ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 536.241

НАГРЕВ СОСТАВНОГО СЛОЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

САРГСЯН А. М.

В работе определяется трехмерное квазистационарное температурное поле в составном слое, нагреваемом двумя точечными источниками тепла постоянной мощности, движущимися с постоянной скоростью параллельно поверхности раздела двух разнородных полубесконечных сред. Через поверхности составного слоя происходит теплообмен с внешней средой постоянной температуры по закону Ньютона. Тепловой контакт между слоями принимается неидеальным. На бесконечности разность температур слоя и среды, а также производные температур исчезают. Для однородного слоя решение этой задачи получено в работе [1].

В предположении постоянства теплофизических характеристик материалов слоев и коэффициентов теплоотдачи с боковых поверхностей температурное поле удовлетворяет уравнению [1]

$$\Delta T_j+\frac{v}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial x}=-\frac{q_j}{\lambda_j}\delta(x-x_j)\delta(y-y_j)\delta(z-z_j)$$

$$|x|<\infty,\ |z|<\delta,\ j=1,\ y>0;\ j=2,\ y<0 \qquad (1)$$

граничным условиям

$$\lambda_j\frac{\partial T_j}{\partial z}=\mp\alpha_j^{\pm}T_j,\quad z=\pm\delta \qquad (2)$$

и условиям на контактной поверхности $y=0$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial y}=\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial y}=\alpha(T_1-T_2) \qquad (3)$$

Здесь T_j—приращение температуры по сравнению с равномерной начальной, $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$, v—скорость движения источников тепла, q_j—мощность источников тепла, λ_j и a_j—коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материалов слоев, (x_j, y_j, z_j)—координаты точек приложения источников тепла, $\alpha_j^{\pm}$—коэффициенты теплоотдачи с боковых поверхностей $z=\pm\delta$, α—контактная проводимость, 2δ—толщина слоев, $\delta(x)$—функция Дирака.

Если на поверхностях $z=\pm\delta$ заданы температура окружающей среды или условия тепловой изоляции, то эти граничные условия получаются из (2) путем предельного перехода $\alpha_j^{\pm} \to \infty$ или $\alpha_j^{\pm} \to 0$. Так как на границах каждого слоя возможны девять различных комбинаций таких условий, то для составного слоя их восемьдесят одно. Соответствующие краевые задачи (из них только двадцать семь независимых) решаются единым методом интегральных преобразований Фурье и предельными переходами.

Применение экспоненциального преобразования Фурье по x и конечного преобразования по z [2] к уравнению (1) и условиям (2) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{T}_j}{dy^2} - (\xi^2 + i\xi p_j + \beta_{jm}) \tilde{T}_j = -\frac{q_j}{2\pi\lambda_j} \frac{K_j(\beta_{jm}, z_j)}{\exp(-i\xi x_j)} \delta(y - y_j) \tag{4}$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) = C_{jm}(\xi) \exp[-|y| b_{jm}(\xi)] + \frac{q_j}{4\pi\lambda_j} \frac{K_j(\beta_{jm}, z_j)}{b_{jm}(\xi)} \times$$
$$\times \exp[i\xi x_j - |y - y_j| b_{jm}(\xi)] \tag{5}$$

В (4) и (5) введены следующие обозначения:

$$\tilde{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) = \int_{-\delta}^{\delta} \overline{T}_j(\xi, y, z) \cdot K_j(\beta_{jm}, z) dz, \quad \overline{T}(\xi, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_j(x, y, z) \exp(i\xi x) dx$$

$$K_j(\beta_{jm}, z) = \frac{[\beta_{jm} \cos \beta_{jm}(\delta + z) + h_j^- \sin \beta_{jm}(\delta + z)] \sqrt{2}}{[h_j^- + (\beta_{jm} + h_j^- h_j^-)(2\delta + h_j^+(\beta_{jm} + h_j^+ h_j^+)^{-1})]^{1/2}}$$

$$b_j(\xi) = (\xi^2 + i\xi p_j + \beta_{jm}^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} b_{jm}(\xi) > 0, \quad p_j = v/a_j$$

