11}^{(j)}}{c_{55}^{(j)}},\quad \beta_{33}^{*(j)}=\frac{\beta_{33}^{(j)}}{c_{33}^{(j)}}\quad c_{1a}^{(j)2}=\frac{c_{33}^{(j)}}{\rho^{(j)}},\quad c_{2a}^{(j)2}=\frac{c_{55}^{(j)}}{\rho^{(j)}}\Big|_{j=1,2}$$

$\lambda_x^{t(j)}$, $\lambda_z^{t(j)}$, $a_z^{(j)}$ – коэффициенты тепло- и температуропроводности, $\rho^{(j)}$ – плотность, $\delta_-(\xi)=S_-'(\xi)$.

Динамические температурные напряжения определим по формулам [2], которые в данном случае примут вид

$$\sigma_{xx}=[c_{11}^{(1)}+(c_{11}^{(2)}-c_{11}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial u}{\partial x}+[(c_{13}^{(2)}-c_{13}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial w}{\partial z}-$$

$$-[\beta_{11}^{(1)}+(\beta_{11}^{(2)}-\beta_{11}^{(1)})S_-(z-z_1)]t$$

$$\sigma_{zz}=[c_{13}^{(1)}+(c_{13}^{(2)}-c_{13}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial u}{\partial x}+[c_{33}^{(1)}+(c_{33}^{(2)}-c_{33}^{(1)})S_-(z-z_1)]\frac{\partial w}{\partial z}-$$

$$-[\beta_{33}^{(1)}+(\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)})S_-(z-z_1)]t \qquad (5)$$

$$\sigma_{xz}=[c_{55}^{(1)}+(c_{55}^{(2)}-c_{55}^{(1)})S_-(z-z_1)]\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Решение уравнений (3), (4) ищем в виде

$$t(x,z,\tau)=\vartheta(z)\cos\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau) \qquad (6)$$

$$u(x,z,\tau)=u_\omega(z)\sin\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau),\quad w(x,z,\tau)=w_\omega(z)\cos\omega_x x\exp(i\omega_\tau\tau) \qquad (7)$$

Подставляя (6) в (3), а (7) в (4), получим

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2}-[k_1^2+(k_2^2-k_1^2)S_-(z-z_1)]\vartheta=(1-K_\lambda^{(z)})\frac{d\vartheta}{dz}\Big|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1) \qquad (8)$$

$$\Box_1^u(z)u_\omega+\Box_1^w(z)w_\omega=\theta_1,\quad \Box_2^u(z)u_\omega+\Box_2^w(z)w_\omega=\theta_2 \qquad (9)$$

где $k_j^2=\omega_x^2 k_x^{(j)}+\dfrac{i\omega_z}{a_z^{(j)}}$, $\quad\square_1^u(z)=\dfrac{d^2}{dz^2}+\gamma_{11}^u+(\gamma_{12}^u-\gamma_{11}^u)S_-(z-z_1)$

$$\square_1^w(z)=[\gamma_{11}^w+(\gamma_{12}^w-\gamma_{11}^w)S_-(z-z_1)]\frac{d}{dz},\quad \square_2^u(z)=[\gamma_{21}^u+(\gamma_{22}^u-\gamma_{21}^u)S_-(z-z_1)]\frac{d}{dz}$$

$$\square_2^w(z)=\frac{d^2}{dz^2}+\gamma_{21}^w+(\gamma_{22}^w-\gamma_{21}^w)S_-(z-z_1),\quad \gamma_{1n}^u=\frac{w_z^2}{c_{55}^{(n)2}}-w_x^2\varepsilon_{11}^{(n)},\quad \gamma_{1n}^w=-\omega_x\varepsilon_{13}^{(n)}$$

$$\gamma_{2n}^u=\omega_x\varepsilon_{13}^{*(n)},\quad \gamma_{1n}^w=\frac{\omega_z^2}{c_{1n}^{(n)2}}-\omega_x^2\varepsilon_{55}^{(n)}\quad [n=1,2],$$

$$\theta_1=\left(1-\frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right)\left(\frac{du_w}{dz}-\omega_x w_w\right)\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)-\omega_x[\beta_{11}^{*(1)}+(\beta_{11}^{*(2)}-\beta_{11}^{*(1)})S_-(z-z_1)]\vartheta(z)$$

$$\theta_2=\left[\frac{\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}\vartheta+\omega_x\frac{c_{13}^{(1)}-c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}u_w+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{du_w}{dz}\right]\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)+$$

$$+[\beta_{33}^{*(1)}+(\beta_{33}^{*(2)}-\beta_{33}^{*(1)})S_-(z-z_1)]\vartheta'(z)$$

