

УДК 537.84

## ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ БИСТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ МАГНИТНЫХ И ПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ

БАГДОЕВ А. Г., ГУРГЕНЯН А. А.

В настоящее время большое внимание уделяется вопросу взаимодействия нелинейных волн в связи с созданием акустических приборов для генерации и излучения мощных волновых пучков. Особый интерес представляют резонаторы, в которых происходит взаимодействие пучков. Подобные устройства, имеющие многоволновой характер, изучаются в акустике и оптике, где нелинейность приводит к явлению бистабильности, имеющему важное значение для практики.

В настоящей работе исследуется влияние магнитного поля на волновые движения магнитной или проводящей жидкости с пузырьками газа, находящихся в осевом магнитном поле при наличии встречных пучков. Подобная задача представляет интерес для изучения акустических свойств магнитной жидкости, находящейся в резонаторе, при этом наличие пузырьков приводит к дисперсии скорости звука и позволяет применять метод медленно-меняющихся амплитуд так, как применяется в оптике [10]. Магнитная жидкость оказывается хорошим средством для усиления модуляции пучков и бистабильности, то есть наличие скачка частоты происходит при весьма небольших амплитудах ультразвуковых, входящих в резонатор, волн.

Как показано в [1—3], для анализа нелинейных волн в акустическом резонаторе, используя метод медленно-изменяющегося профиля и метод усреднения уравнений для быстропериодических колебаний, можно представить колебания в виде суперпозиции двух встречных волн, причем в первом порядке можно считать уравнения независимыми.

Уравнения для встречных пучков берутся в форме уравнения коротких волн [4—6], где рассмотрен случай одной волны.

### § 1. Уравнения коротких волн для магнитной жидкости

Полагая, что проекция возмущенной скорости частицы на ось пучков  $u = u_1(\tau_1, y, t) - u_2(\tau_2, y, t)$ , где  $\tau_{1,2}$  — эйконалы пучков, причем  $\tau_{1,2} = (\pm x + l)/H_1 - t$ ,  $y$  — координата по нормали к оси пучка, вдоль которого направлена ось  $x$ , отсчет  $x$  ведется от середины резонатора,  $x = \pm l$  — координаты акустических зеркал (рефлектор);  $H_1$  — линейная

скорость распространения волны, вышеуказанные уравнения можно записать в виде [4—6]

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t \partial \tau_{1,2}} - \frac{1}{2} L(u_{1,2}) = \mp \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \tau_{1,2}} \left( \Gamma u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}} + D \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^2} + E \frac{\partial^3 u_{1,2}}{\partial \tau_{1,2}^3} \right) \quad (1.1)$$

Здесь  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $E$  — коэффициенты нелинейности, диссипации и дисперсии,  $L(u)$  — оператор по поперечным координатам, причем, при магнитном поле, направленном по оси  $x$ , имеет место

$$L(u) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} \left( \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

где  $y$  — радиальная координата в задаче с осевой симметрией ( $k=1$ ), или декартова координата для плоской задачи ( $k=0$ ),  $\alpha$  — частота невозмущенной волны,  $(\alpha_1, \alpha_2)$  — волновые векторы, которые в силу того, что ось пучка совпадает с осью  $x$  и волны близки к плоским, имеют координаты  $\alpha_1 \approx 1/H_1$ ,  $\alpha_2 \approx 0$ .

Для электропроводящей жидкости значения всех величин даны в [4—6], где обосновывается метод конкретизации коэффициентов уравнения (1.1) с помощью уравнения совместности на волне.

Получим коэффициенты (1.1) для магнитной непроводящей жидкости с пузырьками газа. Уравнения движения имеют вид [7—9]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta v = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \rho \nabla \left( \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \\ \operatorname{rot} H = 0, \quad \nabla(\mu H) = 0, \quad \rho = \rho_f(1 - \beta), \quad \frac{1 - \beta}{\beta \rho_g} = \text{const} \quad (1.3) \\ p_g = p - \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} + \rho R \frac{d^2 R}{dt^2} + 4 \frac{\nu}{R} \rho \frac{dR}{dt} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \\ \rho_f = \text{const} \end{aligned}$$

где принято  $\beta \rho_g \ll \rho_f(1 - \beta)$ .

