

УДК 539.3

О КОНЦЕНТРАЦИЯХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ И
 ИНДУЦИРОВАННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВОЗЛЕ ТРЕЩИНЫ,
 ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

АСАНЯН Д. Д., АСЛАНЯН А. А., БАГДАСАРЯН Г. Е.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии неоднородной изотропной плоскости, состоящей из двух различных магнитомягких ферромагнитных однородных полуплоскостей, на границе раздела которых находится прямолинейная трещина. Единственным источником, вызывающим упругие деформации и индуцированное магнитное поле в среде, является внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости раздела. Определены основные характеристики напряженно-деформированного состояния и индуцированного магнитного поля и исследованы их особенности около трещины. Аналогичная задача для однородной плоскости рассмотрена в работе [4].

1. Известно, что при помещении ферромагнитного тела в магнитное поле происходит намагничивание материала, приводящее как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Под действием этих сил в среде возникают деформации, возбуждающие добавочное (индуцированное) магнитное поле.

Характеристики магнитного поля представим в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}, \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{m}$$

где \vec{H}_0 , \vec{B}_0 и \vec{M}_0 , соответственно, векторы напряженности магнитного поля, магнитной индукции и намагниченности недеформированного тела; \vec{h} , \vec{b} и \vec{m} — добавления (возмущения) к указанным величинам, обусловленные деформацией среды. В вакууме векторы \vec{B} и \vec{H} связаны соотношением $\vec{B}^{(e)} = \mu_0 \vec{H}^{(e)}$, где μ_0 — абсолютная магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м), а в магнитомягком материале — соотношением $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, где χ — магнитная восприимчивость, $\mu_r = \chi + 1$ — относительная магнитная проницаемость среды.

Невозмущенное магнитное поле во всем пространстве определяется из решения следующей задачи магнитостатики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H}_0 &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{n} \times [\vec{H}_0 - \vec{H}_0^{(e)}] &= 0, \quad \vec{n} \cdot [\vec{B}_0 - \vec{B}_0^{(e)}] = 0, \quad \text{при } (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \\ \vec{H}_0^{(e)} &\rightarrow \vec{H}^0 \quad \text{при } |\vec{z}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности Γ тела, \vec{r} — радиус-вектор, x_i — декартовы координаты рассматриваемой точки, \vec{H}^0 — напряженность заданного магнитного поля на бесконечности при отсутствии ферромагнитного тела; индекс „e“ означает принадлежность к внешней (окружающей тела) среде, электромагнитные свойства которой эквивалентны свойствам вакуума.

Напряженно-деформированное состояние среды и индуцированное в ней магнитное поле определяются из уравнений и граничных условий магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1]. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия линеаризуются. В результате получают следующие линейные уравнения и граничные условия возмущенного состояния, приведенные в работе [2, 3].

Система дифференциальных уравнений магнитоупругости деформированного состояния

$$\operatorname{div} \hat{S} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{b} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\hat{S} = \hat{t} + \hat{T}$; \hat{t} и \hat{T} — тензоры магнитоупругих напряжений и напряжений Максвелла, соответственно, причем

$$t_{ij} = \sigma_{ij} + \nu_0 \lambda H_{0i} H_{0j} + \nu_0 \gamma (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) \quad (1.3)$$

$$T_{ij} = \nu_0 (\nu_r H_{0i} H_{0j} - 0,5 \delta_{ij} H_{0k} H_{0k}) + \nu_0 [\nu_r (H_{0i} h_j + H_{0j} h_i) - \delta_{ij} H_{0k} h_k]$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование, δ_{ij} — символ Кронекера, σ_{ij} — компоненты тензора упругих напряжений

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

λ и μ — постоянные Ляме, u_i — компоненты вектора упругих перемещений.

