ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 532.591:534.22.2

ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД

ОГАНЯН Г. Г.

Исследованию волновых течений газожидкостных смесей посвящено большое количество работ ([1—3], где наиболее полно отражена библиография по рассматриваемому вопросу). Теоретическое нахождение характеристик течения в рамках гомогенной модели [2,3] качественно не всегда совпадает с данными эксперимента [1, 2, 4]. Так, например, даже в слабых ударных волнах ввиду сжатия пузырьков, может происходить интенсивный теплообмен между ними и жидкой фазой [5, 6], что не отражается соответствующим образом в уравнениях, описывающих волновое движение смеси. Как отмечено в [1, 2, 5, 6], в этом случае главным диссипативным механизмом может явиться тепловая релаксация.

В настоящей работе методом коротких волн [7, 8], учитывая различие температур фаз, на основе односкоростной модели [1], выведены нелинейные уравнения, описывающие распространение волн в газожидкостных смесях при квазиизотермическом и квазиадиабатическом поведениях газового пузырька.

1. Исходные уравнения. Предположим, что в монодисперсной смеси жидкая и газовая фазы движутся с одинаковой скоростью, при этом несущая жидкая фаза обладает эффектами вязкости и сжимаемости, а газовая фаза представляет собой пузырьки калорически совершенного газа. Ограничиваясь рассмотрением течений, где в смеси не происходит сильного пересжатия газовой фазы, будем считать, что, ввиду сильного влияния температуры на плотность пузырька теплообмен между ним и жидкостью определяется лишь тепловым сопротивлением газа и поэтому температуру T_1 жидкой фазы примем постоянной ($T_1 = T_0 = \text{const}$, $T_2 \neq \text{const}$). При этом учет эффекта теплопроводности газовой фазы существенен лишь при межфазном взаимодействии [1, 6]. Полагая, что дробление, столкновение, слипание пузырьков отсутствуют и не происходит образования новых пузырьков, уравнения движения рассматриваемой газожидкостной смеси возьмем в виде [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

$$P_2-P=(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}-$$

$$-\frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{\rho_2\beta}{\rho_1(1-\beta)}=\mathrm{const},\quad \rho_2R^3=\mathrm{const},\quad P_2=c_{V2}(\gamma-1)\rho_2T_2 \tag{1.4}$$

$$\rho=\rho_1(1-\beta)+\beta\rho_2,\quad P=P_1(1-\beta)+\beta P_2 \tag{1.5}$$

Здесь t — время, x — координата, u — скорость частиц смеси, P, ρ, T — соответственно, давление, плотность и температура, R — радиус пузырьков, β—объем газа в единице объема смеси (объемное газосодержание), γ — показатель адиабаты газа, c_{V2} — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, $\mu=\mu_1[1+O(\beta)]$ — динамический коэффициент вязкости смеси, a — скорость звука. Индексы „1", „2" отнесены, соответственно, к параметрам жидкой и газовой фаз. Параметры, характеризующие движение всей смеси, индексов не имеют. Поправочные коэффициенты φ_1, φ_2, впервые введенные в [6], учитывают конечность величины β и неодиночность газового пузырька в безграничной жидкости. Они имеют вид [1]

$$\varphi_1=\frac{1,1\beta^{1/3}-\beta}{1-\beta},\quad \varphi_2=\frac{1,47\beta^{1/3}-0,33\beta}{1-\beta}$$

Первое соотношение из (1.4), являющееся следствием односкоростного приближения, получено из уравнений неразрывности жидкой и газовой фаз [1].

Необходимо отметить, что вместо модифицированного уравнения Херринга-Флинна (1.3) в [1] выведено и использовано обобщенное уравнение Рэлея-Ламба, учитывающее эффекты сжимаемости, вязкости жидкой фазы и неодиночность газовых пузырьков.

