ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 3, 1988 Механика

УДК 539.3:532.59

О ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Как известно, дисперсионное уравнение для линейной среды одинаково как для бегущих, так и для стоячих волн. В случае нелинейных волн в зависимости от подхода задачи получаются различные зависимости. В настоящей заметке приводятся нелинейные уравнения для пластины и оболочки при больших перемещениях. Оказывается, сохранение или пренебрежение продольного инерционного члена в системе уравнений движения существенно меняет картину поведения волн модуляции при анализе на устойчивость. Для простоты это показано на примере одномерных задач.

1. Уравнения движения пластинки имеют вид [1]

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\varepsilon_1,\quad M=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\varkappa,\quad \varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varkappa=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

Как принято в теории нелинейных изгибных колебаний, обычно инерционным членом первого уравнения (1.1) пренебрегают [1] и для основной частоты шарнирно закрепленной ($u=w=M=0$) пластинки получено выражение

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1+\frac{9}{4}\frac{a^2}{h^2}\right),\quad \omega_0^2=\frac{E\pi^4}{12\rho(1-\nu^2)}\frac{h^2}{l^4} \tag{1.2}$$

Этот же результат можно получить отличным от [1] путем, если представить решение (1.1) в виде $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\right)$

$$u=\varphi(t)\sin\frac{2\pi x}{l},\quad w=f(t)\sin\frac{\pi x}{l} \tag{1.3}$$

Для бегущих волн (бесконечная среда) решение (1.1) также можно брать в форме (1.3), то есть

$$u=b\sin 2\tau,\quad w=a\sin\tau,\quad \tau=kx-\omega t \tag{1.4}$$

где a, b, k — постоянные.

Тогда получится следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1+\frac{3a^2}{h^2}\right),\quad \omega_0^2=\frac{Eh^2k^4}{12\rho(1-\nu^2)}$$ (1

при этом $T_1=\frac{Eh}{4(1-\nu^2)}a^2k^2$.

Систему (1.1) можно решать методом медленно меняющихся плитуд [2] без дополнительного предположения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$.

Если искать решение в виде

$$u=u_0+u_2e^{2i\tau}+\bar{u}_2e^{-2i\tau},\qquad w=w_1e^{i\tau}+\bar{w}_1e^{-i\tau}$$ (

где амплитуды—медленно меняющиеся функции от x и t, и приравн члены при одинаковых гармониках, получим

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}\approx-k^2w_1\bar{w}_1\left(1+\frac{1}{3}k^2h^2\right),\qquad u_2=-\frac{ik}{4}w_1^2\left(1+\frac{1}{12}k^2h^2\right)$$
(

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}k^4h^2\left(-\frac{1}{3}w_1\bar{w}_1+\frac{1}{24}w_1^2e^{2i\tau}\right)$$

При получении (1.7) учитывалось, что, так как основной явля изгибная волна, для которой огибающая имеет скорость $c=$ (групповая скорость), то в уравнении для u_0 можно полагать $\frac{\partial}{\partial t}\approx c\frac{\partial}{\partial t}$ и, кроме того, принималось, что там, где $w=0$, равно н и $\frac{\partial u_0}{\partial x}$.

Теперь дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1-\frac{9}{2}a^2k^2\right),\quad a^2=w_1\bar{w}_1$$

Следует отметить, что если в (1.6) добавить члены w_0, u (и соответствующие сопряженные), то в порядке a^2 дисперсио соотношение (1.8) не меняется.

Сравнивая (1.5) и (1.8), можно заметить отличие не только личины, но и знака нелинейного члена. Как известно [2, 3], при полнении (1.8) волновые пакеты неустойчивы $\left(\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\frac{\partial\omega}{\partial a^2}<0\right)$ и распадаются на солитоны, в то время, как при выполнении (1.5) устойчивы.

Такое отличие связано с удержанием в (1.1) инерционного на $\partial^2u/\partial t^2$. При решении (1.4) на линиях $\tau=n\pi$ равны нулю w, u, а при (1.6) на этих линиях вместо $u=0$, по-видимому, выполн $T_1\approx0$ (оно, вообще, малое). И это приводит к тому, что для д ных волн в (1.8) нелинейное и линейное дисперсионные соотношения совпадают.

2. Этот же метод [2] можно применить при изучении одномерных осесимметричных волн в цилиндрической оболочке при геометрической нелинейности. Тогда в левой части второго уравнения необходимо добавить член T_2/R, где уже

$$T_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2),\quad T_2=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1),\quad \varepsilon_2=-\frac{w}{R} \tag{2.1}$$

Решение системы (2.1) ищется в виде

$$u=u_0+\sum_{m=1}^{2}u_m e^{im\tau}+\text{к. с.},\quad w=w_0+\sum_{m=1}^{2}w_m e^{im\tau}+\text{к. с.} \tag{2.2}$$

и для дисперсионного уравнения имеем

$$\omega=\omega_0(1-Aa^2),\quad \omega_0^2=\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}X,\quad X=\frac{h^2k^4}{12}+\frac{1-\nu^2}{R^2} \tag{2.3}$$

$$A=\frac{Ek^2}{4\rho(1-\nu^2)\omega_0^2}\,\frac{18X^2+k^8h^4}{18X}$$

Приведенная в [3] формула (2.16) для $\partial\omega/\partial a^2$ не верна и часть, касающаяся геометрической нелинейности, должна быть заменена на (2.3).

ON DISPERSION EQUATIONS FOR FLEXIBLE PLATE AND CYLINDRICAL SHELL

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ՃԿՈՒՆ ՍԱԼԻ ԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Սալի և գլանային թաղանթի համար ստացված են միաչափ դիսպերսիոն հավասարումները՝ մեծ ճկվածքների դեպքում։ Ցույց է տրված, որ երկայնական տեղափոխությունից առաջացած իներցիոն անդամի արհամարհումը բերում է ալիքային փաթեթի կայունության, իսկ այն հաշվի առնելը՝ անկայունության։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Квазимонохроматические волны изгиба в нелинейно-упругих пластинах.—Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 169—176.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 2, с. 3—11.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI.1987