Граничные условия на поверхностях раздела двух сред

$$\begin{aligned} n_i [S_{ij} - S_{ij}^{(e)}] &= 0 \\ \varepsilon_{ijk} \left\{ n_j [h_k - h_k^{(e)}] - n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_j} [H_{0k} - H_{0k}^{(e)}] \right\} &= 0 \\ n_i [b_i - b_i^{(e)}] &= n_m \frac{\partial u_m}{\partial x_i} [B_{0i} - B_{0i}^{(e)}] \end{aligned} \quad (1.5)$$

где ε_{ijk} — символ Леви-Чивита.

2. На основе приведенных уравнений и граничных условий рассмотрим плоскую задачу о концентрации упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем.

Пусть на границе раздела двух различных магнитомягких изотропных полупространств имеется прямолинейная туннельная трещина шириной $2a$, берега которой свободны от внешних механических нагрузок.

Прямоугольная декартова система координат выбрана так, что поперечное сечение трещины находится в плоскости $x_1 O x_2$ и занимает область $[-a, a]$ на координатной оси Ox_1 . Среда помещена в постоянном магнитном поле $\vec{B}^0(O, B_0, 0)$ (которое является единственным источником внешних воздействий) и находится в условиях плоской деформации в плоскости $x_1 O x_2$ (фиг. 1).

Для рассматриваемого случая задача (1.1) имеет следующее решение:

$$\vec{B}_0^{(e)} = B_0 \cdot \vec{i}_2, \quad \vec{B}_0^{(i)} = \vec{B}_0^{(e)}, \quad \vec{H}_0^{(e)} = \vec{B}_0^{(e)} / \mu_0, \quad \vec{H}_0^{(i)} = \vec{B}_0^{(i)} / \mu_0 \mu_{ri} \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем индекс „ e “ означает принадлежность к области трещины, а индексы $i=1$ и $i=2$ — принадлежность к областям $x_2 > 0$ и $x_2 < 0$, соответственно; \vec{i}_k — единичные векторы координатных осей.

В силу (2.1), из (1.2) — (1.4), для рассматриваемой задачи получим следующие уравнения магнитоупругости возмущенного состояния:

$$\Delta u_1^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i} (u_{1,1}^{(i)} + u_{2,2}^{(i)})_{,1} + \frac{2\gamma_i B_0}{\mu_i \mu_{ri}} h_{1,2}^{(i)} = 0 \quad (2.2)$$

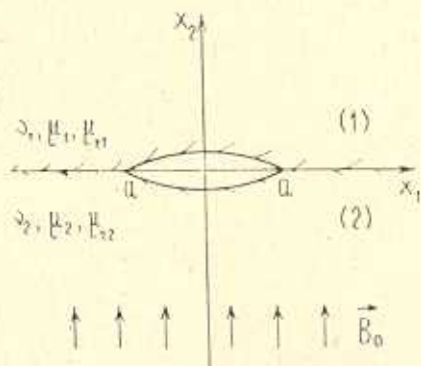
$$\Delta u_2^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i} (u_{1,1}^{(i)} + u_{2,2}^{(i)})_{,2} + \frac{2\gamma_i B_0}{\mu_i \mu_{ri}} h_{2,2}^{(i)} = 0$$

$$\Delta \phi^{(i)} = 0, \quad \Delta \psi^{(e)} = 0$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \quad f_{,h} = \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

$$h_k^{(i)} = \phi_{,k}^{(i)}, \quad h_k^{(e)} = \psi_{,k}^{(e)} \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Аналогичным образом из (1.3) — (1.5) получаются следующие граничные условия на плоскости $x_2=0$:

