

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УЗКИХ ПУЧКОВ В  
ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

МАНУКЯН С. М.

Уравнения двумерных коротких волн, которые описывают области резкого изменения параметров вблизи волны, получены в работе [1]. Учет вязкости и теплопроводности для произвольной трехмерной волны в неоднородной жидкости сделан в [2]. Для произвольной среды уравнения коротких волн получены в [3], там же конкретизированы коэффициенты для магнитной газодинамики. Другим путем уравнения коротких волн в магнитной газодинамике получены в [4]. В [5, 6] получены уравнения коротких волн для произвольной среды при наличии малой диссипации и дано уточнение коэффициентов для микрополярной среды. В работах [7, 8] развита теория нелинейных модуляционных волн, а в [9] из уравнений коротких волн для смеси жидкости и газа получены уравнения модуляции и даны их решения. В [10] выведены уравнения модуляции для электропроводящей жидкости в магнитном поле с пузырьками газа и решена задача пучков.

В настоящей работе приводится численное решение задачи об узких гауссовых пучках в магнитной газодинамике с пузырьками газа. При этом взята простая модель, как и в [11, 12], а учет взаимовлияния пузырьков и тепловых эффектов можно сделать, как в работе [13]. Метод решения задачи, все выкладки, а также количественные результаты не меняются. Изменяются лишь значения коэффициентов в уравнениях (1.1) — (1.4), что в принципе не влияет на расчеты.

На основании уравнений коротких волн выведены уравнения модуляции, которые дают изменения амплитуд и фаз квазимонохроматической волны. Решения полученных уравнений, в отличие от [10], имеют экспоненциальный множитель, дающий линейное затухание и содержащий в экспоненте не время, а осевую координату. Тем самым, становится более понятным рассмотрение стационарных пучков.

§ 1. Уравнения коротких волн для задачи магнитной  
газодинамики с пузырьками

Уравнения магнитной гидродинамики для газожидкостной смеси в отсутствии внешних сил имеют вид [10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \rho + \rho \nabla \vec{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \vec{v} - \nu_e (\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = -\nabla \left(p + \frac{\nu_e H^2}{2}\right) + (\nu_0 + \nu) \nabla \nabla \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \nabla\right) \vec{H} - (\vec{H} \nabla) \vec{v} + \vec{H} (\nabla \vec{v}) = \nu_H \nabla^2 \vec{H}$$

здесь  $\rho$  — массовая плотность,  $P$  — давление,  $\vec{v}$  — вектор скорости точки,  $\nabla$  — пространственный градиент,  $\nu$  — динамическая ньютоновская вязкость,  $\vec{H}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\nu_H = 1/(\sigma \mu_e)$ ,  $\nu_0$  — объемная вязкость,  $\nu_e$  — магнитная постоянная,  $\sigma$  — электропроводность среды,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Рассматривается гомогенная односкоростная смесь, для которой имеются соотношения [11]

$$\rho = \rho_f(1 - \beta) + \rho_g \beta, \quad \frac{\rho_g \beta}{\rho_f(1 - \beta)} = \text{const}, \quad P_g R^3 = \text{const}$$

где  $\rho_g$  — плотность газа,  $\rho_f$  — плотность жидкости,  $\beta$  — концентрация газа,  $R$  — радиус пузырька,  $p_g$  — давление в газе. Между давлением в пузырьке и в смеси имеется связь [11]

$$p_g - p = \rho_f R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \rho_f \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt}$$

Принято, что жидкость несжимаема,  $\rho_f = \text{const}$  и  $\rho_g$  мало, поэтому  $\rho \approx \rho_f(1 - \beta)$ .

Для получения упрощенного уравнения вблизи волны (уравнения коротких волн) применяется метод, описанный в [10], который состоит в переходе к лучевым координатам и в удерживании членов основного порядка.

