ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XLI, № 2, 1988 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ЗАДЕЛАННОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА С УЧЕТОМ СЦЕПЛЕНИЯ

МКРТЧЯН А. М., ТЕРЗЯН С. А.

Контактные задачи для прямоугольной области, без учета сцепления, рассмотрены в многих работах, например [1—4, 9] и др. С учетом трения и сцепления рассмотрены в работах [7, 10] и др.

1. Рассматривается плоская контактная задача для упругого прямоугольника длиной $2a$, высотой b, обеими концами заделанного в жесткие стенки (штампы) на некоторую, различную для верхней и нижней плоскостей, глубину (фиг. 1). Принимается, что между стенками и прямоугольником имеет место полное сцепление. На свободных от заделок частях прямоугольника действуют заданные нагрузки.

Прямоугольник имеет одну ось симметрии, и для симметричного нагружения рассматривается одна половина прямоугольника при следующих граничных условиях:

$$\tau_{xy}(0, y)=u(0, y)=0, \quad (0<y<b) \tag{1.1}$$

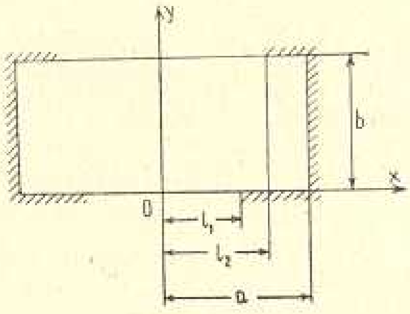
$$u(a, y)=0, \quad v(a, y)=0, \quad (0\leqslant y\leqslant b) \tag{1.2}$$

$$\sigma_y(x, 0)=h_1(x), \ \tau_{xy}(x, 0)=0 \quad (0<x<l_1) \tag{1.3}$$

$$u(x, 0)=v(x, 0)=0, \quad (l_1\leqslant x\leqslant a) \tag{1.4}$$

$$\sigma_y(x, b)=h_2(x), \ \tau_{xy}(x, b)=0 \quad (0<x<l_2) \tag{1.5}$$

$$u(x, b)=v(x, b)=0, \ (l_2\leqslant x\leqslant a) \tag{1.6}$$



Фиг. 1

Задача решается при помощи бигармонической функции Эри, представленной в виде суммы двух тригонометрических рядов Фурье [1] где

$$\Phi(x, y)=d_1x^2+d_2y^2+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\operatorname{ch}\alpha_k y+B_k\operatorname{sh}\alpha_k y+$$
$$+\alpha_k y(C_k\operatorname{ch}\alpha_k y+D_k\operatorname{sh}\alpha_k y)]\cos\alpha_k x+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(E_k\operatorname{ch}\beta_k x+\beta_k x H_k\operatorname{sh}\beta_k x)\cos\beta_k y \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_k=\frac{k\pi}{a},\qquad \beta_k=\frac{k\pi}{b}$$

При таком выборе функции напряжений условия (1.1) удовлетворяются.

В дальнейшем, величины и уравнения, относящиеся к линии $y=0$, будут снабжены индексом $j=1$, а к линии $y=b$—индексом $j=2$.

2. Для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) сначала построим решение вспомогательной задачи, когда по всему контуру прямоугольника заданы перемещения. Следовательно, должны быть удовлетворены условия (1.2), (1.4) и (1.6), которые дополним на интервале ортогональности, вводя новые неизвестные функции

$$\begin{gathered}u(x,(j-1)b)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(j)}\sin\alpha_k x=\begin{cases}f_j(x), & (0\leqslant x<l_j)\\ 0, & (l_j\leqslant x\leqslant a)\end{cases}\\ v(x,(j-1)b)=\frac{\varphi_0^{(j)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^{(j)}\cos\alpha_k x\begin{cases}\varphi_j(x), & (0\leqslant x\leqslant l_j)\\ 0, & (l_j\leqslant x\leqslant a)\end{cases}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Пользуясь формулами обращения для рядов Фурье и вводя новые неизвестные

$$X_k=(-1)^k\alpha_k^2(C_k\operatorname{ch}\alpha_k b+D_k\operatorname{sh}\alpha_k b),\quad Y_k=(-1)^k\alpha_k^2 C_k,\quad Z_k=(-1)^k\beta_k^2 H_k\operatorname{sh}\beta_k a \tag{2.2}$$