$$\mu_{r1} \cdot h_2^{(1)} = \mu_{r2} \cdot h_2^{(2)}; \quad S_{2j}^{(1)} = S_{2j}^{(2)} \quad (j=1, 2) \quad \text{при } |x_1| < \infty \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} u_{1,1}^{(1)} = u_{1,1}^{(2)}; & u_{2,1}^{(1)} = u_{2,1}^{(2)} \\ h_1^{(1)} = h_1^{(2)} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu_{r2} - \mu_{r1}}{\mu_{r1} \mu_{r2}} u_{2,1}^{(1)} \end{cases} \quad \text{при } |x_1| > a \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} h_1^{(1)} = h_1^{(2)} + \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{\gamma_1}{\mu_{r1}} u_{2,1}^{(1)} - \frac{\gamma_2}{\mu_{r2}} u_{2,1}^{(2)} \right) \\ t_{12}^{(1)} = \frac{\gamma_1}{\mu_0 \mu_{r1}} B_0^2 u_{2,1}^{(1)}; \quad t_{22}^{(1)} = \frac{\gamma_1^2}{\mu_{r1}} \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0 \mu_{r1}} + B_0 h_2^{(1)} \right) \text{ при } |x_1| < a \end{cases} \quad (2.6)$$

Кроме условий (2.4)–(2.6) должны удовлетворяться также условия на бесконечности, согласно которым все искомые величины с индексом „i*“ должны стремиться к нулю при $|r| \rightarrow \infty$.

Решение задачи (2.2)–(2.6) с учетом условий на бесконечности, представим в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ (-1)^{i+1} \left[A^{(i)}(x) + \frac{2(1-2\nu_i)\gamma_i B_0}{\mu_i \mu_{ri}} a^{(i)}(x) \right] - \right. \\ \left. - [3-4\nu_i + (-1)^i x x_2] \frac{B^{(i)}(x)}{x} \right\} \exp[(-1)^i \alpha x_2] \sin \alpha x_1 dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$u_2^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A^{(i)}(x) + x_2 B^{(i)}(x)] \exp[(-1)^i \alpha x_2] \cos \alpha x_1 dx$$

$$\phi^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a^{(i)}(x) \exp[(-1)^i \alpha x_2] \cos \alpha x_1 dx$$

где $A^{(i)}(x)$, $B^{(i)}(x)$ и $a^{(i)}(x)$ — неизвестные функции, которые определим, удовлетворяя граничным условиям (2.4)–(2.6).

Подставляя (2.7) в (1.3), определяем магнитоупругие напряжения $t_{ki}^{(i)}$ и максвелловские напряжения $T_{kj}^{(i)}$. В частности, для нормальных напряжений $t_{22}^{(i)}$ и $T_{22}^{(i)}$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} t_{22}^{(i)} = \frac{\gamma_i B_0^2}{2\mu_0 \mu_{ri}} (-1)^i + \frac{4\mu_i}{\pi} \int_0^\infty \left\{ (-1)^i \alpha \left[A^{(i)}(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-2\nu_i)\gamma_i B_0}{2\mu_i \mu_{ri}} a^{(i)}(x) \right] + [1-2\nu_i + (-1)^i x x_2] B^{(i)}(x) \right\} \exp[(-1)^i \alpha x_2] \cos \alpha x_1 dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$T_{22}^{(i)} = \frac{(1+2\gamma_i)B_0^2}{2\mu_0 \mu_{ri}} + (-1)^i \frac{2(1+2\gamma_i)B_0}{\pi \mu_{ri}} \int_0^\infty \alpha a^{(i)}(x) \exp[(-1)^i \alpha x_2] \cos \alpha x_1 dx$$

Перейдем к определению неизвестных функций $A^{(i)}(x)$, $B^{(i)}(x)$ и $a^{(i)}(x)$ путем удовлетворения граничных условий (2.4)–(2.6). Для этой цели введем следующие обозначения:

$$\varphi_1(x) = u_{1,1}^{(1)}(x, 0) - u_{1,1}^{(2)}(x, 0), \quad \varphi_2(x) = u_{2,1}^{(1)}(x, 0) - u_{2,1}^{(2)}(x, 0) \quad (2.9)$$

$$\varphi_3(x) = h_1^{(1)}(x, 0) - h_1^{(2)}(x, 0) - \frac{\mu_{r1} - \mu_{r2}}{\mu_{r1}\mu_{r2}} \frac{B_0}{\mu_0} u_{2,1}^{(1)}(x, 0)$$

где $x = x_j/a$, $u_i = a\bar{u}_i$, $h_i = a\bar{h}_i$ (в дальнейшем знак \sim опускается).