В результате получаются следующие уравнения коротких волн [5, 6, 10]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(u) - \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi}{dt} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + E \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right] \quad (1.1)$$

$$L = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2 \partial x_3} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right]$$

где  $dx = H_1 d\tau$ ,  $\tau$  — сопровождающая координата,  $H_1 = c_n + v_n$  — нормальная скорость волны линейной задачи,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — компоненты волнового вектора в системе координат  $x, y, z$ , причем ось  $x$  направлена по нормали к волне, а  $y$  и  $z$  — по касательной к ней, начальное магнитное

поле  $\vec{H}$  направлено по оси  $x$ ,  $\Phi$  — амплитуда лучевого решения,  $u = v_x$ ,  $\Gamma = 1/\beta$ . Коэффициенты уравнения (1.1) получены в [10] и имеют вид

$$D = \frac{D'}{H_1}, \quad E = \frac{E'}{H_1^2}, \quad D' = -M \left\{ \left[ \frac{4\mu}{3\rho_g} ca^2 + (\nu_0 + 2\mu) \frac{c}{\rho} \right] \left( c^2 - \frac{\nu_c}{\rho} H_x^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\nu_c(c^2 - a^2)}{c^2 c} H_x^2 + \nu_H c(c^2 - a^2) \right\} \quad (1.2)$$

$$E' = M \frac{\rho_f R^2 c^2 a^2}{3\rho_g} \left( c^2 - \frac{\nu_c}{\rho} H_x^2 \right) \quad (1.3)$$

$$M = \frac{1}{2c[2c^2 - (a_+^2 + a_1^2)]} \quad (1.4)$$

$$c^4 - c^2(a_+^2 + a_1^2) + a_+^2 \frac{\nu_c}{\rho_0} (H_n)_0 = 0 \quad (1.5)$$

здесь  $a_+$  — скорость звука в жидкости с пузырьками,

$a_1^2 = \frac{\nu_c}{\rho_0} (H_{x0}^2 + H_{y0}^2)$ ,  $H_x = H_{x0} + H_x'$ , причем  $H_{x0}$ ,  $H_{y0}$ ,  $(H_n)_0$ ,  $\rho_0$ ,  $a_{*0}$  — значения функций в невозмущенной среде,  $c = c_n$ . При  $H_n = H_x$ ,  $H_{y0} = 0$ , то есть на оси пучка  $c = a_*$  (или  $a_1$ ),  $D' < 0$ .

В случае подвижной системы координат, связанной с волной,  $\alpha_2 \approx 0$ ,  $\alpha_3 \approx 0$ . Тогда скорость волны будет [5]  $H_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$

Учитывая малость  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  вблизи оси  $x$ , при  $H_{10} \approx 0$ , из (1.5) можно получить

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} = \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_3^2} = - \frac{c^2}{2c^2 - a_{*0}^2 - a_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = 0$$

В дальнейшем будем изучать пучки, как в плоской задаче, так и в задаче с осевой симметрией. Тогда, обозначая через  $y$  координату по нормали к оси  $x$ , можно получить

$$L = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} \frac{\tilde{k}}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

причем  $\tilde{k} = 0$ ,  $\bar{k} = 1$ , соответственно, для первой и второй задачи.

При распространении узких пучков в электропроводящей жидкости с пузырьками газа имеются быстрые и медленные волны, и, вообще говоря, их интенсивности следует находить из граничных данных на источнике. Для волны, близкой к плоской, представляющей огибающую быстрых или медленных магнито-газодинамических волн,

можно находить вышеуказанную интенсивность волн, решая задачу о поршне (без дисперсии, диссипации и нелинейности) в поперечном магнитном поле, как это сделано в [14]. Несмотря на то, что в настоящей задаче берется гауссовское распределение по  $y$ , что меняет характер движения и вместо ударных волн будут пучки, однако перераспределение энергии по волнам может быть взято из решений для плоской волны.