Для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.5), используя гипотезу о локальном термодинамическом равновесии в пределах каждой фазы [1], обратимся к соотношению Гиббса

$$T_2\frac{ds_2}{dt}=\frac{de_2}{dt}-\frac{P_2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{dt} \tag{1.6}$$

где s_2, $e_2=c_{V2}T_2+e_{20}$ — удельные энтропия и внутренняя энергия газовой фазы. Комбинируя (1.6) с уравнениями (1.4), можно получить

$$\rho_2T_2\frac{ds_2}{dt}=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{dP_2}{dt}+\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt}\right)$$

Здесь стоящий слева член характеризует выделение тепла от единицы объема пузырька. Тепло, выделяемое всем объемом пузырька, будет отдаваться жидкой фазе через его полную поверхность, поэтому, обозначая через q поток тепла на единицу поверхности пузырька, напишем

$$\rho_2 T_2 \frac{ds_2}{dt} = -\frac{3}{R} q$$

Тогда предыдущее уравнение перепишется в виде

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{3\gamma P_2}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{3(\gamma-1)}{R} q \tag{1.7}$$

при этом, согласно [1,6], можно полагать

$$q = \frac{k_2 \mathrm{Nu}}{2R}(T_2 - T_0), \quad \mathrm{Nu} = \frac{R\sigma}{k_2} \tag{1.8}$$

где k_2 — коэффициент теплопроводности газа, σ — коэффициент межфазного теплообмена, Nu — число Нуссельта.

Уравнения (1.7) и (1.8) позволяют в первом приближении учесть несовпадение температур в фазах и являются недостающими соотношениями для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.5). Отметим, что уравнение (1.7) другим путем получено в [1, 2].

Из условий сохранения сферической формы пузырька и совпадения скоростей частиц жидкой и газовой фаз (1.4) находим

$$\frac{1}{\beta(1-\beta)}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt} - \frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = -\frac{3\rho_2}{R}\frac{dR}{dt} \tag{1.9}$$

Тогда, согласно определению плотности всей смеси (1.5), уравнение неразрывности смеси (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{1-\beta}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{3\beta}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.10}$$

Используя уравнения (1.9), (1.10) и (1.3), из определения давления всей смеси (1.5) получим

$$(1-\beta)\frac{dP_2}{dt} - \frac{d}{dt}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2} + (1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} - \right.$$
$$\left. - \frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2 - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] = (1-\beta)\frac{dP_1}{dt} + \beta\left(P_2 - P_1\right)\left(\frac{3}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.11}$$

Комбинирование уравнения импульса смеси (1.2) с уравнениями пульсации пузырька (1.3) и состояний (1.1) дает

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{P_2}{T_2}\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{3T_2}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{\partial^2 R}{dt^2} + \right.$$
$$\left. + (1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt} - \frac{R}{a_1}\frac{d}{dt}\left(P_2 - \frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right] + \frac{4}{3}\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.12}$$

Исключим из рассмотрения в уравнении (1.7)—(1.8) давление в пузырьке P_2, а затем и плотность ρ_2 посредством уравнений состояния калорически совершенного газа и (1.9). Тогда имеем

$$\frac{\partial T_2}{\partial t}+u\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{3(\gamma-1)T_2}{R}\left(\frac{\partial R}{\partial t}+u\frac{\partial R}{\partial x}\right)=-\frac{3k_2\mathrm{Nu}}{2\rho_2 c_{V2}R^2}(T_2-T_0) \quad (1.13)$$

2. *Асимптотические разложения.* Известно [1,3], что в газожидкостных смесях распространение возмущений сопровождается дисперсией, при этом скорость распространения в предельных случаях совпадает либо с изотермической, либо с адиабатической скоростью звука. Первый из них реализуется, когда число Нуссельта очень велико, а второй,— когда число Нуссельта стремится к нулю.