Используя граничные условия (2.5), легко показать, что функции $\varphi_j(x)$ ($j=1, 2, 3$) удовлетворяют следующим условиям:

$$\varphi_j(x) = 0 \quad \text{при } |x| > 1 \quad (2.10)$$

$$\varphi_1(-x) = \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x) = -\varphi_2(-x), \quad \varphi_3(-x) = -\varphi_3(x) \quad (2.11)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = 0$$

Подставляя (2.7) в граничные условия (2.4) и учитывая (2.9), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\vec{x} \cdot \hat{A}^T = \vec{\phi}, \quad (\hat{A}^T - \text{транспонированная к матрице } \hat{A}) \quad (2.12)$$

позволяющую выражать неизвестные функции $A^{(1)}(x)$, $B^{(1)}(x)$ и $a^{(1)}(x)$ через новые неизвестные $\varphi_j(x)$.

Матрица \hat{A} и векторы \vec{x} и $\vec{\phi}$, входящие в (2.12), имеют вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3+4\nu_1 & 3-4\nu_2 & c_1 & c_2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{r1}^{-1} - \mu_{r2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -\mu & 1-2\nu_1 & -\mu(1-2\nu_1) & c_3 & c_4 \\ -1 & \mu & 2(1-\nu_1) & 2\mu(1-\nu_2) & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{r1} & \mu_{r2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = (\alpha A^{(1)}(x), \alpha A^{(2)}(x), B^{(1)}(x), B^{(2)}(x), \alpha a^{(1)}(x), \alpha a^{(2)}(x))$$

$$\vec{\phi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, 0, 0)$$

где

$$\psi_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi_1(s) \cos \alpha s ds; \quad \psi_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi_2(s) \sin \alpha s ds$$

$$\psi_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \varphi_3(s) \sin \alpha s ds; \quad \psi_4 = \lambda \delta(\alpha)$$

$$\lambda = \frac{\pi B_0^2}{8\mu_0\mu_{r1}} \left(\frac{1+4\nu_2}{\mu_{r2}^2} - \frac{1+4\nu_1}{\mu_{r1}^2} \right); \quad \mu = \mu_2/\mu_1 \quad (2.13)$$

$$c_k = \frac{2(1-2\nu_k)\gamma_k B_0^2}{\mu_0\mu_k\mu_{rk}}; \quad c_{k+2} = -\frac{(1-2\nu_k)\gamma_k B_0^2}{\mu_0\mu_k\mu_{rk}} - \frac{(1+2\nu_k)B_0^2}{2\mu_0\mu_k\mu_{rk}}$$

$$c_{k+1} = (-1)^k \frac{B_0^2}{2^{\mu_0 \mu_r k \mu_k}} [1 + (3 - 4\nu_k) \chi_k / \mu_r k]; \quad (k=1, 2)$$

$\delta(x)$ —функция Дирака.

Предполагая $\det \hat{A} \neq 0$, из (2.12) найдем

$$\alpha A^{(l)}(x) = \sum_{k=1}^4 b_{lk} \psi_k(x); \quad \alpha a_{(x)}^{(l-4)} = \sum_{k=1}^4 b_{lk} \psi_k(x) \quad (2.14)$$

$$B^{(l-2)}(x) = \sum_{k=1}^4 b_{jk} \psi_k(x); \quad (i=1, 2; j=3, 4; l=5, 6)$$

где b_{lk} —элементы матрицы обратной \hat{A} .