## §. 2. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд и фаз квазимонохроматических волн

Для простоты рассмотрим однородную среду и плоскую волну, для которых лучевое решение  $\Phi = \text{const}$ . Ищем решение уравнения (1.1) в виде волн

$$u = U_0 + \frac{1}{2} [U_1 \exp(i\theta - \nu x^2 \tau_1) + U_1 \exp(-i\theta - \nu x^2 \tau_1) + U_2 \exp(2i\theta - 2\nu x^2 \tau_1) + \bar{U}_2 \exp(-2i\theta - 2\nu x^2 \tau_1)] \quad (2.1)$$

где  $\tau = \tau_1 - t$ ,  $\theta = \omega \tau - \omega t$ ,  $\omega = \omega_0$  — невозмущенная частота,  $\nu$  — коэффициент затухания.  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  — медленно меняющиеся амплитуды,  $\bar{U}_1$ ,  $\bar{U}_2$  — комплексно сопряженные функции.

Подставляя значение  $u$  из (2.1) в уравнение (1.1), учитывая, что в дифракционной задаче  $U_0$  можно пренебречь и приравняв слагаемые при  $e^{i\theta}$  и  $e^{2i\theta}$ , получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial U_1}{\partial \tau} (i\omega + \nu x^2) + (ix - \nu x^2) \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{1}{2} L(U_1) = \\ & = -\frac{1}{H_1} \left[ \frac{\Gamma}{2} (ix - 3\nu x^2)^2 \bar{U}_1 U_2 \exp(-2\nu x^2 \tau_1) + 3D \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (ix - \nu x^2)^2 + 4E \frac{\partial U_1}{\partial \tau} (ix - \nu x^2)^3 \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & U_2 (4ix\omega - 4ix^3 \nu) + \frac{\partial U_2}{\partial t} (2ix - 2\nu x^2) - \frac{1}{2} L(U_2) - 2 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} (i\omega + \nu x^2) = \\ & = -\frac{1}{H_1} \left[ (ix - \nu x^2) (2ix - 2\nu x^2) \frac{U_1^2 \Gamma}{2} + DU_2 (2ix - 2\nu x^2)^3 + EU_2 (2ix - 2\nu x^2)^4 + \right. \\ & \left. + 3D (2ix - 2\nu x^2)^2 \frac{\partial U_2}{\partial \tau} + 4E \frac{\partial U_2}{\partial \tau} (2ix - 2\nu x^2) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приравняв в (2.2) члены, содержащие  $U_1$ , получим линейное дисперсионное соотношение и коэффициент затухания

$$\omega = -\frac{1}{H_1} E x^3 \quad (2.4)$$

$$\nu = -\frac{1}{H_1} D \quad (2.5)$$

Рассмотрим стационарную задачу для амплитуд

$$U_1 = U_1(\tau_1, y) \quad U_2 = U_2(\tau_1, y)$$

Поскольку  $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial t}$ , где  $x_k$  — исходная система

координат, то  $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_{x_k} = 0$ , причем  $\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1}$ . Подставляя (2.4),

(2.5) в (2.2), (2.3) и проделав вышеприведенную замену переменных, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1} \left( -3 \frac{i}{H_1} E x^3 + i x - \frac{1}{H_1} D x^2 \right) - \frac{1}{2} L(U_1) = \frac{x^2 + 6i v x^3}{H_1} \times \\ \times \frac{\Gamma}{2} \bar{U}_1 U_2 \exp(-2v x^2 \tau_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} U_2 \left( \frac{12}{H_1} E x^4 - \frac{4}{H_1} D i x^3 \right) + \frac{\partial U_2}{\partial \tau_1} \left( 2i x - 30i \frac{E x^3}{H_1} - 8D \frac{x^2}{H_1} \right) - \\ - \frac{1}{2} L(U_2) = \frac{\Gamma}{H_1} x^2 U_1^2 + 2i v x^3 \Gamma H_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим

$$U_1 = a e^{i\varphi}, \quad U_2 = A e^{i\psi}, \quad \bar{U}_1 = a e^{-i\varphi}, \quad \bar{U}_2 = A e^{-i\psi} \quad (2.8)$$

где  $a, A$  — амплитуды,  $\varphi, \psi$  — фазы, соответственно, первой и второй гармоники.