β_{jm} — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} 2\delta\beta_{jm} = \beta_{jm}(h_j^+ + h_j^-)(\beta_{jm}^2 - h_j^- h_j^+) \tag{6}$$

Возвращаясь по формуле $\overline{T}_j(\xi, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{T}_j(\xi, y, \beta_{jm}) K_j(\beta_{jm}, z)$ от $\tilde{T}_j(\xi, y, \beta_{jm})$ к $\overline{T}_j(\xi, y, z)$ и удовлетворяя преобразованным контактным условиям, полученным из (3) после применения экспоненциального преобразования Фурье, для определения неизвестных коэффициентов $C_{jm}(\xi)$ получим совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$C'_{1n}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^{(1)}(\xi) C'_{2m}(\xi) + \gamma_n^{(1)}(\xi), \quad C'_{2n}(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}^{(2)}(\xi) C'_{1n}(\xi) + \gamma_n^{(2)}(\xi)$$

$$C'_{1k}(\xi) = C_{1k}(\xi) \sqrt{b_{1k}(\xi)}, \quad C'_{2k}(\xi) = C_{2k}(\xi) b_{2k}(\xi) \tag{7}$$

Учитывая асимптотическое решение трансцендентного уравнения (6)

$$\beta_{jk} = \pi k / 2\delta + (h_j^+ + h_j^-) / \pi k - O(k^{-3})$$

при больших значениях k [3] и метод исследования бесконечных систем, приведенный, например, в работе [4], доказывается, что сумма $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{mn}^{(j)}|$ при больших значениях n стремится к нулю, как $0(1/\sqrt{n})$. Следовательно, бесконечная система (7), свободные члены которой также стремятся к нулю, квазивполне регулярна и ее решение можно получить с любой необходимой точностью методом последовательных приближений.

В частном случае $h_1^{\pm}=h_2^{\pm}=h^{\pm}$ система (7) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решая которую, находим $(h_j=\alpha/\lambda_j)$

$$C_{jm}(\xi)=\frac{2h_j b_{jm}(\xi)A_{(3-j)m}(\xi)+[b_{1m}(\xi)b_{2m}(\xi)+(-1)^j(h_1 b_{1m}(\xi)-h_2 b_{2m}(\xi))]A_{jm}(\xi)}{b_{jm}(\xi)[h_1 b_{2m}(\xi)+b_{1m}(\xi)b_{2m}(\xi)+h_2 b_{1m}(\xi)]}$$

$$A_{jm}(\xi)=\frac{q_j}{4\pi\lambda_j}K_j(\beta_{jm}, z_j)\exp\left[i\xi x_j-|y_j|b_{jm}(\xi)\right] \tag{8}$$

Определяя из (7) или (8) $C_{jm}(\xi)$ для температурного поля будем иметь

$$T_j(x, y, z)=\sum_{m=1}^{\infty} K_j(\beta_{jm}, z)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{ C_{jm}(\xi)\exp[-|y|b_{jm}(\xi)]+$$

$$+\frac{q_j K_j(\beta_{jm}, z_j)}{4\pi\lambda_j b_{jm}(\xi)}\exp[i\xi x_j-|y-y_j|b_{jm}(\xi)]\Big\}\exp(-i\xi x)d\xi \tag{9}$$

Имея фундаментальное решение (9), можно получить температурное поле в составном слое, нагреваемом линейными, плоскими и объемными источниками тепла [5]. Например, температурное поле в составном слое с теплоизолированными поверхностями, возникающее от линейных источников тепла имеет вид

$$T_j(x, y)=\sqrt{2\delta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{ C_{j0}(\xi)\exp[-|y|b_{j0}(\xi)]+\frac{q_j\exp(-i\xi x)}{4\pi\lambda_j b_{jm}(\xi)}\times$$

$$\times\exp[-|y-y_j|b_{j0}(\xi)]\Big\}\exp(-i\xi x)d\xi$$

Полученное решение представляет собой температуру в составной бесконечной пластинке единичной толщины с теплоизолированными поверхностями, нагреваемой двумя линейными источниками тепла [6].

