ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3.01

ОБ ЭФФЕКТЕ НЕМОНОТОННОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИНГУЛЯРНОСТИ В РЕШЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ГРАНИЦЫ

БЕРКУН В. Б., ПОПОВ В. А.

Рассматривается решение двумерной задачи теории упругости в области, представляющей собой бесконечный угол. На одной стороне угла заданы условия в напряжениях, на другой—в перемещениях. Асимптотическое решение в окрестности вершины угла строится методом, изложенным в работах [1, 2]. Исследовано изменение показателей сингулярности в решениях при различных растворах угла и коэффициентах Пуассона в случае плоской деформации.

Пусть область, занимаемая упругим однородным телом на плоскости $(x_1, x_2)\in R^2$, представляет собой бесконечный угол $K=\{(x_1, x_2): :0<r<+\infty,\ 0<\theta<\omega\}$ с вершиной в начале координат с границей $\theta=0$ и $\theta=\omega$. Здесь θ—полярный угол, $0<\omega\leqslant 2\pi$, а $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. На одной стороне угла $\theta=0$ заданы условия в напряжениях $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$, а на другой $\theta=\omega$—в перемещениях (u_r, u_θ).

Равновесие области K описывается уравнениями Ляме

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot} u=0 \tag{1}$$

где λ, μ—коэффициенты Ляме, $u=(u_r, u_\theta)$, с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u=0 && \text{при}\quad \theta=\omega \\ &\sigma_{\theta\theta}=p_1(r) && \text{при}\quad \theta=0 \\ &\sigma_{r\theta}=p_2(r) && \end{aligned} \tag{2}$$

Предполагается для простоты, что $p_i(r)\equiv 0$ $(i=1, 2)$ в малой окрестности вершины угла.

Исследуется обобщенное решение задачи (1)—(2) $u\in W_2^1(K)^2$, где $W_2^1(K)^2$—векторное пространство Соболева с нормой $\|u\|^2=\int_K |u|^2+ +\sum_{i=1}^{2}|\partial u/\partial x_i|^2 dK$. Обобщенное решение задачи (1)–(2) в области с кусочно-гладкой границей существует и единственно [3].

Асимптотическое решение задачи в окрестности вершины O, согласно [1, 2], имеет вид

$$u=\sum_{j=1}^{s} r^{-i\gamma_j}\sum_{k=1}^{2} c_{kj}\varphi_{kj}(\theta)+w(r, \theta) \tag{3}$$

где показатели сингулярности ρ_j—корни трансцендентного уравнения

$$F(\rho, \omega, \nu) = \mathrm{sh}^2\rho\omega + \frac{4(1-\nu)^2}{3-4\nu} + \frac{\rho^2}{3-4\nu}\sin^2\omega = 0 \qquad (4)$$

попадающие в интервал $0 < \mathrm{Im}\,\rho_j < 1$, ν—коэффициент Пуассона, $\varphi_{jk}(\theta)$—собственные функции задачи с параметром на дуге, получаемые из задачи (1)—(2) после преобразования Меллина по r, c_{kj}—коэффициенты, зависящие от величины правой части, коэффициента Пуассона, раствора угла. В формуле (3) $S = [N(\nu, \omega)]$, где $[N(\nu, \omega)]$—целочисленная функция, принимающая значения, равные количеству корней трансцендентного уравнения (4) в полосе $]0, i[$, $w \in W_2^1(K)^2$, и имеет первые производные (деформации и напряжения), стремящиеся к нулю при стремлении к нулю r. Следует отметить, что если корень ρ_j кратный, то в (3) добавляется присоединенный вектор.

Исследование распределения корней уравнения (4) в интервале $0 < \mathrm{Im}\,\rho_j < 1$ проводилось аналитически и численно с использованием ЭВМ. Распределение корней в зависимости от ω и ν представлено на фиг. 1. Кривые 1 соответствуют корням трансцендентного уравнения (4) при $\nu = 0{,}2$, кривые 2 — при $\nu = 0{,}3269$, кривые 3 — при $\nu = 0{,}4$.

При $\nu > 0{,}3269$ в области $\pi < \omega < 2\pi$ имеется зона, где минимальные корни ρ_1 и ρ_2 уравнения (4) чисто мнимые. При $\nu = 0{,}3269$ эта зона вырождается в точку $\omega = \omega_0$, в которой существуют кратные корни ($\rho_1 = \rho_2$). Из теоремы о неявной функции следует, что в данной точке должны выполняться, кроме равенства (4), также равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\omega\,\mathrm{sh}\rho\omega\,\mathrm{ch}\rho\omega + \frac{2\rho}{3-4\nu}\sin^2\omega = 0$$