Решение уравнения (8) имеет вид [3, 4]

$$\vartheta(z)=t_c\left[\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)}S_+(z_1-z)+\vartheta_2(z)S_-(z-z_1)\right]\tag{10}$$

где $\Delta_1(z)=k_1\operatorname{ch}k_1(z-z_1)-K_z^{(2)}k_2\operatorname{sh}k_2(z-z_1)$, $\vartheta_2(z)=\dfrac{k_1}{\Delta_1(0)}\exp[-k_2(z-z_1)]$

Умножая (9) на $S_-(z-z_1)$ и производя замены

$$u_w S_-(z-z_1)=u_1,\quad w_w S_-(z-z_1)=w_1\tag{11}$$

перепишем (9) в виде

$$\square_{12}^u u_1+\square_{12}^w w_1=\theta_1^*,\quad \square_{22}^u u_1+\square_{22}^w w_1=\theta_2^*\tag{12}$$

где $\theta_1^*=-D_1^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)+u_w|_{z=z_1}\delta'_-(z-z_1)+$

$$+\left(\frac{du_w}{dz}+\gamma_{12}^w w_w\right)\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$\theta_2^*=-D_2^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)+w_w|_{z=z_1}\delta'_-(z-z_1)+$$

$$+\left(\frac{dw_w}{dz}+\gamma_{22}^u u_w\right)\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$D_1^{(j)}=\frac{\beta_{11}^{*(j)}k_1\omega_x t_c}{\Delta_1(0)},\quad D_2^{(j)}=\frac{\beta_{33}^{*(j)}k_1k_2t_c}{\Delta_1(0)},\quad \square_{1n}^u=\frac{d^2}{dz^2}+\gamma_{1n}^u,\quad \square_{1n}^w=\gamma_{1n}^w\frac{d}{dz}$$

$$\square_{2n}^u=\gamma_{2n}^u\frac{d}{dz},\quad \square_{2n}^w=\frac{d^2}{dz^2}+\gamma_{2n}^w\,[n=1,2]\ .$$

Решение двух взаимосвязанных уравнений (12) представим в виде [5]

$$u_1=\square_{22}^w\varphi_1-\square_{12}^w\psi_1,\quad w_1=\square_{11}^w\psi_1-\square_{12}^u\varphi_1\tag{13}$$

где φ_1, ψ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\square^{(j)}\varphi_1=\theta_1^*,\quad \square^{(j)}\psi_1=\theta_2^* \tag{14}$$

Здесь $\square^{(j)}=\square_{1j}^u\square_{2j}^w-\square_{1j}^w\square_{2j}^u$ $(j=1,2)$.

Решение уравнений (14) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\sigma^4+a_0^{(n)}\sigma^2+b_0^{(n)}=0 \tag{15}$$

где $a_0^{(n)}=\gamma_{1n}^u+\gamma_{2n}^w-\gamma_{1n}^w\gamma_{2n}^u$, $b_0^{(n)}=\gamma_{1n}^u\gamma_{2n}^w$ $(n=1,2)$ имеет вид:

1) корни уравнения (15) вещественные и неравные

$$\varphi_1=C_1^*\exp(\sigma_1^{(j)}z)+C_2^*\exp(-\sigma_1^{(j)}z)+C_3^*\exp(\sigma_2^{(j)}z)+C_4^*\exp(-\sigma_2^{(j)}z)+\varphi_1^*$$

$$\psi_1=C_1^*\exp(\sigma_1^{(j)}z)+C_2^*\exp(-\sigma_1^{(j)}z)+C_3^*\exp(\sigma_2^{(j)}z)+C_4^*\exp(-\sigma_2^{(j)}z)+\psi_1^* \tag{16}$$