Предположим, что в любой момент времени и в каждой точке пространства значения параметров рассматриваемой газожидкостной смеси мало отклоняются от соответствующих значений невозмущенного состояния (покоя). Будем рассматривать течения типа коротких волн, то есть течения, в которых ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые может распространяться волна. Введем систему координат, движущуюся со скоростью звука a_0 относительно невозмущенной смеси [7, 8]

$$t=\frac{L}{\Delta}\frac{1}{a_0}t', \quad x=a_0t+Lx_1 \quad (2.1)$$

Здесь L—характерная длина в направлении оси x, Δ—безразмерный малый параметр, a_0—скорость движения волны по покоящейся газожидкостной смеси, совпадающая либо с изотермической a_{i0}, либо с адиабатической a_{j0} скоростями звука в смеси. Их определения для каждого режима распространения возмущений будут даны ниже.

Примем, что величины возмущений характеристик течения смеси имеют тот же порядок, что и массовая скорость частиц смеси ($i=1,2$)

$$u=\varepsilon a_0u', \quad P=P_0(1+\varepsilon P'), \quad P_i=P_0(1+\varepsilon P_i'), \quad \rho=\rho_0(1-\varepsilon\rho')$$
$$\rho_i=\rho_{i0}(1+\varepsilon\rho_i'), \quad R=R_0(1+\varepsilon R'), \quad \beta=\beta_0+\varepsilon\beta', \quad a_1=a_{10}(1+\varepsilon a_1') \quad (2.2)$$

Здесь ε—второй безразмерный малый параметр, индекс 0 отнесен к невозмущенному состоянию (состоянию покоя).

При дальнейшем упрощении уравнений п. 1 будут удержаны лишь главные члены (порядка 1 и ε) и штрихи над возмущениями параметров течения будут опущены.

Применяя преобразования (2.1)—(2.2) к уравнениям (1.1)—(1.8) и (1.9)—(1.11), удержим главные члены порядка 1. Затем, имея в виду, что волна распространяется по покоящейся в системе координат (x_1, t') смеси, проинтегрируем получаемые упрощенные уравнения

$$\rho=u, \quad P=\frac{\rho_0a_0^2}{P_0}u, \quad \rho_1=\frac{1}{1-\beta_0}(u+3\beta_0R), \quad \rho_2=-3R, \quad \beta=\beta_0(u+3R)$$
$$P_2=P_1=P \quad (2.3)$$

Из полученных формул следует, что в изучаемом приближении сжатие смеси происходит обратимо.

Перейдем к изучению предельных режимов распространения возмущений в смеси в зависимости от величины удельного потока тепла, характеризующей термодинамический процесс, протекающий в газовом пузырьке.

3. Квазиизотермический процесс. Примем за независимые термодинамические переменные плотность и температуру.

Разложим функцию $P_1=P_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности положения локального термодинамического равновесия (покоя) и учтем, что температура жидкой фазы практически не меняется ($T_1=T_0=\text{const}$). Далее, подставляя полученное разложение в уравнение (1. 11) и комбинируя его с уравнениями (1.4), (1.9) и (1.10), получим

$$\frac{(1-\beta)P_2}{T_2}\left(\frac{dT_2}{dt}-\frac{3T_2}{R}\frac{dR}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\right.$$

$$\left.\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{1e}}\frac{d}{dt}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right]-\rho_1 a_{1e}^2\left(\frac{3\beta}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)-$$

$$-\beta(P_2-P_1)\left(\frac{3}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0, \quad a_{1e}^2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial\rho_1}\right)_{T_1} \tag{3.1}$$

Здесь a_{1e}—изотермическая скорость звука в жидкости. Известно [3, 10], что связь между невозмущенными изотермическими скоростями звука в смеси и в фазах дается формулой

$$\frac{1}{a_{e0}^2}-\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{1e0}^2}-\frac{\beta_0\rho_0}{P_0}=0 \tag{3.2}$$

Дополним теперь разложения (2.2) соотношением для температуры

$$T_2=T_0(1+\varepsilon^2 T_2), \quad T_{20}=T_0 \tag{3.3}$$

Искомое уравнение, описывающее распространение ударной волны малой, но конечной интенсивности должно быть выведено из упрощенного в порядке ε варианта уравнения (3.1), в котором необходимо исключить член порядка единицы $\partial R/\partial x_1$. Вкратце опишем эту процедуру.