для определения неизвестных коэффициентов разложения (1.7) получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}X_p[1+N_p^{(1)}]+Y_p M_p^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{pk}Z_k+a_p^{(1)}\\ Y_p[1+N_p^{(1)}]+X_p M_p^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_{pk}Z_k+a_p^{(2)}\\ Z_p[1+N_p^{(2)}]=\sum_{k=1}^{\infty}b_{pk}[X_k-(-1)^p Y_k]+b_p,\quad (p=1,2,\dots)\end{gathered} \tag{2.3}$$

и следующие связи:

$$\begin{gathered}\alpha_k^2 A_k=-\frac{\alpha_k\varphi_k^{(2)}}{(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha_k b}+\frac{\alpha_k\varphi_k^{(1)}\operatorname{cth}\alpha_k b}{1+\nu}+\frac{(-1)^k X_k}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}-\alpha_k b\operatorname{cth}\alpha_k b\right)+\\ +(-1)^k Y_k\left(\frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}-\frac{1-\nu}{1+\nu}\operatorname{cth}\alpha_k b\right),\quad d_2=\nu d_1\\ \alpha_k^2 B_k=-\frac{\alpha_k\varphi_k^{(1)}}{1+\nu}+\frac{1-\nu}{1+\nu}(-1)^k Y_k,\quad 2b(d_1-\nu d_2)=\varphi_0^{(2)}-\varphi_0^{(1)}\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\beta_k^2 E_k = \frac{(-1)^k Z_k}{\operatorname{sh}\beta_k a}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \beta_k a \operatorname{cth}\beta_k a\right), \quad Ev_0 = \varphi_0^{(1)}$$

Коэффициенты и свободные члены системы (2.3) определяются формулами

$$a_{pk} = \frac{4(1+\nu)\alpha_p^2}{a(3-\nu)} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}, \quad b_{pk} = \frac{4(1+\nu)\beta_p^2}{b(3-\nu)} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}$$

$$a_p^{(j)} = (-1)^{j-1}\frac{(-1)^p}{3-\nu}\left[\alpha_p f_p^{(3-j)} + (-1)^{j-1}\alpha_p \varphi_p^{(3-j)} \operatorname{cth}\alpha_p b\right] - \frac{(-1)^p}{(3-\nu)\operatorname{sh}\alpha_p b}\alpha_p \varphi_p^{(j)}$$

$$b_p = -\frac{2(-1)^p}{b(3-\nu)}\left[\varphi_0^{(1)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(1)}}{\alpha_m^2+\beta_p^2}\right] +$$

$$+\frac{2}{b(3-\nu)}\left[\varphi_0^{(2)} + \beta_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \varphi_m^{(2)}}{\alpha_m^2+\beta_p^2}\right] \tag{2.5}$$

В (2.4) и (2.5) введены следующие обозначения:

$$f_p^{(j)} = \frac{2E}{a}\int_0^{l_j} f_j(x)\sin\alpha_p x\,dx, \quad \varphi_p^{(j)} = \frac{2E}{a}\int_0^{l_j} \varphi_j(x)\cos\alpha_p x\,dx$$

$$\varphi_0^{(j)} = \frac{E}{a}\int_0^{l_j}\varphi_j(x)\,dx, \quad M_p^{(1)} = \frac{(1+\nu)\alpha_p b \operatorname{ch}\alpha_p b}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\alpha_p b} - \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_p b} \tag{2.6}$$

$$N_p^{(1)} = \frac{e^{-\alpha_p b}}{\operatorname{sh}\alpha_p b} - \frac{(1+\nu)\alpha_p b}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\alpha_p b}, \quad N_p^{(2)} = \frac{e^{-\beta_p a}}{\operatorname{sh}\beta_p a} - \frac{(1+\nu)\beta_p a}{(3-\nu)\operatorname{sh}^2\beta_p a}$$