2) корни вещественные и попарно равные

$$\varphi_1=(C_1^*+zC_2^*)\exp(\sigma_2^{(j)}z)+(C_3^*+zC_4^*)\exp(-\sigma_2^{(j)}z)+\varphi_1^*$$

$$\psi_1=(C_1^*+zC_2^*)\exp(\sigma_2^{(j)}z)+(C_3^*+zC_4^*)\exp(-\sigma_2^{(j)}z)+\psi_1^* \tag{17}$$

3) корни комплексные. В этом случае следует положить $\sigma_1^{(j)}=\mu^{(j)}+r^{(j)}i$, $\sigma_2^{(j)}=\mu^{(j)}-r^{(j)}i$, $\mu^{(j)}$, $r^{(j)}>0$.

В (16), (17) φ_1^*, ψ_1^* — частные решения неоднородных уравнений (14). Используя для их нахождения метод вариации произвольных постоянных и учитывая, что согласно (11) $(u_1, w_1)|_{z<z_1}=0$ получим u_1, w_1. Подставляя их в систему (9), с учетом (11), получим следующую систему уравнений для определения u_*, w_*:

$$\square_{11}^u u_*+\square_{11}^w w_*=\theta_1^{**},\quad \square_{21}^u u_*+\square_{21}^w w_*=\theta_2^{**} \tag{18}$$

где $$\theta_1^{**}=-\omega_r\beta_{11}^{*(1)}t_r\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(0)}S_+(z_1-z)-D_1^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)-$$

$$-(\gamma_{12}^u-\gamma_{11}^u)u_1-(\gamma_{12}^w-\gamma_{11}^w)\frac{dw_1}{dz}+(\gamma_{12}^w-\gamma_{11}^w)w_*|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)+$$

$$+\left(1-\frac{c_{55}^{(2)}}{c_{55}^{(1)}}\right)\left(\frac{du_*}{dz}-\omega_r w_*\right)\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

$$\theta_2^{**}=\beta_{33}^{*(1)}t_r\frac{\Delta_1'(z)}{\Delta_1(0)}S_+(z_1-z)-D_2^{(2)}\exp(-k_2(z-z_1))S_-(z-z_1)-(\gamma_{22}^u-\gamma_{21}^u)\frac{du_1}{dz}$$

$$-(\gamma_{22}^w-\gamma_{21}^w)w_1+(\gamma_{22}^u-\gamma_{21}^u)u_*|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)+\left[\frac{\beta_{33}^{(2)}-\beta_{33}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}}\theta+\right.$$

$$\left.+\omega_r\frac{c_{13}^{(1)}-c_{13}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}u_*+\left(1-\frac{c_{33}^{(2)}}{c_{33}^{(1)}}\right)\frac{du_*}{dz}\right]\Bigg|_{z=z_1}\delta_-(z-z_1)$$

Решение системы (18) имеет вид:

$$u_*(z)=u_*^+(z)S_+(z_1-z)+u_*^-(z)S_-(z-z_1) \tag{19}$$

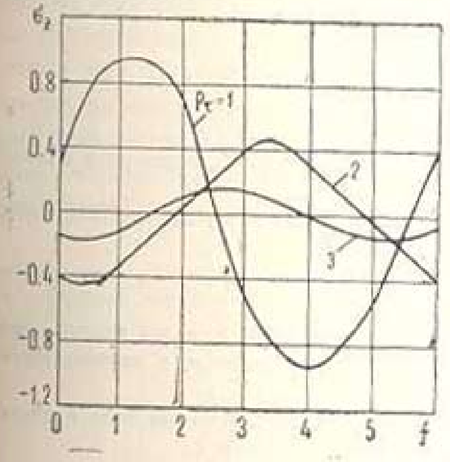
$$w_*(z)=w_*^+(z)S_+(z_1-z)+w_*^-(z)S_-(z-z_1) \tag{20}$$