Применяя преобразования (2.1), (2.2) и (2.3) к уравнениям (3.1) и (1.13), оставим при их упрощении главные члены порядка единицы. Интегрируя получаемые уравнения и используя определение (3. 2), находим

$$R=-\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}u, \quad T_2=\frac{1}{\varepsilon}\frac{R_0^2}{L^2}\frac{\text{Pe}}{\text{Nu}}\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}\frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \text{Pe}=\frac{La_{e0}}{\lambda_2} \tag{3.4}$$

Здесь Pe—число Пекле, λ_2—коэффициент температуропроводности газа.

Разлагая функцию $a_1=a_1(\rho_1, T_1)$ в ряд Тейлора в окрестности состояния покоя и используя формулы (2.3), (3.2) и (3.4), возмущение скорости звука в жидкости выразим через возмущение скорости частиц смеси

$$a_{1e}=(m_e-1)\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{1e0}^2}\,u, \quad m_e=\frac{1}{a_{1e0}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1 a_1)\right]_{T_1} \tag{3.5}$$

Теперь применим преобразования (2.1), (2.2) к уравнениям (3.1) и (1.12) и при их упрощении оставим главные члены до порядка ε включительно. Комбинирование этих упрощенных уравнений позволяет исключить член порядка единицы $\partial R/\partial x_1$, при этом в получаемом уравнении кроме членов порядка ε останется также член порядка единицы с коэффициентом, в точности совпадающим с выражением (3.2). Известно [7], что величины порядка единицы связаны с переносом массы и импульса смеси. В уравнении, описывающем распространение слабых волн, упомянутый выше член должен отсутствовать, поэтому коэффициент при члене порядка единицы необходимо приравнять нулю. Тем самым снова приходим к определению (3.2) скорости звука в смеси. Далее, в полученном в изучаемом приближении упрощенном уравнении, заменяя возмущенные характеристики течения через возмущение скорости посредством соотношений коротких волн (2.3), (3.4), (3.5) и используя определение (3.2), окончательно получим

$$\Delta\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon\alpha_e u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_e+\frac{R_0}{L}\frac{a_{e0}}{a_{1e0}}\delta_a+\frac{R_0^2}{L^2}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\delta_T\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+$$

$$+\frac{R_0^2}{L^2}\gamma_e\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}=0, \quad u_1=\frac{u}{\beta_0} \tag{3.6}$$

$$\alpha_e=\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{1e0}}\right]^2+\frac{m_e\beta_0(1-\beta_0)\rho_0^2 a_{e0}^4}{\rho_{10}^2 a_{1e0}^4}, \quad \mathrm{Re}=\frac{\rho_0 L a_{e0}}{\mu}$$

$$\delta_e=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{\rho_0 a_{e0}^2}{P_0}A_e, \quad \delta_a=\frac{1}{2}A_e, \quad \delta_T=\frac{\gamma-1}{3\gamma}\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{1e0}^2}\right]$$

$$A_e=\left(1-\frac{P_0}{\rho_{10}a_{1e0}^2}\right)\left[1-\frac{(1-\beta_0)\rho_0 a_{e0}^2}{\rho_{10}a_{1e0}^2}\right], \quad \gamma_e=\frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10}a_{e0}^2}{6P_0}A_e$$

Уравнение (3.6) описывает квазиизотермический режим распространения волн малой, но конечной интенсивности в газожидкостной смеси. Здесь δ_a и δ_T — акустическая и тепловая составляющие коэффициента диссипации. Если $\mathrm{Nu}\to\infty$, то уравнение будет описывать чисто изотермический процесс распространения волн. Такое уравнение для случая, когда в химически активной жидкой фазе происходит одна реакция, получено в [10].