Подставляя (2.8) в (2.6), (2.7), получим уравнения для действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} - \left( x - \frac{3}{H_1} E x^3 \right) a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} - \frac{1}{H_1} D x^2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} = \frac{\Gamma}{2H_1} x^2 a A \cos(\Phi - \\ - 2\varphi) \exp(-2v x^2 \tau_1) - \frac{3v x^3}{H_1} \Gamma a A \sin(\Phi - 2\varphi) \exp(-2v x^2 \tau_1) + \\ + \frac{1}{2x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - a \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{k}{y} a \frac{\partial a}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \left( x - \frac{3}{H_1} E x^3 \right) \frac{\partial a}{\partial \tau_1} - \frac{1}{H_1} D x^2 a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \frac{\Gamma}{2H_1} x^2 a A \sin(\Phi - 2\varphi) \exp(-2v x^2 \tau_1) + \\ + \frac{3v x^3}{H_1} \Gamma a A \cos(\Phi - 2\varphi) \exp(-2v x^2 \tau_1) + \\ + \frac{1}{2x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} \left[ 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{k}{y} a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$A \frac{12}{H_1} E x^4 = \frac{\Gamma}{H_1} x^2 a^2 \cos(\Phi - 2\varphi) + \frac{2\Gamma}{H_1} a^2 v x^3 \sin(\Phi - 2\varphi) +$$

$$+\frac{1}{2x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{k}{y} \frac{\partial A}{\partial y} \right] + 2A \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1} \left( x - 15 \frac{Ez^3}{H_1} \right) + 8D \frac{z^2}{H_1} \frac{\partial A}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$-A \frac{4}{H_1} Dz^3 = -\frac{1}{H_1} z^2 \Gamma a^2 \sin(\Phi - 2\varphi) + \frac{2}{H_1} \Gamma a^2 \nu \cos(\Phi - 2\varphi) z^3 - 2 \left( z - 15 \frac{Ez^3}{H_1} \right) \frac{\partial A}{\partial \tau_1} + 8 \frac{Dz^2}{H_1} A \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} \left[ 2 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{k}{y} A \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \quad (2.12)$$

### § 3. Решение задачи об узких пучках

Будем считать, что магнитное поле направлено по оси  $x$ , являющейся осью симметрии пучка.

Решение уравнений (2.9) — (2.12) ищем в виде

$$a = a_0(\tau_1) \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad \varphi = \tau_1(\tau_1) + k(\tau_1) \frac{y^2}{2} \quad (3.1)$$

$$A = A_0(\tau_1) \exp\left(-\frac{y^2}{y_0^2 f^2}\right), \quad \Phi = \tau_1(\tau_1) + k_1(\tau_1) \frac{y^2}{2} \quad (3.2)$$

где  $y_0$  — начальная ширина пучка.

Подставляя (3.1), (3.2) в уравнения (2.9) — (2.12) и приравнявая коэффициенты при  $y^0$  и  $y^2$ , получим систему из восьми уравнений