Система уравнений для смеси магнитной жидкости и газа записана для односкоростного приближения [9], связь давления в пузырьке  $p_g$ ,  $p$  взяты из [8, 9],  $\rho_f$  — плотность жидкости, газ считается полнотропным,  $R$  — радиус пузырька,  $H$  — магнитное поле,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\beta$  — концентрация пузырьков,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Для конкретизации коэффициентов в (1.1) следует написать обобщенные уравнения совместности на волне. Следуя [5], можно в (1.3) заменять  $\partial/\partial t \rightarrow -\lambda \delta$ ,  $\nabla \rightarrow \vec{n} \delta$ , где  $\lambda = c_n + v_n$ ,  $\delta$  — скачок производных по нормали к волне,  $\vec{n}$  — единичный вектор по нормали к волне. Включая в уравнения совместности малые члены с дисперсией и диссипацией, можно получить соотношения

$$\delta \rho = \frac{\rho}{c_n} \delta v_n, \quad \delta H_t = 0, \quad \delta H_n = \frac{H_n}{\mu \rho_f} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \delta \rho, \quad \delta p_g = a^2 \delta \rho, \quad \delta R = - \frac{R}{3n \rho_g} \delta p_g \quad (1.4)$$

33

$$c_n^2 = a^2 - \frac{2-\beta}{\rho_f} \frac{H^2}{8\pi} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} + \frac{2-\beta}{\rho_f} \frac{H_n^2}{4\pi\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{R^2 a^2 C_n^3}{3np_g} \frac{\delta^2 v_n}{\delta v_n} - \frac{4\nu a^2 C_n^2}{3np_g} \frac{\delta^2 v_n}{\delta v_n} \quad (1.5)$$

где  $a^2 = np_g / \beta \rho_f (1-\beta)$  — квадрат скорости звука,  $c_n + v_n = H_1 + (\gamma+1)v_n$  — нелинейная скорость волны с учетом того, что  $C_n = H_1 = 1/\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ . Из (1.5) при отсутствии нелинейности, дисперсии и диссипации получится дисперсионное уравнение

$$1 - \frac{2-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f} \left( \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} \right)^2 (\alpha_1 H_{x_0} + \alpha_2 H_{y_0} + \alpha_3 H_{z_0})^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \left[ a_0^2 - (2-\beta_0) \frac{H_0^2}{8\pi\rho_f} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} \right] \quad (1.6)$$

Поскольку ось  $x$  направлена по нормали к волне, можно считать  $\alpha_{2,3} \approx 0$  и получать коэффициенты в  $L$ .

С учетом того, что  $H_{y_0} = H_{z_0} = 0$ , получится  $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$

$$-D_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} = H_1 \chi, \quad D_0 = \chi + \frac{2-\beta_0}{4\pi\mu_0\rho_f} H_0^2 \left( \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} \right)^2 \quad (1.7)$$

$$\chi = a_0^2 - \frac{H_0^2}{8\pi} \frac{2-\beta_0}{\rho_f} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_3^2}$$

Из уравнения (1.5) получится

$$c_n + v_n = H_1 + (\gamma+1)v_n + D \frac{\delta^2 v_n}{\delta v_n} + E \frac{\partial^2 v_n}{\partial v_n} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma+1 = & \frac{a_0}{H_1} a^0 - \frac{2-\beta_0}{2H_1^2} \frac{H_0^2}{8\pi\rho_f} \left[ \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} - (2-\beta_0) \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^3} - \frac{2}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 6(2-\beta_0) \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \left( \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \beta_0^2} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_0}{\partial \beta_0} \right) \right] \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$D = -\frac{2\nu}{3\beta_0(1-\beta_0)H_1}, \quad E = \frac{R_0^2}{6\beta_0(1-\beta_0)H_1}, \quad \Gamma = \gamma+1, \quad a^0 = \frac{1}{\beta_0} \quad (1.10)$$

Для электропроводящей жидкости получится, соответственно, вместо (1.5)

$$c^4 - c^2 (a_0^2 + a_1^2) + a_0^2 a_1^2 \frac{H_x^2}{H^2} = 0 \quad (1.11)$$

$$\gamma+1 = -a^0 \frac{C^2 - a_1^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2C^2} + \frac{3}{2} \frac{a_0^2 - C^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2C^2}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} = \frac{C^3}{a_0^2 + a_1^2 - 2C^2}, \quad a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad H_1 = C$$

Поскольку  $H_x \approx H$ ,  $C = a_0$ ,  $C = a_1$  на оси пучка и для  $C = a_0$

$$\gamma+1 = \frac{1}{\beta_0}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} = \frac{a_0^3}{a_1^2 - a_0^2}$$

Таким образом, получено нелинейное уравнение коротких волн для магнитной или электропроводящей жидкости.