Для сохранения условия сплошности среды при рассматриваемых умеренных давлениях $P_0 \leq 0{,}1$ МПа в [11] приведена верхняя граница изменения величины газосодержания: $\beta_0 \leqslant 0{,}1$. Вычисления, проведенные при $0{,}01 \leqslant \beta_0 \leqslant 0{,}1$, показывают, что для слабых ударных волн величины отношений a_{e0}/a_{1e0}, $P_0/\rho_{10}a^2_{1e0}$, $\beta_0 a^2_{e0}/\rho_{10}a^2_{1e0} \ll 1$. Таким образом, в уравнении (3.6) сжимаемостью жидкой фазы можно пренебречь в сравнении с эффектами вязкости и тепловой релаксации. Такой вывод находится в соответствии с критерием $\beta_0 \gg P_0/\rho_{10}a^2_{10}$ — пренебрежении сжимаемости жидкости [1, 11]. Тогда безразмерные коэффициенты уравнения (3.6) упростятся и сведутся к виду

$$a_e = 1, \quad \delta_e = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{\beta_0 a^2_{e0}}{P_0}\right), \quad \delta_T = \frac{\gamma - 1}{3\gamma}, \quad \gamma_e = \frac{(1-\beta_{10})\rho_{10}a^2_{e0}}{6P_0} \qquad (3.7)$$

Отметим, что влияние тепловой релаксации пузырька на квазиизотермический процесс распространения возмущений эквивалентно наличию второй (продольной) вязкости. Из уравнения (3.6) видно, что в рассматриваемом приближении, несмотря на постоянство температуры в газовом пузырьке, нельзя пренебрегать влиянием теплообмена между пузырьком и окружающей его жидкостью. Более того, при $\mathrm{Pe}/\mathrm{Nu} \sim 1$, что предполагалось при выводе (3.6), по величине тепловая составляющая коэффициента диссипации одного порядка с коэффициентом дисперсии.

В зависимости от относительной величины малых параметров Δ, ε, $1/\mathrm{Re}$, R_0/L можно выделить возможные течения, встречающиеся при квазиизотермическом режиме распространения возмущений. Не останавливаясь подробно на классификации, выделим лишь случай, реализующийся при $\Delta \ll \varepsilon \sim 1/\mathrm{Re} \sim R_0^2/L^2$. Полагая

$$\varepsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_e = \frac{R_0^2}{L_0^2}\frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Nu}}\delta_T = \frac{R_0^2}{L^2}\gamma_e$$

уравнение (3.6) приведется к виду

$$u_1\frac{du_1}{dx_1} - 2\frac{d^2u_1}{dx_1^2} + \frac{d^3u_1}{dx_1^3} = 0$$

Полученное уравнение определяет поведение стационарных волн и допускает частное аналитическое решение [12]

$$u_1 = \frac{24}{25} - \frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{c_1}{4}}\left[1 + \sqrt{3}\,\frac{1 + \mathrm{cn}(2\zeta, k)}{1 - \mathrm{cn}(2\zeta, k)}\right]\exp\left(\frac{4}{5}x_1\right)$$

$$\zeta = \sqrt{3}\,\sqrt[3]{\frac{c_2}{4}}\left[\exp\left(\frac{2}{5}x_1\right) + c_3\right], \quad k^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, $\mathrm{cn}\,(2\zeta, k)$ — эллиптический косинус, k — модуль эллиптического интеграла первого рода.

4. Квазиадиабатический процесс. Примем за независимые термодинамические переменные плотность и энтропию.