Подставляя (2.14) в граничные условия (2.6), получим следующую систему интегральных уравнений относительно ψ_k ($k=1, 2, 3$)

$$\sum_{k=1}^3 \beta_{jk} \int_0^{\infty} \psi_k(x) \sin \alpha x dx = 0, \quad (j=1, 3)$$

$$\sum_{k=1}^3 \beta_{2k} \int_0^{\infty} \psi_k(x) \cos \alpha x dx = d \quad (2.15)$$

где

$$\beta_{11} = \gamma_1, \quad \beta_{12} = \gamma_2 - \frac{\gamma_1}{\mu_{r1}}, \quad \beta_{13} = \gamma_3$$

$$\gamma_k = \frac{\mu_{r1} + \mu_{r2}}{\mu_{r2}} b_{5k} + \left(\frac{\chi_2}{\mu_{r2}} - \frac{\chi_1}{\mu_{r1}} \right) b_{2k} \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\beta_{2k} = -b_{1k} + (1 - 2\nu_1) b_{3k} + \frac{\chi_1(\chi_1 - 2 + 4\nu_1) B_0^2}{2^{\mu_0 \mu_{r1} \mu_1}} b_{5k}$$

$$d = \frac{B_0^2 \chi_1 \pi (\chi_1 - 2)}{8^{\mu_0 \mu_{r1} \mu_1}} + \frac{i}{2} \left[-b_{14} + (1 - 2\nu_1) b_{34} + \frac{\chi_1(\chi_1 - 2 + 4\nu_1) B_0^2}{2^{\mu_0 \mu_{r1} \mu_1}} b_{54} \right]$$

$$\beta_{3k} = \left(\frac{\chi_1 B_0^2}{2^{\mu_0 \mu_{r1} \mu_1}} - 1 \right) b_{1k} + 2(1 - \nu_1) b_{3k} - \frac{(3 - 4\nu_1) \chi_1 B_0^2}{2^{\mu_0 \mu_{r1} \mu_1}} b_{5k}$$

Воспользуясь следующими формальными представлениями:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin pt \sin px dp = \delta(x-t) - \delta(x+t); \quad \int_0^{\infty} \sin pt \cos px dp = \frac{t}{t^2 - x^2}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos pt \cos px dp = \delta(x-t) + \delta(x+t)$$

систему интегральных уравнений (2.15), в силу (2.13), можно привести к виду

$$\frac{\alpha_{11}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)}{x-s} ds + \alpha_{12} \varphi_2(x) = 0, \quad \alpha_{12} \varphi_1(x) - \frac{\alpha_{22}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)}{x-s} ds = d$$

$$\varphi_3(x) = \gamma \varphi_2(x) \quad (2.16)$$

Здесь

$$\alpha_{11} = \beta_{31}; \quad \alpha_{12} = \beta_{32} + \gamma \beta_{33}; \quad \alpha_{21} = \beta_{21}; \quad \alpha_{22} = \beta_{22} + \gamma \beta_{23}$$

$$\gamma = (\beta_{11} \beta_{32} - \beta_{12} \beta_{31})(\beta_{13} \beta_{31} - \beta_{11} \beta_{33})^{-1}$$

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния среды сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений (2.16), которую необходимо рассматривать совместно с условиями (2.10), (2.11). Отметим, что система типа (2.16) получена также в работе [5].

3. В случае однородной задачи ($\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$) система (2.16) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)}{x-s} ds = 0; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)}{x-s} ds = \lambda_*, \quad \lambda_* = -\frac{d_0}{\alpha_{22}}$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{4(1-\nu_1)} - \frac{\chi_1^2(\chi_1^2 - 2 + 4\nu_1)B_0^2}{4\mu_0 \mu_1 \mu_{r1}^2}; \quad d_0 = \pi \chi_1(\chi_1 - 2)B_0^2 / 8\mu_0 \mu_1 \mu_{r1}^2 \quad (3.1)$$

которая в классе неограниченных функций имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (2.11) [6]:

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = \frac{\lambda_* x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.2)$$

Легко убедиться, что решение (3.2) совпадает с решением однородной задачи, полученного в работе [4].