3. Для определения неизвестных перемещений удовлетворим условиям для напряжений (1.3) и (1.5) на свободных от штампов участках прямоугольника. Используя связи (2.4), обозначения (2.2) и значения X_k, Y_k из (2.3) с предварительным выделением главных частей, условия (1.3) и (1.5) после ряда преобразований сводятся к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Гильберта второго рода

$$q_j(u) + \frac{i(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} q_j(v)\operatorname{ctg}\frac{v-u}{2}\,dv = K_j(u), \quad (-\alpha_j < u < \alpha_j), \quad (j=1, 2) \tag{3.1}$$

относительно некоторых комбинаций, связанных с производными неизвестных перемещений

$$q_j(u) = E\left[f_j'\left(\frac{a}{\pi}u\right) + i\varphi_j'\left(\frac{a}{\pi}u\right)\right] \tag{3.2}$$

В (3.1) введены обозначения

$$\alpha_j = \frac{\pi}{a}l_j, \quad K_j(u) = H_j(u) + R_{j0} + \sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(1)}\cos ku + i\sum_{k=1}^{\infty} R_{jk}^{(2)}\sin ku \tag{3.3}$$

здесь

$$H_j(u)=-\frac{1}{B}h_j\left(\frac{a}{\pi}u\right),\qquad R_{j0}=\frac{1}{B}\left[2d_1+\frac{2}{a(1+\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}Z_m}{\beta_m}\right]$$

$$R_{jk}^{(1)}=(-1)^j\frac{A}{B}\alpha_k\varphi_k^{(j)}N_{k1}+(-1)^{j-1}\frac{A}{B}\frac{\alpha_k\varphi_k^{(3-j)}}{\operatorname{sh}\alpha_k b}+$$

$$+(-1)^j\frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)}\cdot\frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}[(2-j)Y_k+(j-1)X_k]+$$

$$+(-1)^{j-1}\frac{2(-1)^k}{B(3-\nu)}\cdot\frac{\alpha_k b\operatorname{ch}\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}[(2-j)X_k+(j-1)Y_k]+\tag{3.4}$$

$$+\frac{8}{aB(3-\nu)}(-1)^k\alpha_k^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{(\beta_m^2+\alpha_k^2)^2}+\frac{4(-1)^k}{aB(1+\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{\beta_m^2+\alpha_k^2}$$

$$R_{jk}^{(2)}=\frac{A}{B}\frac{\alpha_k\varphi_k^{(3-j)}}{\operatorname{sh}\alpha_k b}-\frac{A}{B}\alpha_k\varphi_k^{(j)}N_{k1}+\frac{2(-1)^k N_k^{(1)}}{B(1+\nu)}[(2-j)Y_k+(j-1)X_k]-$$

$$-\frac{(-1)^k}{B\operatorname{sh}\alpha_k b}[(2-j)X_k+(j-1)Y_k]\left[\frac{2}{1+\nu}-\frac{2\alpha_k b\operatorname{cth}\alpha_k b}{3-\nu}\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{j-1}}{aB(3-\nu)}8(-1)^k\alpha_k^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(2-j)m}\beta_m Z_m}{(\beta_m^2+\alpha_k^2)^2}\tag{3.5}$$

$$N_{k1}=\frac{\exp(-\alpha_k b)}{\operatorname{sh}\alpha_k b},\quad A=\frac{2}{(1+\nu)(3-\nu)},\quad B=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(3-\nu)}$$

Правая часть (3.1)—$K_j(u)$, содержит неизвестные основных бесконечных систем и коэффициенты Фурье граничных функций, однако (3.1) будем решать в предположении, что правая часть—заданная функция, то есть будем обращать главную часть уравнения (3.1) [11]. Решение ищется в классе функций, которые на обоих концах отрезка интегрирования имеют интегрируемые особенности.

