ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 532.517.4

УСЛОВИЕ ГЕНЕРАЦИИ СОБСТВЕННОГО ВРАЩЕНИЯ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ НА ОБТЕКАЕМОЙ СТЕНКЕ

НИКОЛАЕВСКИЙ В. Н.

Граничное условие для угловой скорости вращения частиц жидкости Коссера задается в форме зависимости от градиента средней поступательной скорости потока, обтекающего стенку. Условие для касательного напряжения оказывается соответствующим представлению Прандтля, суммарно учитывающего линейную ньютонову и турбулентную вязкость. Рассмотрены задачи обтекания стенки неограниченным потоком и течения в плоском канале.

1. В асимметричной механике [1] известна проблема выбора краевого условия для скорости собственного вращения жидких частиц. Ранее предлагались условия полного прилипания, то есть совпадения поступательных и вращательных скоростей частиц потока и обтекаемой стенки [2, 3], а также условие линейной пропорциональности спиновой скорости частицы и средней угловой скорости потока [2]. Ниже формулируется близкое краевое условие, соответствующее применению гидромеханики Коссера для расчета турбулентных потоков. Полученное краевое условие позволяет выразить собственную угловую скорость турбулентных вихрей через локальные параметра течения в месте их генерации, тогда как ранее [4] эта величина определялась через глобальные характеристики (расход) потока.

Будем исходить из идеи о существовании связи между скоростью собственного вращения ω_w вихрей, срывающихся со стенки, шероховатостью e последней, а также градиентом скорости (угловой скоростью Ω среднего потока $(\partial u/\partial n)_w$ и кинематической вязкостью ν. Здесь w — символ значения на стенке. Для системы указанных параметров должна выполняться связь, следующая из требований [5] анализа размерностей

$$\omega_w/(\partial u/\partial n)_w = f(e^2 \partial u/\partial n/\nu) \tag{1.1}$$

В простейшем варианте соотношение (1.1) при $\alpha > 0$ определяет

$$\omega_w = \alpha \frac{e^2}{\nu} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w = -4\alpha \frac{e^2}{\nu} |\Omega|_w \Omega_w \tag{1.2}$$

нелинейное замедление полной скорости вращения $\Phi = \Omega + \omega$ вихря на стенке. Заметим, что условие прилипания $\Phi = 0$ означает $\omega = -\Omega$, а условие [2] имеет вид также линейного условия $\omega = -(1-\alpha)\Omega$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

В гидромеханике Коссера для несжимаемой жидкости напряжения τ_{ij} представляются в виде суммы ньютоновой вязкой части и антисимметричной, определяемой собственным вращением вихрей

$$\tau_{ij}=-p\delta_{ij}+\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+2\rho\gamma\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1.3}$$

Из сопоставления (1.2) и (1.3) для касательного напряжения на обтекаемой стенке получается формула Прандтля [6]

$$\frac{\tau}{\rho}=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w+2\gamma\omega_w=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w+\frac{\gamma}{\nu}\alpha e^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w \tag{1.4}$$

которая здесь выступает в форме краевого условия, тогда как внутри потока выполняется линейный закон (1.3). Знаменитая прандтлева длина смешения l согласно (1.4) выражается через меру шероховатости и отношение сдвиговой и вращательной ν, γ вязкостей

$$l=e\sqrt{\alpha\gamma/\nu} \tag{1.5}$$

$$\nu_t=l^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w=\alpha\frac{\gamma}{\nu}e^2\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|_w$$

и имеет масштаб ламинарного подслоя, при потери устойчивости которого и генерируется турбулентный вихрь [7]. Здесь ν_t — турбулентная вязкость, которая здесь действует только на самой стенке.