В случае неоднородной задачи ($\alpha_{12} \neq 0, \alpha_{21} \neq 0$) система (2.16) введением оператора K посредством

$$K\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{x-s} ds$$

приводится к одному особому интегральному уравнению для определения функции $\varphi_1(x)$

$$(I + i\gamma K)(I - i\gamma K)\varphi_1 = f \quad (3.3)$$

где I — единичный оператор.

$$f = \frac{d}{\alpha_{21}}, \quad \gamma^2 = \frac{\alpha_{11} \alpha_{22}}{\alpha_{12} \alpha_{21}} \quad (3.4)$$

Остальные неизвестные функции $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ определяются посредством функции $\varphi_1(x)$ следующим образом:

$$\varphi_2(x) = -\frac{2\mu}{\alpha_{12}} K\varphi_1, \quad \varphi_3(x) = -\gamma \frac{2\mu}{\alpha_{12}} K\varphi_1 \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.3) в классе неограниченных функций представляется в виде [6, 7]

$$\varphi_j(x) = K_j K_2 f \quad (3.6)$$

где операторы K_j ($j=1, 2$) определяются формулами

$$K_j \psi = \psi(x) + (-1)^j i \gamma Z_j(x) \int_{-1}^1 \frac{\psi(s)}{x-s} ds + E_j Z_j(x) \psi(x) \quad (3.7)$$

В (3.7) E_j — произвольные постоянные, $Z_j(x)$ — определенные функции, вид которых зависит от знака и модуля γ^2 .

Численные расчеты показывают, что γ^2 является монотонно убывающей функцией величины B_0 и имеет единственную точку ($B_0 = B_{0*}$) разрыва первого рода, ($\gamma^2 \rightarrow \pm 1$ при $B_0 \rightarrow B_{0*} \pm 0$), причем $\gamma^2 > 1$ при $B_0 < B_{0*}$ и $\gamma^2 < -1$ при $B_0 > B_{0*}$.

В силу вышеуказанного свойства γ^2 , функции $Z_j(x)$ определяются следующим образом [6, 7]:

при $B_0 < B_{0*}$

$$Z_1(x) = (1-x^2)^{-1/2} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\alpha}, \quad Z_2(x) = \overline{Z_1(x)}, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (3.8)$$

при $B_0 > B_{0*}$

$$Z_1(x) = \frac{1}{1+x} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\alpha}, \quad Z_2(x) = \frac{1}{1+x} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{|\gamma^2|}} \quad (3.9)$$

На основе (3.6)–(3.9), (1.13) и (2.14) из (2.7) найдем перемещения $u_j^{(i)}$ и потенциалы индуцированного магнитного поля $\phi^{(i)}$. Подставляя найденные выражения для $u_j^{(i)}$ и $\phi^{(i)}$ в (1.3) и (2.3), определяем магнитоупругие напряжения и индуцированное магнитное поле в среде. В частности, в случае $B_0 < B_{0*}$, используя (2.8), для $t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(1)} + T_{22}^{(1)}$ при $x_2 = 0$ получим следующие выражения:

при $|x| > 1$

$$t_{22}^{(1)}(x, 0)/\mu_1 = r_0 + \frac{\pi^2 r_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 r_2 d}{4\alpha_{22}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ x \cos \left(\alpha \ln \frac{x-1}{x+1} \right) - 2x \sin \left(\alpha \ln \frac{x-1}{x+1} \right) \right\} \quad (3.10)$$

$$h_2^{(1)}(x, 0) = k_0 + \frac{\pi^2 k_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 k_2 d}{4\alpha_{22}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ x \cos \left(\alpha \ln \frac{x-1}{x+1} \right) - 2x \sin \left(\alpha \ln \frac{x-1}{x+1} \right) \right\}$$