Обращением главной части, уравнения (3.1) приводятся к виду

$$q_j(u)=M_jK_j(u)+\frac{N_jZ_j(u)}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{K_j(v)dv}{Z_j(v)\sin\frac{v-u}{2}}-\gamma_j(u),\quad(-\alpha_j<u<\alpha_j)\tag{3.6}$$

где

$$\gamma_j(u)=2N_jZ_j(u)\left(A_j\sin\frac{u}{2}+B_j\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$Z_j(u)=\left(\sin\frac{\alpha-u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^j i\gamma}\left(\sin\frac{\alpha+u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma}\tag{3.7}$$

$$\gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu},\quad M_j=-\frac{(1-\nu)^2}{2A},\quad N_j=(-1)^{j-1}2iB$$

Условие разрешимости дает

$$A_j=(-1)^jB_j\operatorname{tg}\alpha i\gamma\tag{3.8}$$

Для определения постоянных B_j проинтегрируем (3.6) в пределах от $-\alpha_j$ до α_j и с учетом (2.1) получим, что $A_j=B_j=0$.

Уравнения (3.6) после ряда преобразований приводятся также к виду

$$q_j(u)=L_j[H_j(u)]+L_j[R_{j0}]+\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(1)}L_j[\cos ku]+i\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(2)}L_j[\sin ku] \quad (3.9)$$

где для удобства записи введен оператор

$$L_j[g(u)]=-\frac{iN_j}{\operatorname{ch}\pi\gamma}Z_j(u)\operatorname{sh}\left[(-1)^j\alpha_j\gamma-i\frac{u}{2}\right]g(u)+$$

$$+\frac{N_jZ_j(u)}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{g(\tau)-g(u)}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau \quad (3.10)$$

Для замыкания систем алгебраических уравнений необходимо получить уравнения для коэффициентов Фурье разложений (2.1) $\varphi_p^{(j)}, f_p^{(j)}$. Чтобы получить такие уравнения, достаточно разложить в ряд Фурье функцию $q_j(u)$, представленную в виде (3.9).

Умножая (3.9) на $\sin pu$, $\cos pu$ и интегрируя по u от $-\pi$ до π, для определения этих коэффициентов получим четыре бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\pi[\alpha_p\varphi_p^{(j)}]&=R_{j0}C_{0p}^{(1,j)}+\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(1)}C_{kp}^{(1,j)}+i\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(2)}S_{kp}^{(1,j)}+H_p^{(1,j)}\\ \pi[\alpha_pf_p^{(j)}]&=R_{j0}C_{0p}^{(2,j)}+\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(1)}C_{kp}^{(2,j)}+i\sum_{k=1}^{\infty}R_{jk}^{(2)}S_{kp}^{(2,j)}+H_p^{(2,j)}\end{aligned} \quad (3.11)$$

$$(p=1,2,\ldots)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$C_{kp}^{(1,j)}=i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[\cos ku]\sin pu\,du,\quad C_{kp}^{(2,j)}=\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[\cos ku]\cos pu\,du$$

$$(k=0,1,2,\ldots) \quad (3.12)$$

$$S_{kp}^{(1,j)}=i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[\sin ku]\sin pu\,du,\quad S_{kp}^{(2,j)}=\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[\sin ku]\cos pu\,du$$

$$(k=1,2,\ldots)$$

$$H_p^{(1,j)}=i\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[H_j(u)]\sin pu\,du,\quad H_p^{(2,j)}=\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j}L_j[H_j(u)]\cos pu\,du$$

Задача свелась к решению совокупности бесконечных систем (2.3) и (3.11), которая квазивполне регулярна. Регулярность бесконечных систем типа (2.3) доказана многими авторами [1, 6], а сумма модулей коэффициентов и свободные члены бесконечных систем (3.11) имеют порядок $O(k^{-1/2})$, следовательно, общая совокупность бесконечных систем квазивполне регулярна.

4. Формулы для контактных напряжений $\sigma_y(x,(j-1)b), \tau_{xy}(x,(j-1)b)$ $(j=1, 2)$ при $|x|>l_j$, после аналогичных преобразований, сделанных при получении уравнения (3.1), приводятся к виду

$$\sigma_j(u)=\frac{i(-1)^{j-1}}{\pi(1-\nu)}\int\limits_{-\alpha_j}^{\alpha_j} q_j(v)\operatorname{ctg}\frac{v-u}{2}dv-K_j(u), \quad (|u|>\alpha_j) \tag{4.1}$$