## § 2. Уравнения для медленно-меняющихся амплитуд и фаз

Для квазимонохроматических пучков решение уравнения (1.1) можно искать в виде [4]

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} [U_{1,2}^{(0)} + U_{1,2}^{(1)} \exp(-\nu_1 \alpha^2 t + i\theta_{1,2}) + U_{1,2}^{(2)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t + 2i\theta_{1,2})] \quad (2.1)$$

Здесь  $U_{1,2}^{(0,1,2)}$  — амплитуды гармоник и зависят от  $\tau'_{1,2}$ ,  $y$ ,  $\tau'_{1,2} = (\pm x + l)/H_1$ ,  $\theta_{1,2} = \alpha \tau'_{1,2} - \omega t$  — фаза с учетом малой частоты  $\omega$  за счет дисперсии,  $\alpha$  — основная частота.

Подставляя (2.1) в (1.1) и приравнявая слагаемые при гармониках и в силу стационарности пучков, принимая  $\partial U / \partial t = \partial U / \partial \tau'_{1,2}$ , можно получить формулы для возмущенной частоты  $\omega$ , затухания  $\nu_1$  в функции от основной частоты  $\alpha$  и уравнение модуляции для стационарных пучков

$$\omega = -\frac{E}{H_1} \alpha^2, \quad \nu_1 = -\frac{D}{H_1} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U_{1,2}^{(0)}}{\partial \tau'_{1,2}} (i\alpha + 2\nu_1 \alpha^2 + 3i\omega) - L(U_{1,2}^{(0)}) = \pm \frac{\Gamma}{2H_1} \alpha^2 U_{1,2}^{(2)} \bar{U}_{1,2}^{(0)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t) \quad (2.3)$$

$$U_{1,2}^{(2)} (4i\nu_1 \alpha^2 - 12\alpha\omega) + \frac{\partial U_{1,2}^{(2)}}{\partial \tau'_{1,2}} (2i\alpha + 10\nu_1 \alpha^2 + 30i\omega) - L(U_{1,2}^{(2)}) = \pm \frac{\Gamma}{H_1} \alpha^2 U_{1,2}^{(0)*} \quad (2.4)$$

Пусть  $\omega \ll \alpha$ , однако,  $\omega t \gg 1$ , где  $t$  — характерное время,  $t \approx x/H_1$ . Тогда слагаемыми с производными от второй гармоники можно пренебречь, и (2.3), (2.4) примут вид

$$U_{1,2}^{(2)} = \pm \frac{\Gamma \alpha}{H_1 (4i\nu_1 \alpha^2 - 12\omega)} U_{1,2}^{(0)*} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{1,2}^{(0)}}{\partial \tau'_{1,2}} (i\alpha + 2\nu_1 \alpha^2 + 3i\omega) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^2 U_{1,2}^{(0)}}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial U_{1,2}^{(0)}}{\partial y} \right) = \\ = \pm \frac{\Gamma \alpha^3}{8H_1 (i\nu_1 \alpha^2 - 3\omega)} U_{1,2}^{(0)*} \bar{U}_{1,2}^{(0)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t) \end{aligned}$$

или после подстановки  $U = ae^{i\tau}$  получим одинаковые по форме уравнения для обоих пучков

$$-a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau'} \left( 1 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) + \frac{\partial a}{\partial \tau'} 2\nu_1 \alpha - \frac{1}{2\alpha x_1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \left[ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{k}{y} \frac{\partial a}{\partial y} - a \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^2 \right] = \chi_1 a^3 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau'} \left( 1 - \frac{3}{H_1} E x^2 \right) + 2a\nu_1 \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \tau'} - \frac{1}{2\alpha x_1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \left[ a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + a \frac{k}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \chi_2 a^3$$

где обозначено  $\chi_1 = 3E x^2 \tau'$ ,  $\chi_2 = -\nu_1 \alpha H_1 \tau'$

$$\xi = \frac{\Gamma^2 \alpha}{8H_1(9E^2 \alpha^2 + \nu_1^2 \alpha^2 H_1^2)} \exp(-2\nu_1 \alpha^2 t)$$