при $|x| < 1$

$$t_{22}^{(1)}(x, 0)/\mu_1 = r_0 + \frac{\pi^2 r_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 d}{8\gamma\alpha_{21}} \left[r_1(e^{-\alpha x} - e^{\alpha x}) + r_2 \gamma \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} (e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}) \right] F(x)$$

$$h_2^{(1)}(x, 0) = k_0 + \frac{\pi^2 k_2 d}{4\alpha_{22}} - \frac{\pi^2 d}{8\gamma\alpha_{21}} \left[k_1(e^{-\alpha x} - e^{\alpha x}) + k_2 \gamma \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} (e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}) \right] F(x) \quad (3.11)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[x \sin \left(x \ln \frac{1-x}{1+x} \right) + 2x \cos \left(x \ln \frac{1-x}{1+x} \right) \right]$$

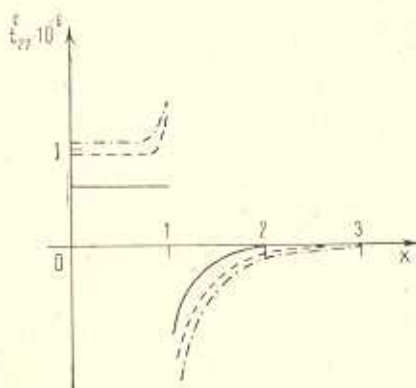
где

$$k_0 = -\frac{2}{\pi} b_{54}, \quad k_1 = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 b_{51}, \quad k_2 = -\frac{2}{\pi} (b_{52} + \gamma b_{53})$$

$$r_0 = \xi_0 + \gamma_4, \quad r_1 = \frac{2}{\pi} \gamma_1, \quad r_2 = \gamma_2 + \gamma \gamma_3, \quad \gamma_k = -b_{1k} + (1-2\nu_1) b_{3k} + \xi_1 b_{5k}$$

$$\xi_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu_1} \left[\frac{\gamma_1}{\mu_{r1}^2} + \frac{1+2\gamma_1}{2\mu_{r1}^2} \right], \quad \xi_1 = -\frac{(1-2\nu_1)\gamma_1 B_0^2}{\mu_0 \mu_1 \mu_{r1}} - \frac{(1+2\gamma_1) B_0^2}{2\mu_0 \mu_1 \mu_{r1}}, \quad k = (1, 2, 3, 4)$$

На основе (3.10) и (3.11) произведены численные расчеты, результаты которых приведены на фиг. 2–3. Расчеты приведены для следующих данных: $\nu_2 = 0,25$; $\mu_{r2} = 10^5$; $\mu_2 = 1,1 \cdot 10^5$ МПа при различных γ_1 ; μ_{r1} ; μ_1 . Анализ показывает, что: а) с увеличением напряженности магнитного поля B_0 суммарное напряжение t_{22}^c возрастает и стремится к бесконечности при $B_0 \rightarrow B_{0s}$; б) суммарное напряжение монотонно убывает при уменьшении μ_{r1} ; в) неоднородность существенно влияет на напряженно-деформированное состояние среды, при-



Фиг. 2. График зависимости $t_{22}^c(x, 0)/\mu_1$

от x при $B_0^2/\mu_0 \mu_1 = 9 \cdot 10^{-6}$ и

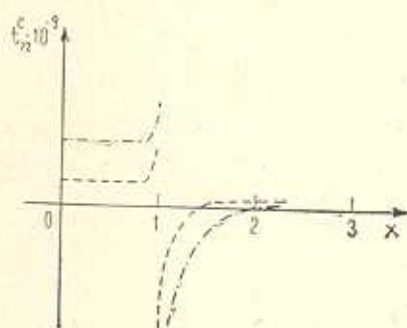
$\mu_1 = 1,1 \cdot 10^4$ МПа;