Система уравнений движения помимо закона (1.3) включает в себя [8] уравнения несжимаемости, количества движения и момента количества движения, а также эволюции момента инерции J

$$\partial u_i/\partial x_i=0 \tag{1.6}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i\partial x_j}+2\gamma\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}[J(\Omega_i+\omega_i)]+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}[J(\Omega_i+\omega_i)]=\frac{\partial\mu_{ij}}{\partial x_j}+2\gamma\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jkl}\omega_l \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}+u_j\frac{\partial J}{\partial x_j}=\xi\frac{\partial^2 J}{\partial x_j\partial x_j} \tag{1.9}$$

причем моментные напряжения μ_{ij} будем считать пропорциональными градиенту момента количества $M_i=\rho J(\Omega_i+\omega_i)$, $\Omega=1/2\varepsilon_{ijk}\partial u_j/\partial x_k$

$$\mu_{ij}=\xi(\Omega_i+\omega_i)\frac{\partial J}{\partial x_j}+2\gamma J\frac{\partial}{\partial x_j}(\Omega_i+\omega_i) \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим стационарное обтекание бесконечной пластины при нулевом продольном градиенте давления $\partial p/\partial x=0$, где $x=x_1$. При этом $u_1=u(y)$, где $y=x_2$, $u_2=0$, $\omega_3=\omega(y)$, $\Omega=-1/2(\partial u/\partial y)$ и система уравнений движения упрощается

$$\frac{d}{dy}\left(\nu\frac{du}{dy}+2\gamma\omega\right)=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\xi\left(-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+\omega\right)\frac{dJ}{dy}+2\eta J\frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{2}\frac{du}{dy}+\omega\right)\right]=4\gamma\omega \qquad (2.2)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\xi\frac{dJ}{dy}\right)=0 \qquad (2.3)$$

Последнее уравнение дает закон расширения вихря по мере его удаления от стенки

$$J(y)=Ay+J_w \qquad (2.4)$$

а исключение скорости u из уравнений (2.1), (2.2) сводит последние к уравнению Бесселя

$$z\frac{d^2\omega}{dy^2}+\left(1+\frac{\zeta}{2\eta}\right)\frac{d\omega}{dy}-\beta^2\omega=0 \qquad (2.5)$$

$z=(Ay+J_w)/A$, решение которого имеет следующий вид:

$$\omega=z^{\lambda/2}[C_1I_\lambda(2\beta z^{1/2})+C_2K_\lambda(2\beta z^{1/2})] \qquad (2.6)$$

если $\beta^2=2\gamma/[\eta(\nu-\gamma)A]>0$, $\lambda=-\zeta/2\eta$. Когда $J=J_w$, уравнение (2.5) упрощается

$$\frac{d^2\omega}{dy^2}=k^2\omega, \qquad k^2=\beta^2\frac{A}{J_w} \qquad (2.7)$$

и дает экспоненциальное затухание вращения

$$\omega=\omega_w\exp(-ky) \qquad (2.8)$$

Из решения (2.6) при $C_1=0$ следует ($A\neq0$, $\lambda=1$) асимптотическое распределение

$$\omega=C_2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\exp(-2\beta\sqrt{z}) \qquad (2.9)$$

определяющее несколько более слабое затухание с расстоянием от стенки.

Уравнение баланса количества движения (2.1) имеет первый интеграл

$$\frac{du}{dy}+2\frac{\gamma}{\nu}\omega=\frac{\tau}{\rho\nu} \qquad (2.10)$$

Второе интегрирование приводит к профилю скорости

$$u=\frac{\tau}{\rho\nu}y-\frac{2\gamma}{\nu}\frac{\omega_w}{k}(1-\exp(-ky)) \qquad (2.11)$$

удовлетворяющему условию $u_w=0$. Величину ω_w определим из условия (1.2), что дает

$$\omega_w\approx\frac{\tau^2}{\rho^2}\alpha\frac{e^2}{\nu^2}\frac{\gamma}{\nu}\theta, \qquad \theta=\operatorname{sgn}\frac{du}{dy} \qquad (2.12)$$

Отсюда, при фиксированном напряжении τ профиль u вблизи стенки более пологий, чем ламинарный, а при одинаковом профиле u поток по Коссера требует большего сдвигающего усилия.