В предположении малости линейной диссипации в левых частях полученной системы уравнений и в экспоненте при наличии симметричных относительно  $x=0$  граничных условий можно считать с точностью до постоянного слагаемого  $a$  четной функцией, а  $\varphi$  — нечетной функцией от  $x$ , можно получить решение узких пучков для (2.6) в виде [4, 6]

$$a = \frac{K}{f(\bar{\tau})} \exp(-y^2/y_0^2 f^2), \quad \varphi = \alpha(\bar{\tau}) + \frac{1}{2R_0^*} y^2, \quad \bar{\tau} = \alpha \tau', \quad \tau' = \frac{-|x| + l}{H_1} \quad (2.7)$$

$\frac{H_1}{R_0^* \alpha}$  — кривизна волны.

Для импульсных пучков амплитуда  $K$  в начальном сечении зависит от  $t$ , а окончательное решение будет содержать  $K(-\bar{\tau})$  и кривые  $f(\bar{\tau})$  движутся со временем.

Уравнения (2.6) в приближении узких пучков для случая осевой симметрии [4—6] удовлетворяются и получится для безразмерной ширины пучка

$$\frac{d^2 f}{d\bar{\tau}^2} = \frac{\bar{\xi}}{f^3}, \quad \bar{\xi} = -\frac{4K^2 \nu_1 \mu}{\alpha} \lambda_1 + 4\nu_1^2 \mu^2, \quad \lambda = \frac{1}{\alpha H_1^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2}, \quad \mu = \frac{H_1^2}{\alpha^2 y_0^2} \quad (2.8)$$

Решения уравнения (2.8) при граничных данных  $\bar{\tau}=0, f=1$

$$\frac{df}{d\bar{\tau}} = -\frac{1}{R_0^*(0)} \frac{1}{\alpha \alpha_1} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} - \gamma_2 K^2$$

запишется в следующей форме, где последнее соотношение получено из (2.6)

$$-\bar{\tau} = \frac{\sqrt{C' f^2 - \bar{\xi}}}{C'} - \frac{\sqrt{C' - \bar{\xi}}}{C'}, \quad C' = \left( \frac{1}{R_0^*} \frac{H_1^2}{\alpha^2} \lambda + \frac{\gamma_2 K^2}{H_1^2 \alpha^3} \right)^2 + \bar{\xi} \quad (2.9)$$

Из полученного решения и (2.8) видно, что фокус  $f=0$  будет при  $\bar{\xi} < 0$ , а последнее возможно при  $\lambda > 0$  и в предположении, что первое слагаемое  $\bar{\xi}$  или нелинейность больше дифракции. Это выполнено для медленных магнитозвуковых волн [5]. Схождение пучка будет также при  $\lambda < 0, 1/R_0^* < 0$ , но фокус не получится.

### § 3. Расчет звукового интерферометра

Для получения  $\sigma$  следует приравнять в первом уравнении (2.6) члены порядка 1 (не содержащие  $y$ ).

Тогда получится в главном порядке с учетом  $E\alpha^2/H_1 \ll 1, \nu_1 \alpha \ll 1$  уравнение

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\tau} = \frac{2}{\alpha_1 \alpha^2} \frac{1}{f^2 y_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\gamma_1 K^2}{f^2} \quad (3.1)$$

Допустим, что  $\bar{\xi} > 0$ , то есть дифракция больше, чем нелинейность,

тогда кривизна кривой  $f(\tilde{\xi})$  больше нуля и имеется для пучков фокальное пятно

$$f_{\text{фо}}^2 = \frac{\tilde{\xi}}{C'}, \quad \tilde{\xi}_{\text{фо}} = \frac{\sqrt{C' - \tilde{\xi}}}{C'} \quad (3.2)$$

Для того, чтобы имелся гладкий переход пучков при  $x=0$ , значения  $\tilde{\xi}_{\text{фо}}$  для них должны совпадать, откуда следует  $\frac{l+x_{\text{фо}}}{H_1} = \frac{l-x_{\text{фо}}}{H_1} = \frac{\sqrt{C' - \tilde{\xi}}}{\alpha C'}$ ,  $x_{\text{фо}}=0$ , тогда (2.9) примет вид

$$\pm \frac{\alpha x}{H_1} = \frac{\sqrt{C' f^2 - \tilde{\xi}}}{C'}$$

откуда найдем

$$f^2 = \frac{\tilde{\xi}}{C'} + \alpha^2 \frac{C' x^2}{H_1^2}, \quad f_0^2 = \frac{\tilde{\xi}}{C'} \quad (3.3)$$