$$\frac{\partial a'}{\partial \tau'} = \frac{\tau_1(1 + 3\xi) + \tau_2 \bar{\nu}}{(1 + 3\xi)^2 + \bar{\nu}^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{a'} \frac{\tau_1 \bar{\nu} - \tau_2(1 + 3\xi)}{(1 + 3\xi)^2 + \bar{\nu}^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial A'}{\partial \tau'} = \frac{1}{4} \frac{8\bar{\nu}\tau_3 + (1 + 15\xi)\tau_4}{16\bar{\nu}^2 + (1 + 15\xi)^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial \tau'} = \frac{1}{4A'} \frac{8\bar{\nu}\tau_4 - 2(1 + 15\xi)\tau_2}{16\bar{\nu}^2 + (1 + 15\xi)^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau'} = \frac{1}{2} f^3 y_0^2 \frac{(1 + 3\xi)\tau_5 + \nu\tau_6}{(1 + 3\xi)^2 + \bar{\nu}^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial k'}{\partial \tau'} = 2 \frac{\tau_5 \bar{\nu} - (1 + 3\xi)\tau_6}{(1 + 3\xi)^2 + \bar{\nu}^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau'} = \frac{F^3 y_0^2}{4A'} \frac{4\bar{\nu}\tau_7 + (1 + 15\xi)\tau_8}{16\bar{\nu}^2 + (1 + 15\xi)^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial k'_1}{\partial z'} = \frac{1}{A'} \frac{4\sqrt{\varphi_6} - (1+15\xi)\varphi_7}{16\sqrt{2} + (1+15\xi)^2} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\lambda k'_1 \bar{a}' \bar{k}_1}{2} + \frac{\Gamma_1}{2} A' a' E_1 S + 3\Gamma_1 \bar{a}' A' E_1 C, \quad \varphi_2 = -i a' f_1 \bar{k}_1 + \\ &+ \frac{\Gamma_1}{2} A' a' E_1 C - 3\Gamma_1 \bar{a}' A' E_1 S \\ \varphi_3 &= 12\xi A' + A' \bar{k}_1 F_1 + \Gamma_1 a'^2 C + 2\Gamma_1 a'^2 S, \quad \varphi_4 = -4A' \bar{a}' + \lambda k'_1 A' \frac{k_1}{2} - \\ &- \Gamma_1 a'^2 S + 2\Gamma_1 \bar{a}' a'^2 C \\ \varphi_5 &= -2\lambda k'_1 \bar{f}_1 + \Gamma_1 A' E_1 C \left( \frac{k_2}{4} - 3\sqrt{F_1} \right) - \frac{\Gamma_1}{2} A' E_1 S (F_1 + 3\sqrt{k_2}) \\ \varphi_6 &= 2\lambda f_1^2 - \frac{\lambda k'_1}{2} - \frac{\Gamma_1}{2} A' E_1 C (F_1 + 3\sqrt{k_2}) + \Gamma_1 A' E_1 S \left( 3\sqrt{F_1} - \frac{k_2}{4} \right) \\ \varphi_7 &= 2\lambda A' F_1^2 - \frac{\lambda k_1^2 A'}{2} - \Gamma_1 a'^2 S \left( \frac{k_2}{2} + 2\sqrt{f_2} \right) + \\ &+ \Gamma_1 a'^2 C (k_2 - f_2) \\ \varphi_8 &= -2\lambda A' k_1 F_1 - \Gamma_1 a'^2 C \left( \frac{k_2}{2} + 2\sqrt{f_2} \right) + \Gamma_1 a'^2 S (f_2 + \sqrt{k_2}) \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi = -\frac{E a^2}{H_1}, \quad \lambda = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha'_1}{\partial z_1'^2}, \quad \bar{a}' = \alpha_2, \quad C = \cos(\alpha_1 - 2\alpha_2)$$

$$S = \sin(\alpha_1 - 2\alpha_2), \quad \Gamma_1 = \frac{K}{H_1} \Gamma, \quad F_1 = \frac{1}{y_0^2 F^2}, \quad f_1 = \frac{1}{y_0^2 f^2}$$

$$k_2 = k_j - 2k', \quad \bar{k}_1 = 1 + \bar{k}, \quad E_1 = \exp(-2\gamma z'), \quad f_2 = \frac{1}{y_0^2} \left( \frac{2}{f^2} - \frac{1}{F^2} \right)$$

Штрихами обозначены безразмерные переменные, полученные после следующей замены переменных:

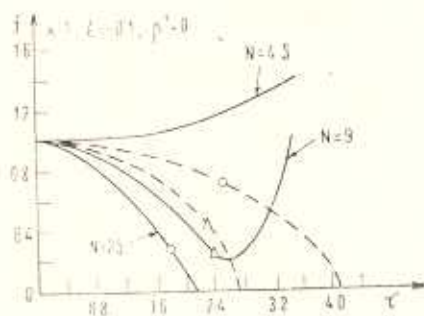
$$a' = \frac{a_0}{K}, \quad A' = \frac{A_0}{K}, \quad k = \left( \frac{z}{H_1} \right)^2 k', \quad k_1 = \left( \frac{z}{H_1} \right)^2 k'_1, \quad y_0 = \frac{y_0^2}{H_1}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} \tau', \quad \alpha_1 = \frac{1}{H_1} \alpha'_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{H_1} \alpha'_2, \quad K = u_0(0)$$