Разложим функцию $P_1 = P_1(\rho_1, s_1)$ в ряд Тейлора в окрестности положения термодинамического равновесия (покоя). Используя соотношения взаимности [7, 9], получим

$$\frac{dP_1}{dt}=a_{1f}^2\frac{d\rho_1}{dt}+\frac{\alpha_1 T_1}{c_{p_1}}\rho_1 a_{1f}^2\frac{ds_1}{dt},\quad a_{1f}^2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial\rho_1}\right)_{s_1},\quad \alpha_1=-\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial T_1}\right)_{p_1}$$

Здесь a_{1f}—адиабатическая скорость звука в жидкости, α_1—коэффициент теплового расширения, c_{p1}—удельная теплоемкость при постоянном давлении, s_1—удельная энтропия, определяемая из уравнения переноса тепла в жидкости, температура которой постоянна [9]

$$\rho_1 T_0\frac{ds_1}{dt}=\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\quad T_1=T_0$$

Комбинирование последних двух уравнений с уравнениями (1.4), (1.9)—(1.11) дает

$$\frac{(1-\beta)P_2}{T_2}\left(\frac{dT_2}{dt}-\frac{3T_2}{R}\frac{dR}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left[(1-\varphi_1)\rho_1 R\frac{d^2R}{dt^2}+(1-\varphi_2)\frac{3}{2}\rho_1\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{R}{a_{1f}}\frac{d}{dt}\left(P_2-\frac{4\mu}{R}\frac{dR}{dt}\right)\right]-\rho_1 a_{1f}^2\left(\frac{3\beta}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)- \qquad (4.1)$$
$$-\beta(P_2-P_1)\left(\frac{3}{R}\frac{dR}{dt}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{4}{3}(1-\beta)\mu\frac{\alpha_1 a_{1f}^2}{c_{p1}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=0$$

Искомое уравнение, описывающее волновое движение смеси, должно быть выведено из упрощенного в порядке ε варианта уравнения (4.1), в котором необходимо исключить члена порядка единицы $\partial R/\partial x_1$ и $\partial T_2/\partial x_1$.

Дополним соотношения (2.2) следующим разложением для температуры

$$T_2=T_0(1+\varepsilon T_2'),\quad T_{20}=T_0 \qquad (4.2)$$

Применяя преобразования (2.1), (2.2) и (4.2) к уравнениям (1.13) и (1.12), удержим при упрощении лишь члены порядка единицы. Интегрируя получаемые соотношения, находим

$$T_2=-3(\gamma-1)R,\quad R=-\frac{\rho_0 a_{f0}^2}{3\gamma P_0}u,\quad \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\sim\varepsilon^2 \qquad (4.3)$$

В рассматриваемом процессе снова имеет место формула (3.5) с заменой a_{1e}, m_e на a_{1f} и m_f, где $m_f=\dfrac{1}{a_{1f0}}\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho_1}(\rho_1 a_{1f})\right]_{s_1}$

Теперь применим то же преобразование коротких волн к уравнениям (4.1), (1.12) и (1.13) и при их упрощении удержим главные члены до порядка ε включительно. Далее, скомбинируем полученные упрощенные уравнения и, тем самым, исключим члены порядка единицы $\partial R/\partial x_1$ и $\partial T_2/\partial x_1$. После этих выкладок получим промежуточное уравнение, в котором сохранится член порядка единицы $\partial u/\partial x_1$ с некоторым коэффициентом. В уравнении, описывающем распространение слабых ударных волн, член порядка единицы, характеризующий перенос массы и импульса смеси, должен отсутствовать [7]. Поэтому в промежуточном уравнении коэффициент при $\partial u/\partial x_1$ необходимо приравнять нулю, в результате чего найдем явную связь между невозмущенной адиабатической скоростью звука в смеси и скоростями звука в фазах

$$\frac{1}{a_{fo}^2}=\frac{(1-\beta_0)\rho_0}{\rho_{10}a_{1fo}^2}+\frac{\beta_0\rho_0}{\gamma P_0} \tag{4.4}$$