3. При установившемся течении в канале ширины $2a$ градиент давления $\partial p/\partial x=\rho h=\text{const}\neq 0$ и уравнения (1.7) и (1.8) принимают вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}+2\gamma\omega\right)=0 \tag{3.1}$$

$$\eta\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\omega-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\gamma}{J}\omega,\quad J=J_w \tag{3.2}$$

что приводит к интегралам

$$\nu\frac{du}{dy}+2\gamma\omega=yh+C \tag{3.3}$$

$$\omega=\omega_w\frac{\operatorname{sh}yk}{\operatorname{sh}ak} \tag{3.4}$$

Удовлетворение краевым условиям (1.2), $u=0$ при $y=\pm a$ и условию симметрии дает решение

$$\frac{2\gamma}{\nu}\omega\approx 2\frac{a^2\gamma\alpha e^2}{\nu^4}h^2\theta,\quad \theta=\operatorname{sgn}h=-1 \tag{3.5}$$

$$u=-\frac{ha^2}{2\nu}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)+2\frac{a^2\gamma\alpha}{\nu^4 k}h|h|\operatorname{cth}ak\left(1-\frac{\operatorname{ch}yk}{\operatorname{ch}ak}\right) \tag{3.6}$$

причем для расхода Q получаем

$$Q=\int_{-a}^{a}u\,dy=-\frac{2}{3}\frac{a^3}{\nu}h\left[1-|h|\frac{6\gamma\alpha e^2}{\nu^3 k}\left(\operatorname{cth}ak-\frac{1}{ak}\right)\right] \tag{3.7}$$

С ростом ширины канала эффект второго слагаемого уменьшается, но в отличие от линейной постановки [3] с ростом перепада давления его роль растет.

Разрешая (3.7) относительно градиента давления, получим формулу

$$-h=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{3}{2}\frac{\nu}{a^3}Q+\frac{27}{2}\alpha\frac{\gamma}{a^6 k}\left(\operatorname{cth}ak-\frac{1}{ak}\right)Q^2 \tag{3.8}$$

соответствующую гидравлическому закону сопротивления канала турбулентному потоку.

Для совпадения расчетного и экспериментально наблюдаемых профилей скорости u повидимому требуется использование нелинейных определяющих законов, см. [8, 9], а не только граничного условия, или (и) выделения ламинарного подслоя, который соответствует вводимой иногда скорости «скольжения» на стенке, см. [4, 10].

THE CONDITIONS OF GENERATION OF FLUID PARTICLES OWN ROTATION AT A WALL, BOUNDING THE STREAM

V. N. NIKOLAEVSKY

ՇՐՋՀՈՍՎՈՂ ՊԱՏԻ ՎՐԱ ՀԵՂՈՒԿ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՊՏՏՄԱՆ ՎԵՐԱՐՏԱԴՐՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆԸ

Վ. Ն. ՆԻԿՈԼԱԵՎՍԿԻ

Ամփոփում

Կոսերի հեղուկի մասնիկների պտտման անկյունային արագության համար եզրային պայմանը տրվում է պատը շրջհոսող հոսքի համընթաց միջին արագության գրադիենտից կախվածության տեսքով։ Շոշափող լարման համար պայմանը համապատասխանում է Պրանդտլի ներկայացմանը, որը գումարային ձևով հաշվի է առնում նյուտոնյան և մոլկային մածուցիկությունը։ Դիտարկված են անսահմանափակ հոսքով պատի շրջհոսման խնդիրները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика.— ПММ, 1964, т. *29*, вып. 2.
2. *Мигун Н. П., Прохоренко П. П.* Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости. Минск: Наука и техника, 1984.
3. *Петросян Л. Г.* Некоторые вопросы механики жидкости с несимметричным тензором напряжений. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984.
4. *Николаевский В. Н., Искандеров Д. Ш., Коржов Е. Н.* Турбулентная жидкость как сплошная среда с внутренней структурой. В сб.: «Тр. 3 Всесоюзн. Семинара по моделям сплошной среды». Новосибирск: Вычислит. Центр СО АН СССР, 1976.
5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
6. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. Пер. с нем. М.: Изд-во Иностр. лит. 1951.
7. *Кантуэлл Б. Дж.* Организованные движения в турбулентных потоках. Пер. с англ.—В сб.: «Вихри и волны», М.: Мир, 1984.
8. *Николаевский В. Н.* Пространственное осреднение и теория турбулентности.— В сб.: «Вихри и волны», М.: Мир, 1984.
9. *Бабкин В. А.* Турбулентный поток между параллельными плоскими стенками как течение анизотропной жидкости.—ПММ, 1985, т. *49*, вып. 3.
10. *Хейнлоо Я. Л.* Феноменологическая механика турбулентных потоков. Таллин: Валгус, 1984.

Институт физики Земли АН СССР

Поступила в редакцию
24.VII.1985