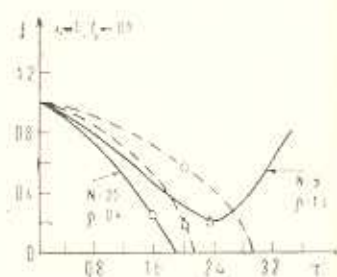
В работе [15] дается расчет звуковых пучков в газовой динамике.

При этом решается уравнение, которое получается из (1.1) при  $\vec{H} = 0$ , кроме того, рассматривается сжимаемая жидкость без пузырьков газа.

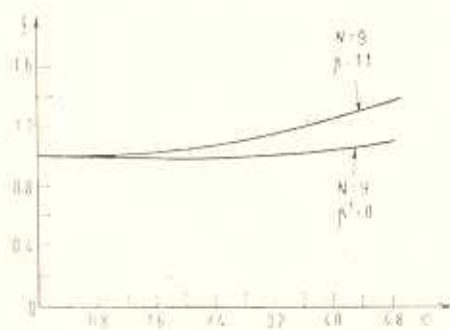
В настоящей работе для системы уравнений (3.3) — (3.10) численно решена задача Коши на ЭВМ ЕС1045. При этом проведена целая серия расчетов для различных значений параметров, характеризующих поведение узких пучков:  $N = \frac{\Gamma K}{H_1} y_0^2$ , дающего отношение нелинейных и дифракционных эффектов и  $\beta = \frac{1}{|k''| y_0^2}$ , дающего отношение радиуса кривизны к начальной ширине пучка.



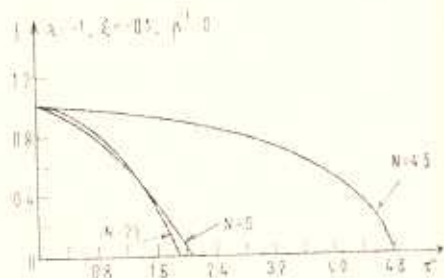
Фиг. 1



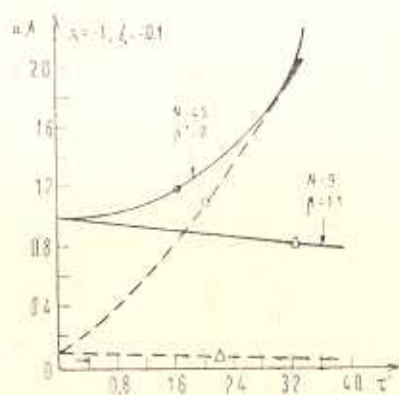
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Результаты расчетов для значений  $N=4,5; 9; 25; \beta^{-1}=0, \beta=0,4; 1,1$ ; дисперсии  $\xi=-0,1; -1$ ; диссипации  $\nu=0$ , коэффициента нелинейности  $K/H_1=0,1; 0,05$  приведены на графиках. На фиг. 1—5 приводится значение ширины пучка  $f$ . Как показывают расчеты, при  $N=4,5$  происходит расширение пучка, при  $N=9$  пучок сперва сужается, но, доходя до фокального пятна, затем расширяется, а для  $N=25$  имеет место фокусировка пучка (фиг. 1) Там же пунктиром приводится решение по приближенным формулам, полученным в [10]:

$$-\zeta' = \frac{\sqrt{C^2 f^2 - \xi}}{C} - \frac{\sqrt{C - \xi}}{C}, \quad \bar{C} = \left( K' - \frac{\nu}{72} \frac{f^2 \exp(-\nu \zeta')}{\xi^2} \frac{K^2}{H_1^2} \right)^2 + \xi$$

$$\bar{\xi} = \frac{1}{6\xi} \frac{\lambda}{y_0^2} \left( \frac{Kl'}{H_1} \right)^2 \exp(-\nu \zeta') + \frac{4\lambda^2}{y_0^4}$$

Как видно из фиг. 1, для  $N=25$  фокусное расстояние по приближенному решению значительно больше, чем по уточненному, для  $N=9$  приближенное решение фокусируется, в то время как точное решение дает фокальное пятно, а при  $N=4,5$  в точном решении имеет место дефокусирование. Таким образом, для сильной нелинейности точное решение быстрее фокусируется, для средней нелинейности точное решение не достигает фокуса, а для малой нелинейности происходит расширение пучка.