Подставляя в (8) и (9) $p_2=p_1$, $h_j^{\pm}=0$, $q_2/\lambda_2=q_1/\lambda_1$, $x_2=x_1$, $|y_2|=y_1$, $z_2=z_1$, получим

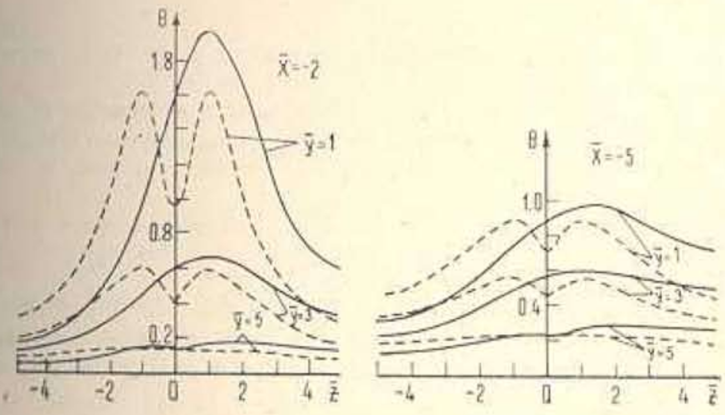
$$T_1(x, y, z)=T_2(x, y, z)=\frac{q_1}{2\pi\delta\lambda_1}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\beta_m(\delta+z)\cos\beta_m(\delta+z_1)\times$$

$$\times\exp[(x-x_1)p_1/2][K_0(\gamma_m r_+)+K_0(\gamma_m r_-)]$$

где $K_0(u)$—функция Макдональда нулевого порядка,

$$\gamma_m=(\beta_m^2+p_1^2/4)^{1/2},\quad r_{\pm}=[(x-x_1)^2+(y\pm y_1)^2]^{1/2},\quad \beta_m=\pi m/2\delta$$

Температурное поле не зависит от условий на контактной поверхности и симметрично относительно этой поверхности. Штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $m=0$ содержит множитель 0,5.



Фиг. 1

Численные расчеты проведены по формуле (10) после перехода к безразмерным величинам $\bar{x}=p_1x$, $\bar{y}=p_1y$, $\bar{z}=p_1z$, $\bar{\delta}=p_1\delta$, $\theta=2\pi\delta\lambda_1T_1/q_1$, $\bar{\beta}_m=\beta_m/p_1$. Результаты расчетов при $\bar{x}_1=p_1x_1=0$; $\bar{y}_1=p_1y_1=0{,}5$; $\bar{z}_1=p_1z_1=1$ представлены на фиг. 1 сплошными линиями. Там же, для сравнения, пунктирными линиями приведены графики распределения температуры, симметричной относительно оси $\bar{z}$.

COMPOSITE LAYER HEATING BY MOVING HEAT SOURCES

A. M. SARGSYAN

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՇԵՐՏԻ ՏԱՔԱՑՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐՆԵՐՈՎ

Ա. Մ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ամփոփում

Որոշված է բաղադրյալ շերտի եռաչափ քվազիստացիոնար ջերմային դաշտը, որը տաքացվում է երկու տարասեռ կիսանվերջ շերտերի բաժանման մակերևույթին զուգահեռ շարժվող ջերմային աղբյուրներով։ Ջերմային կոնտակտը շերտերի միջև ընդունված է ոչ իդեալական։

Շերտերի մակերևույթների միջոցով շրջապատի հետ կատարվող ջերմափոխանակությունը տեղի է ունենում ջերմատվության տարբեր գործակիցներով՝ ըստ Նյուտոնի օրենքի։

Խնդրի լուծումը, որը ստացված է Ֆուրիեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով, բերված է անհայտ գործակիցների նկատմամբ քվազիլիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգերի

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные поля от объемных источников.—Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
2. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.—Киев: Наукова думка, 1976, 282 с.
3. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции.—М.: Наука, 1978. 376 с.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25. №2, с. 15—36.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1971. 512 с.
6. *Саргсян А. М.* Нагрев составной пластинки источниками тепла, движущимися параллельно прямолинейному контакту.—Изв. АН Арм. ССР, серия тех. наук, 1980, №3, с. 52—59.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.X.1987