В полученном промежуточном уравнении, учитывая определение (4.4), выразим возмущенные характеристики течения через возмущенную скорость посредством формул (2.3), (3.5) и (4.3). При квазиадиабатическом режиме распространения возмущений опять правомерен вывод относительно пренебрежения эффектам сжимаемости жидкости, приведенный в п. 3. Ввиду этого, окончательное уравнение, получаемое из промежуточного, запишется в виде

$$\Delta\frac{\partial u_1}{\partial t}+\varepsilon\alpha_f u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_f\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\varkappa u_1+\frac{R_0^2}{L^2}\gamma_f\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}=0 \tag{4.5}$$

$$\alpha_f=\frac{\gamma+1}{2},\quad \varkappa=\frac{3(\gamma-1)}{4},\quad \gamma_f=\frac{(1-\varphi_{10})\rho_{10}a_{fo}^2}{6\gamma P_0},\quad u_1=\frac{u}{\beta_0}$$

Здесь безразмерный коэффициент δ_f тот же, что и в (3.7), с заменой a_{e0} на a_{fo}. Если $\mathrm{Nu}\to 0$, то уравнение (4.5) будет описывать чисто адиабатический режим распространения волн малой, но конечной интенсивности [2].

Применим уравнение (4.5) к качественному анализу известных экспериментов [1, 2, 4, 13] по распространению слабых ударных волн в газожидкостных смесях.

Во всех экспериментах на начальной стадии эволюции заданных возмущений наблюдались осцилляции слабых волн. Ввиду пренебрежимо малого сжатия пузырьков интенсивность теплообмена пока еще мала. На начальной стадии такого же порядка малости является и величина нелинейного эффекта. Применительно к уравнению (4.5) пренебрежение этими эффектами соответствует положению связей на безразмерные малые параметры

$$\varepsilon\alpha_f=\frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\varkappa\ll\frac{R_0^2}{L^2}\gamma_f=\Delta=\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_f$$

то есть процесс распространения возмущений можно описать линейным уравнением Бюргерса-Кортевега-де Вриза.

Далее происходило нарастание нелинейного эффекта и на последующей стадии эволюции возмущений во фронте слабой ударной волны начинался процесс теплообмена между газом, нагретым при сжатии пузырька и жидкостью. В этом случае все члены уравнения (4.5) будут одного порядка. Принимая все безразмерные коэффициенты равными друг другу, поведение волны опишем уравнением

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{dx_1}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}+u_1=0$$

С увеличением характерной длины L—расстоянием, на которое может распространяться волна, теплообмен усиливался ввиду еще большего сжатия пузырька и становился главным диссипативным механизмом в процессе распространения слабой ударной волны. Полагая на этой стадии

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_f \ll \frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\varkappa=\varepsilon\alpha_f=\Delta=\frac{R_0^2}{L^2}\gamma_f$$

приведем уравнение (4.5) к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}+u_1=0$$

Очевидно, что волна все еще имеет осцилляционную структуру, при этом затухание осцилляций имеет экспоненциальный характер.

Наконец, когда $L>Vt_*$, где V—скорость слабой ударной волны, t_*—время тепловой релаксации [6], реализовалась ударная волна с монотонной структурой. Этот факт соответствует выполнению в (4.5) условий

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\delta_f=\frac{R_0^2}{L^2}\gamma_f\ll\frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\varkappa=\varepsilon\alpha_f=\Delta$$

Распространение слабой ударной волны описывается теперь уравнением

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_1=0$$

Рассмотрим в уравнении (4.5) более подробно коэффициент при члене, ответственным за тепловую релаксацию. Согласно [6], он может быть представлен в виде

$$\frac{L^2}{R_0^2}\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}\varkappa=\frac{L}{R_0}\sqrt{\frac{\lambda_2}{t_* a_{fo}^2}}\varkappa \tag{4.6}$$

В вышеупомянутых экспериментах для слабых ударных волн, распространяющихся в жидкости с пузырьками гелия, наблюдался более ранний переход от осцилляционной структуры к монотонной в сравнении с жидкостью, насыщенной пузырьками воздуха или углекислого газа. Этот факт можно объяснить тем, что коэффициент температуропроводности λ_2 при переходе от воздуха и CO_2 к He возрастает на порядок, вследствие чего коэффициент (4.6) начинает играть существенную роль в уравнении (4.5) на меньших расстояниях.