Подставив (19), (20), в (7) и с учетом (5) получим выражения компонент тензора температурных напряжений. Неизвестные постоянные интегрирования определяются из граничных условий

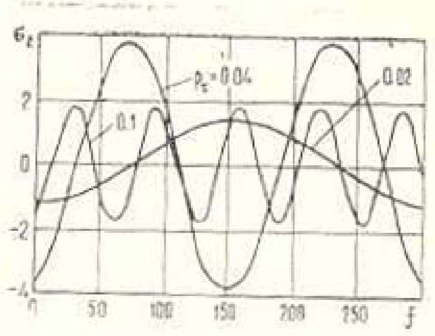
$$\sigma_{xz}=\sigma_{zz}=0 \quad \text{при} \quad z=0, \quad z\to\infty \tag{21}$$

Многие материалы обладают существенной анизотропией температурных коэффициентов линейного расширения. Предположим, что рассматриваемое составное полупространство состоит из двух состыкованных тел, обладающих ортотропией только в отношении температурных коэффициентов линейного расширения: $\alpha_x^{t(1)}=\alpha_y^{t(1)}=\alpha_{t(1)}$, $\alpha_z^{t(1)}=\alpha_{t(2)}$, $\alpha_z^{t(2)}=\alpha_{t(1)}$, $\alpha_x^{t(2)}=\alpha_y^{t(2)}=\alpha_{t(2)}$. Остальные физико-механические характеристики предполагаются изотропными. Исследуем распределение динамических температурных напряжений в предположении, что температура поверхности $z=0$ изменяется по закону

$$t|_{z=0}=t_0\cos\omega_x x\cos\omega_\tau\tau$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1, 2 представлены графики изменения динамических температурных напряжений на стыке ($z-z_1$) покрытия и полупространства в зависимости от безразмерного времени $\bar{t}=\frac{c_1^2\tau}{a_1}$, различных значениях частотных параметров $p_x=\frac{\omega_x a}{c_1}$, $p_\tau=\frac{\omega_\tau a}{c_1^2}$ и параметра K_α^{xz}, характеризующего отношение температурных коэффициентов линейного расширения в направлении осей Ox и Oz. При этом принято $K_\alpha^{xz}=0.1$, $p_x=10$ (фиг. 1), $p_x=0.2$ (фиг. 2). Численные исследования, проведенные на ЭВМ ЕС—1060, показали, что при $p_x>1$, $p_\tau>1$ амплитуда напряжений с увеличением p_τ уменьшается, тогда как при $p_x<1$, в диапазоне $0.04\leq p_\tau\leq 0.4$ существует максимум амплитуды напряжений σ_z.

TWO-LAYER ORTHOTROPIC HALF-SPACE HEATED BY THE OUTER MEDIUM

E. G. IVANIK

ԵՐԿՇԵՐՏ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ՝ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ՏԱՔԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ե. Գ. ԻՎԱՆԻԿ

Ամփոփում

Երկշերտ օրթոտրոպ կիսատարածության ջերմաստիճանային լարումներ որոշելու համար առաջարկվում է ընդհանրացված ֆունկցիաների ապարատ կիրառության վրա հիմնված եղանակ։ Կիսատարածությունը ենթարկվում ըստ կոորդինատի պարբերական և ըստ ժամանակի հարմոնիկ ջերմային ազ դեցության։ Խնդիրը բերվում է իմպուլսային տիպի գործակիցներով հավա սարումների համակարգի լուծման կառուցմանը՝ տեղափոխությունների վեկ տորի բաղադրիչները որոշելու համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инжен ров.—М.: Наука, 1975. 831 с.
2. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднород ной структуры.—М.: Наука, 1984. 368 с.
3. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенн систем.—М.: Машиностроение, 1973. 659 с.
4. *Иваник Е. Г.* Одномерная динамическая задача термоупругости для кусочно-одн родного полупространства.—В кн.: Математические методы в термомехани Киев: Наук. думка, 1978, с. 137—144.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напр жения в тонких пластинках.—Киев: Наук. думка, 1972. 308 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редакц
14.VI.19