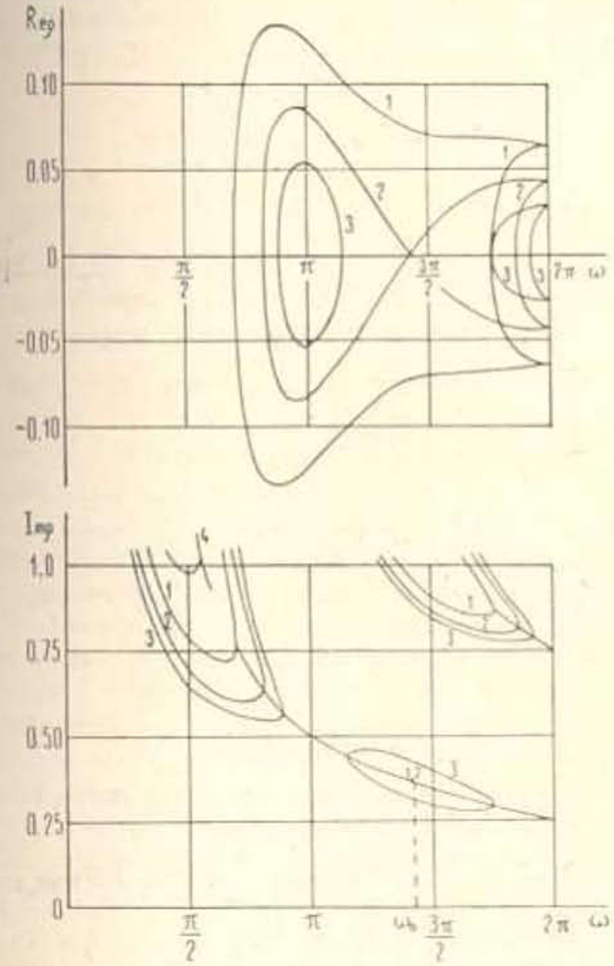
$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = 2\rho\,\mathrm{sh}\rho\omega\,\mathrm{ch}\rho\omega + \frac{2\rho^2}{3-4\nu}\sin\omega\cos\omega = 0$$

Из этих двух равенств находим уравнение для определения величины ω_0:

$$\mathrm{tg}\,\omega_0 = \omega_0$$

При исследовании распределения корней обнаружен эффект нарушения монотонности по ω для минимального корня уравнения (4). В решении (3) этому корню соответствует первый член в асимптотической сумме. Таким образом, показатель сингулярности в главном члене разложения (3) в области $\pi/2 < \omega < \pi$ для $\nu = 0{,}2$; $0{,}3269$; $0{,}4$ при возрастании раствора угла вначале убывает, затем достигает локального минимума и возрастает до кратного корня, а затем переходит из чисто мнимого в комплексный. Аналогичный эффект наблюдается при $\nu > 0{,}3269$ в зоне $\pi < \omega < 2\pi$.

При малых $\nu < 0{,}038$ эффект немонотонности приводит к нарушению сингулярности (фиг. 1, кривая 4). Как видно из поведения кривой 4 ($\nu = 0{,}02$), в интервале $\pi/2 < \omega < \pi$ при возрастании ω главный член



Фиг. 1

асимптотики вначале сингулярен, то есть его первые производные (деформации и напряжения) стремятся к бесконечности при приближении к вершине угла, а затем он становится регулярным ($u \in W_2^2(K')^2$), ρ_j выходит из полосы $0 < \mathrm{Im}\rho_j < 1$. После комплексного ветвления минимального корня ρ_j, быстроосциллирующий главный член асимптотики вновь становится сингулярным.

В заключение необходимо отметить, что на наличие подобного эффекта не указано в известной литературе, посвященной исследованию решений в окрестности угловой точки границы [4, 5]. Кроме того, качественная картина поведения решений в окрестности угловой точки для плоского напряженного состояния, изученная в [6], во многом отличается от случая плоской деформации.

THE EFFECT OF THE NON-MONOTONOUS BEHAVIOUR ON SINGULAR INDEX IN THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELASTICITY IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE ANGLE

V. B. BERKOUN, V. A. POPOV

ԵԶՐԻ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿԵՏԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐՈՒԹՅԱՆ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐԻ ՈՉ ՄՈՆՈՏՈՆ ՎԱՐՔԻ ԷՖԵԿՏԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Բ. ԲԵՐԿՈՒՆ, Վ. Ա. ՊՈՊՈՎ

Ամփոփում

Դիտարկված է սեպի համար առաձգականության տեսության խառը եզրային պայմաններով երկչափ խնդիր՝ հարթ դեֆորմացիայի դեպքում։ Հետազոտված է բնութագրիչ հավասարման սինգուլյար արմատների վարքը։ Հայտնաբերված է սինգուլյար արմատների՝ անկյան մեծությունից ոչ մոնոտոն կախվածության էֆեկտը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.—Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. *16*, с. 209—292.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками.— Math. Nachr., 1977, Bd. 76, s. 29—60.
3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952. 216 с.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1982. 688 с.
5. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension.—J. Appl. Mech., 1952, v. 19, № 4 p. 526—528.
6. *Тер-Акопянц Л. Г.* О корнях характеристических уравнений упругого клина.— Вестник Ленинградского гос. университета, 1983, №7, с. 116—118.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию
31.V.1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ ДАВЛЕНИЯ

АЗАТЯН Л. Д., АВЕТИСЯН Д. К.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального проектирования круглых пластин из композиционного материала, закрепленных в жесткой стенке, при взаимодействии с акустической волной давления.

Предполагается, что пластинка состоит из $2n$ слоев, поочередно армированных в радиальном и окружном направлениях. Элементарные слои, армированные как в радиальном, так и в окружном направлениях, имеют одинаковое содержание армирующего материала в единице объема, то есть упругие характеристики этих слоев в ортогональных направлениях одинаковы. Величина $\xi = k_1/k$ определяет относительную толщину радиально армированных слоев пластинки в пакете.

Принимается, что в акустической среде в направлении оси z движется волна, которая в момент времени $t=0$ достигает поверхности пластинки.

Решается задача нахождения оптимальной пластинки заданного веса из условия

$$\min_{\xi} \max_{t,r} w(t, r, \xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad t \geqslant 0$$

Результаты расчетов показывают, что оптимальным выбором параметра ξ можно существенно увеличить жесткость пластинки.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за № 5057—В 57 от 14 марта 1987 г.

Поступила в редакцию
6.II.1987