Для левого пучка  $x' = (x+l)/H_1$  уравнение (3.1) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{A'}{H_1 f^2}, \quad A' = \frac{1}{\alpha x_1} \frac{\partial}{\partial y_0^2} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_2^2} - \gamma_3 K^2$$

или для обоих пучков

$$\frac{d\sigma_{1,2}}{dx} = \pm \frac{A'}{H_1 f_0^2 \left(1 + \frac{C' \alpha^2}{\tilde{\xi} H_1^2} x^2\right)}, \quad A' < 0 \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения запишется

$$\sigma_{1,2} = \pm \frac{A'}{H_1 f_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\xi} H_1^2}{C'^2 \alpha^2}} \arctg \sqrt{\frac{C'^2 \alpha^2}{\tilde{\xi} H_1^2}} x + \sigma_{01,2}$$

или

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{A'}{H_1 f_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\xi} H_1^2}{C'^2 \alpha^2}} \arctg \sqrt{\frac{C'^2 \alpha^2}{\tilde{\xi} H_1^2}} x + \Delta \quad (3.5)$$

где постоянная  $\Delta$  находится из того, что при  $x=l$  для резонатора суммарная фаза равна нулю [10]  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{\alpha}{H_1} l$ .

Значение  $1/2(\sigma_1 - \sigma_2)$  при  $x=-l$  равно

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{\alpha}{H_1} l - \frac{2A'}{H_1 f_0^2} \sqrt{\frac{\tilde{\xi} H_1^2}{C'^2 \alpha^2}} \frac{\pi}{4} \quad (3.6)$$

Следует работе [10], где рассмотрена круговая поляризация, для звуковой волны, имеющей почти линейную поляризацию по оси  $x$  ( $v \parallel x$ ), можно записать аналогичные соотношения на зеркалах

$$|u_2|^2 = R |u_1|^2 \quad (3.7)$$

$$(1-R)K_0^2 = u_1^2 + Ru_2^2 - 2Ru_1u_2$$

Первое соотношение означает равенство мощности отраженной волны  $|u_2|^2$  значению мощности падающей  $|u_1|^2$ , умноженной на квадрат коэффициента отражения, второе есть равенство скорости частиц прямой волны  $u_1$  скорости частиц прошедшей части начальной волны  $K_0\sqrt{1-R}$  плюс скорости частиц отраженной части обратной волны

$$u_1 = K_0\sqrt{1-R} + u_2\sqrt{R}, \quad K_0 = |K_0|\cos\alpha$$

Для коэффициента пропускания интерферометра Фабри-Перо принято полагать [10]

$$P = \frac{|u_1|^2(1-R)}{|K_0|^2} \quad (3.8)$$

Поскольку  $u_1 = |u_1|\cos\Phi_1$ ,  $u_2 = |u_2|\cos\Phi_2$ ,  $\Phi_{1,2} = (-\omega t + \alpha\tau_{1,2} + \varphi_{1,2})$ , можно получить уравнение

$$|K_0|^2(1-R)\cos^2\Phi_0 = |u_1|^2\cos^2\Phi_1 + R^2|u_2|^2\cos^2\Phi_2 - 2\sqrt{R}|u_1||u_2|\cos\Phi_1\cos\Phi_2 \quad (3.9)$$

Интегрируя это уравнение по  $\alpha t$  от 0 до  $2\pi$ , можно найти  $|u_1| = K$

$$(1-R)|K_0|^2 = |u_1|^2 \left[ (1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right] \quad (3.10)$$

Пропускная способность, определяемая по формуле (3.8), примет вид

$$P = \left[ 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2} \right]^{-1} \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) значение  $\frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) - \frac{\alpha l}{H_1}$  и учитывая, что для конфокальных зеркал имеет место [10]

$$f_0^2 = \frac{\alpha^2}{4H_1^2} \{2l(2R' - 2l), \quad R' = |R_0^*| \frac{\alpha}{H_1} = 2l, \text{ можно получить}$$