— · — кривая для $\gamma_1 = 0,3$, $\mu_{r1} = 10^6$;

— — — кривая для $\mu_{r1} = 10^4$, $\gamma_1 = 0,3$

— кривая для $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$,

$\mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^4$



Фиг. 3. График зависимости $t_{22}^c(x, 0)/\mu_1$

от x при $B_0^2/\mu_1 \mu_0 = 0,8 \cdot 10^{-4}$,

$\mu_1 = 0,7 \cdot 10^4$ МПа;

— · — кривая для $\gamma_1 = 0,22$, $\mu_{r1} = 10^5$;

— — — кривая для $\gamma_1 = 0,22$, $\mu_{r1} = 10^3$

чем, как видно из (3.10) и (3.11), коэффициент интенсивности различен при $x \rightarrow 1 \pm 0$; γ) как видно из табл. 1, в котором приведены значения B_{0*} , неоднородность существенно изменяет величину B_{0*} (в последнем столбце приведены результаты для однородного случая; $\nu_i = 0,25$; $\mu_{r1} = 10^3$; $\mu_i = 1,1 \cdot 10^5$ МПа; $i = 1, 2$).

Таблица 1

	$\mu_{r1} = 10^3$	$\mu_{r1} = 10^2$	
μ_1 (МПа)	$B_{0*}^2 / \mu_1 \mu_0$	$B_{0*}^2 / \mu_1 \mu_0$	$B_{0*}^2 / \mu_1 \mu_0$
$1,1 \cdot 10^5$	$0,45 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
$1,7 \cdot 10^5$	$0,37 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	
$2,3 \cdot 10^5$	$0,27 \cdot 10^{-4}$	$2,25 \cdot 10^{-4}$	

В заключение отметим, что существование критического значения B_{0*} магнитного поля, при котором напряжения стремятся к бесконечности, по-видимому связано с допущениями, принятыми в работе [2] и поэтому теория магнитоупругости, предложенная в работе [2], при $B \gg B_{0*}$ нуждается в уточнении.

ON CONCENTRATION OF ELASTIC STRESSES AND INDUCED MAGNETIC FIELD CAUSED BY EXTERNAL MAGNETIC FIELD NEAR TO A CRACK

D. D. ASANYAN, A. A. ASLANYAN, G. E. BAGDASARYAN

ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏՈՎ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
 ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ՄԱԿԱԾՎԱԾ ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ
 ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Գ. Զ. ՀԱՍԱՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍՅԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է խնդիր անհամասեռ, իզոտրոպ հարթության դեֆորմացված լարվածային վիճակի մասին: Ենթադրվում է, որ հարթությունը բաղկացած է երկու տարբեր մագնիսոսին փափուկ համասեռ կիսահարթություններից, որոնց կզրի վրա գտնվում է ուղղաձիգ ճաք: Արտաքին աղբյուրը, որը առաջ է բերում առաձգական դեֆորմացիաներ, հանդիսանում է արտաքին մագնիսական դաշտը: Որոշված են դեֆորմացված լարվածային վիճակը բնորոշող բոլոր պարամետրերը և հետազոտված են նրանց կախիկությունները ճաքի մոտակայքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. F. Brown, Jr.*, Magnetoelastic Interactions, Spring. (1966).
2. *Pao, Y.-H., Yeh, C.-S.* A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids.—*Int. J. Engin. Sci.*, 11, 415 (1973).
3. *Varma P. D. S., Singh M.* Finite deformation theory for soft ferromagnetic elastic solids.—*Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1984, v. 19, № 4, pp. 273—286.
4. *Shindo Y.* The linear magnetoelastic problem for a soft ferromagnetic elastic solid with a finite crack.—*ASME. J. Appl. Mech.* 44, 47 (1977).
5. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником.—*ПММ*, 1975, № 2, с. 358.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
7. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1963. 511 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
26.VII, 1987