В силу большого количества параметров, как и в нелинейной акустике [15], введены безразмерные параметры, содержащие влияющие константы на решение, в частности, радиус пузырька  $R$  входят в параметр  $\xi$ , характеризующий дисперсию, при помощи коэффициента  $E$ . Подобная классификация выделяет влияние дифракции  $\beta$ , нелинейности  $N$ , дисперсии  $\xi$  на волновое движение в пучке.

Приведенный метод является простым и эффективным при расчете пучков для различных сред.

Автор статьи выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за большую помощь в процессе работы.

## THE INVESTIGATION OF NONLINEAR NARROW BUNDLES IN ELECTROCONDUCTING FLUID WITH GAS BUBBLES

S. M. MANUKYAN

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՆԵՂ ՓՆՁԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԳԱԶԱՅԻՆ  
ՊԳՊՋԱԿՆԵՐՈՎ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱԳՈՐԳԻԶ ՀԵՂՈՒԹՅՈՒՄ

Ս. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկված է զաղաչին պղպշակներով էլեկտրահաղորդիչ հեղուկում նեղ փնջերի հաշվարկի խնդիրը: Ստացված է կարճ ալիքների և հարմոնիկի

ամպլիտուդի հաճախությունները, որի լուծումը փնտրվում է գառսայան փնջերի տեսքով: Ամպլիտուդի, փուլի, կորուսյան և փնջի լայնության հաշվարկի միջոցով ստացված է լուծում կիցաասանցրային տիրույթի համար: Բերված են ստացված լուծման գրաֆիկները և արված է համեմատություն մոտավոր բա-  
նաձևերի լուծման հետ:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
2. Шефтер Г. М. Учет эффектов вязкости и теплопроводности при распространении импульсов в неоднородной движущейся жидкости.—ПММ, 1969, т. 33, № 1, с. 162—168.
3. Багдоев А. Г., Давоян Э. Н. Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке.—Журнал Высш. мат. и матем. физики, 1972, т. 12, № 6, с. 1512—1529.
4. Минасян М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН Арм.ССР, 1972, т. LV, 5.
5. Багдоев А. Г., Петросян Л. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводной жидкости с несимметричным тензором напряжений I. ЖТФ, 1980, т. 50, в. 12, с. 2504—2511.
6. Багдоев А. Г., Петросян Л. Г. Уравнения коротких волн для теплопроводной жидкости с несимметричным тензором напряжений II. ЖТФ, 1980, т. 50, в. 12, с. 2512—2520.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977, 621 с.
8. Кармян В. Н. Нелинейные волны в диспергирующих средах.—Новосибирск: Наука, 1973.
9. Багдоев А. Г., Оганян Г. Г. Эволюция квантовохроматических волн в релаксационной газожидкостной смеси.—Изв. АН Арм.ССР: Механика, 1984, т. 37, № 1, с. 34—45.
10. Багдоев А. Г., Петросян Л. Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1983, № 5, с. 3—16.
11. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа.—Реология суспензий (сб. статей), М.: Мир, 1975, с. 68—103.
12. Қоғарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости.—Докл. АН СССР, 1961, 137, № 6, с. 1331—1333.
13. Губайдулин А. А., Ивандеев А. И., Исматуллин Р. И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, № 2, с. 78—86.
14. Куликовский А. Г., Любимов Г. Г. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
15. Балхалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых лучков. М.: Наука, 1982, 176 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию  
11.XI.1987