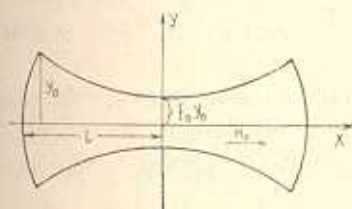
$$P = \left[ 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\delta + F(x')) \right]^{-1} \quad (3.12)$$

$$\delta = -\frac{2\alpha l}{H_1}, \quad F(x') = -\frac{\pi}{4} \frac{2 \pm x'}{\sqrt{1 \pm x'}}, \quad x' = \frac{\chi_1 K^2}{\alpha \mu |\lambda|} \quad (3.13)$$

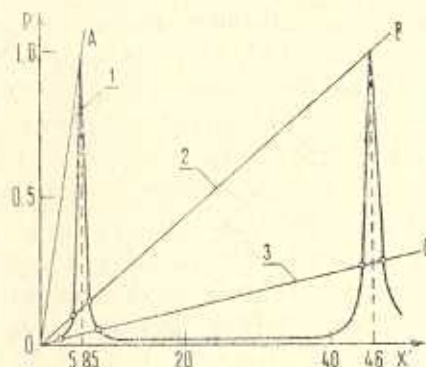
Уравнения (3.12), (3.13) дают неявные значения для  $x'$ . Следует отметить, что уравнение (3.12) с точностью до значения  $x'$  в зависимости от  $K$  совпадает с уравнением [10].

Ход пучков указан на фиг. 1, где принято  $\bar{\xi} > 0$ , что выполнено для сред  $\lambda < 0$ , например, для непроводящей магнитной жидкости с пузырьками газа, в которой при малых  $\beta$  можно считать  $\mu = \mu_f + \frac{3(1-\mu_f)\beta}{1+2\mu_f}$ ,  $\frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2} = 0$  [7]. Для электропроводящей немагнитной сме-

си  $\lambda > 0$  для медленных и  $\lambda < 0$  для быстрых магнитозвуковых волн. При этом для  $a_0 < a_1$  медленная волна есть звуковая и имеет место (1.11), и поскольку  $\bar{\xi} < 0$ , требуется выполнение  $x' < 1$ . При выполненных соотношениях нет фокусировки и обеспечена равномерная работа интерферометра.



Фиг. 1



Фиг. 2

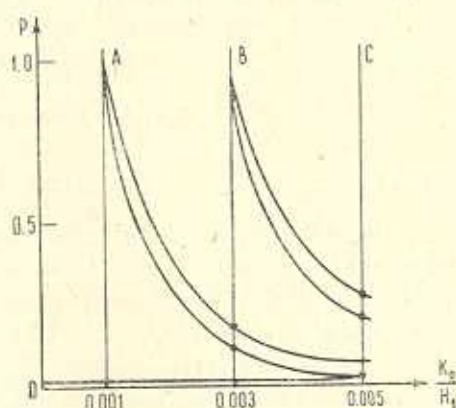
При больших  $K_0$  левая часть (3.12), являющаяся прямой линией (фиг. 2), имеет несколько пересечений с функцией, даваемой правой частью, что приводит к возможным многим амплитудам в интерферометре, приводя к появлению бистабильности [10, 11]. При  $\frac{\partial^2 a_1}{\partial a_2^2} > 0$  имеется критическое значение  $x' = 1$ , при котором достигается фокус.

Для выяснения влияния магнитного поля на появление бистабильности напомним  $x'$  в развернутой форме

$$x' = \frac{\beta_0(1-\beta_0)y_0^2}{4R_0^2} \left\{ \frac{a_0}{H_1} a_0 + \frac{2-\beta_0}{v_f} \left( \frac{\partial p_0}{\partial \beta_0} \right)^2 \right\} \times \left[ \frac{2}{v_0} + \frac{6(2-\beta_0)}{v_0^2} \right] \xi_1 \xi_2^2 \frac{K^2}{a_0^2} \quad (3.14)$$

где обозначено  $\frac{a_0}{H_1} = \xi_1$ ,  $\frac{H_0^2}{4\pi\rho_0} a_0^2 = \xi_2$ .

Вычисление пропускной способности  $P$  интерферометра в зависимости от мощности падающей волны  $K^2$  или  $K_0^2$  представлены на фиг. 2 и 3.



Фиг. 3

Расчеты показывают, что для магнитной жидкости с пузырьками газа при увеличении напряженности внешнего магнитного поля ( $\xi_2$ ) явление бистабильности уменьшается, то есть увеличивается мощность падающей волны  $K$ .