Проведенный анализ распространения слабых ударных волн качественно согласуется с численными расчетами из [6, 11], где впервые верно выявлена роль тепловых процессов на эволюцию возмущений в газожидкостных средах.

В заключение отметим следующий факт. Если отказаться от гипотезы Когарко-Йорданского [14, 15] о возможности замены давления в жидкости вдали от одиночного пузырька давлением в смеси, то в уравнении (1.3) необходимо заменить P на P_1. Проведенные более сложные, по сравнению с настоящей работой, выкладки свидетельствуют о том, что снова имеют место уравнения (3.6) и (4.5), но с несколько измененными коэффициентами диссипации и дисперсии. В частном случае отсутствия теплообмена и несжимаемости жидкой фазы получаем следующие связи:

$$\frac{\delta_*}{\delta} = 1 + \beta_0, \quad \frac{\gamma_*}{\gamma} = \frac{1}{1-\beta_0}$$

где δ_*, γ_*—коэффициенты, вычисленные без применения гипотезы. Хотя гипотеза несколько завышает величины коэффициентов диссипации и дисперсии, их различия, по всей вероятности, лежат в пределах точности общепринятых моделей газожидкостных сред.

Автор признателен А. Г. Багдоеву и М. В. Белубекяну за продолжительные дискуссии и обсуждения.

ON EQUATIONS OF NONLINEAR ACOUSTIC OF GAS-FLUID MEDIA

G. G. OHANIAN

ԳԱԶԱՀԵՂՈՒԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԿՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում են գազահեղուկ խառնուրդում ձայնային ալիքների տարածման խնդիրներ, երբ գազային պղպջակի և շրջապատող հեղուկի միջև տեղի ունի ջերմափոխանակություն։ Հեղուկի ջերմաստիճանը հաստատուն է։ Ենթադրվում է, որ հեղուկի և գազային փուլերը շարժվում են միևնույն արագությամբ, ընդորում նրանց համապատասխան ճնշումները և ջերմաստիճանները տարբեր են։

Ստացված են միաչափ ալիքների տարածումը նկարագրող ոչ գծային հավասարումները, երբ պղպջակի թերմոդինամիկական վարքը մոտ է իզոթերմիկ և ադիաբատիկ պրոցեսներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. *Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984. 301 с.
3. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа.—В кн.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.

4. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Экспериментальное исследование распространения возмущений в жидкости с пузырьками газа.—В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32—44.
5. *Чэпмен Р. Б., Плессет М. С.* Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.—Теор. основы инж. расчетов, 1971, т. *93*, № 3, с. 37—40.
6. *Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматулин Р. И.* Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры.—ПМТФ, 1978, №2, с. 78—86.
7. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений.—ПММ, 1964, т. *28*, № 6, с. 996—1007.
8. *Рыжов О. С.* Асимптотические методы в динамике жидкости.—Ж. вычисл. матем. и мат. физики, 1980, т. *20*, № 5, с. 1221—1248.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. *Оганян Г. Г.* О распространении возмущений в химически активной жидкости, содержащей пузырьки газа.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1978, т. *31*, № 3, с. 49—62.
11. *Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш.* Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа.—МЖГ, 1974, №6, с. 30—41.
12. *Оганян Г. Г.* Об одном частном решении уравнения Бюргера-Кортевега-де Вриза.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1987, № 2, с. 38—42.
13. *Noordzij L., Van Wijngaarden L.* Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gas-bubble liquid mixtures.—J. Fluid Mech., 1974, v. 66, №1, p. 115—143.
14. *Иорданский С. В.* Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.—ПМТФ, 1960, 6, с. 102—110.
15. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости.—Докл. АН СССР, 1961, т. *137*, № 6, с. 1331—1333.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.XI.1987