В случае проводящей жидкости, для которой  $x'$  принимает более простой вид

$$x' = \frac{(1-\beta_0)(\xi_2-1)y_0^2}{4\beta_0 K_0^2} K^2, \quad \xi_2 = a_1^2/a_0^2 \quad (3.15)$$

следует, что при  $a_0 > a_1$ , то есть для быстрой магнитозвуковой волны,  $\xi_2 < 1$  — явление аналогично магнитным жидкостям. В самом деле, когда  $\xi_2 = 0$  ( $H=0$ ), требуются меньшие мощности для появления бистабильности, чем при  $\xi_2 = 0.5$  ( $H \approx 10^4$  Гц).

Для медленной магнитозвуковой волны, то есть при  $a_0 < a_1$  в (3.13) берутся нижние знаки и  $x' < 1$ , поэтому  $K$  мало и при увеличении  $\xi_2$  уменьшается мощность  $K^2$ , то есть магнитное поле усиливает бистабильность.

Таким образом, как и в [10], с помощью акустических зеркал, между которыми находится магнитная или проводящая жидкость с пузырьками газа, можно получить преобразователь частот, «транзистор», ограничитель мощности.

## THE STUDY OF NONLINEAR BISTABILITY FOR ELECTROCONDUCTING AND MAGNETIC FLUIDS

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

ԱՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՐԿԼԱՍՏԱՏՈՒՅՈՒԹՅԱՆ ԵՐԵՎՈՒՅՅՈՒ ՌԵՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒՄԸ  
ԳԱԶԻ ՊՂՊԶԱԿՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱԿԱՆ ՍԵՂՆԱԿՆԵՐԻ  
ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿՆԵՐՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԳՈՅԵՎ, Ա. Ա. ԳՈՒՐԳԵՆՅԱՆ

### Ա մ փ ո փ ու լ մ

Ուսումնասիրվում է հանդիպակաց փնջերի տարածման խնդիրը զաղի պղպղակների պարունակող էլեկտրահաղորդիչ և մագնիսական հեղուկում, որը գտնվում է փնջերի առանցքով ուղղված հաստատուն մագնիսական դաշտում:

Գրված են կարճ ալիքների հավասարումները, որոնք, ի տարբերություն օպտիկայի, ախուստիկայի խնդիրներում իրարից անկախ են: Հավասար և սիմետրիկ փնջերը անդրադարձնող հայելիների համար ստացված են մոդուլացիայի հավասարումները, և գտնված են նրանց լուծումները Գաուսյան փնջերի տեսքով:

Ըստ գտնված ալիքների փուլերի տարբերության որոշված է ախուստիկական ինտերֆերոմետրի թողարկման գործակիցը:

Սկզբնական փնջերի ամպլիտուդների համար ստացված են սահմանափակումներ, որոնց զեպքում տեղի ունի երկհաստատունության երևույթը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Канер В. В., Руденко О. В. О распространении волн конечной амплитуды в акустических волноводах. Вестник Московского университета. Сер. Физическая астрономия. 1978, т. 19, с. 78.
2. Hunter J. K., Keller J. B. Weakly nonlinear high frequency waves Comm. Pure Appl. Math. 1983, 36, p. 547—563.
3. Багдоев А. Г., Оганян Г. Г. Эволюция квазимонохроматических волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН АрмССР, Механика. 1984, т. 37, № 1, с. 34—45.
4. Багдоев А. Г., Петросян Л. Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР, Механика. 1983, т. 36, № 5, с. 3—16.
5. Багдоев А. Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1981. 307 с.
6. Bagdoyev A. G., Gourgentian A. A. The determination of parameters of a chemically active magnetogasdynamic medium in the proximity of a wave.—Atti della Accademie del Sc. 1976, vol 111, 1, p. 41.
7. Гогосов В. В., Налегова В. А., Шапошников Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. В кн.: Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: 1981, т. 16, 208 с.
8. Тарапов Н. Е. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Респ. науч. сб. Изд-во при Харьковском ун-те. 1973, вып. 17, с. 221—239.
9. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
10. Marburger J. H., Felber F. S. Theory of a lossless nonlinear Fabry-Perot interferometer.—Phys. Rev. A, 1978, vol. 17, № 1, p. 336—342.
11. Багдоев А. Г., Безиргенян Г. С. О дифракции интенсивной световой волны в неоднородной, кубически-нелинейной среде. Докл. АН Арм. ССР, 1984, т. 79, № 1, с. 29—34.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
11.VI, 1987