где введены обозначения

$$\sigma_j(u)=-\sigma_y\left(\frac{a}{\pi}u,\ (j-1)b\right)+i\tau_{xy}\left(\frac{a}{\pi}u,\ (j-1)b\right), \quad K_j(u)=K_j(u)-H_j(u) \tag{4.2}$$

Представляя решение (3.6) в (4.1) и вычисляя полученные интегралы при условии $(|u|>\alpha_j)$, в итоге для контактных напряжений получим следующие формулы с выделенными особенностями:

$$\sigma_j(u)=Z_j^{(\circ)}(u)\left\{\frac{A}{\pi\operatorname{ch}\pi\gamma}\int\limits_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{\overline{K}_j(\tau)-e^{i(\tau-u)}\overline{K}_j(u)}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi(1-\nu)\operatorname{ch}\pi\gamma}\int\limits_{-\alpha_j}^{\alpha_j}\frac{h_j(\tau)d\tau}{Z_j(\tau)\sin\frac{\tau-u}{2}}+e^{(-1)^{j-1}\alpha_j\gamma}\,\overline{K}_j(u)\left[e^{i\frac{\alpha_j}{2}}\left(-\frac{1}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^j i\gamma\right)\sin\frac{u-\alpha_j}{2}+e^{-i\frac{\alpha_j}{2}}\left(-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma\right)\sin\frac{u+\alpha_j}{2}\right]\right\}, \quad (u>\alpha_j) \tag{4.3}$$

где

$$Z_j^{(\circ)}(u)=\left(\sin\frac{\alpha+u}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^{j-1}i\gamma}\left(\sin\frac{u-\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+(-1)^j i\gamma}$$

Как видно из полученных формул, напряжения под штампом в точках $(|u|=\alpha_j)$ изменения граничных условий имеют корневые особенности с осциллирующими множителями.

Для определения порядка особенностей в угловой точке воспользуемся процедурой, предложенной в работе [6], предполагая, что неизвестные системы (2.3) имеют порядок $X_k=\frac{A}{k^\alpha}$, $Y_k=\frac{B}{k^\alpha}$.

Для определения α получаем трансцендентное уравнение

$$\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}-\left(\frac{1+\nu}{3-\nu}\right)^2\alpha^2=0 \tag{4.4}$$

Корень этого уравнения для различных ν меняется в пределах

$$1{,}379<\alpha<1{,}634 \tag{4.5}$$

следовательно, напряжения в угловой точке особенностей не имеют.

5. Все коэффициенты (3.12), входящие в бесконечные системы, вычисляются и выражаются через гипергеометрические полиномы. Вычислим, к примеру, $C_{kp}^{(1,2)}$. Из (3.12) и (3.10) следует, что

$$C_{kp}^{(1,2)}=i\int\limits_{-\alpha_2}^{\alpha_2} L_2[\cos ku]\sin pu\,du=\frac{N_2}{\operatorname{ch}\pi\gamma}\int\limits_{-\alpha_2}^{\alpha_2} Z_2(u)\cos ku\sin pu\operatorname{sh}\left(\alpha_2\gamma-i\frac{u}{2}\right)du+$$

$$+\frac{iN_2}{2\pi}\int\limits_{-\alpha_2}^{\alpha_2} Z(u)\sin pu\,du\int\limits_{-\alpha_2}^{\alpha_2}\frac{\cos k\tau-\cos ku}{Z_2(\tau)\sin\dfrac{\tau-u}{2}}d\tau$$

Переходим к новым переменным

$$x=e^{iu},\quad t=e^{i\tau},\quad e^{i\alpha_2}=a,\quad e^{-i\alpha_2}=\bar{a} \tag{5.1}$$

с помощью которых коэффициент $C_{kp}^{(1,2)}$ приводится к вычислению интегралов типа

$$\int\limits_{\bar{a}}^{a} x^m Z^*(x)dx=\frac{a^m\pi}{\operatorname{ch}\pi\gamma}F\left(-m,\ \frac{1}{2}+i\gamma;\ 1;\ 1-\bar{a}^2\right)$$

$$\int\limits_{\bar{a}}^{a}\frac{dt}{t^m Z^*(t)}=-\frac{2\pi\sin^2\alpha_2}{\operatorname{ch}\pi\gamma}\left(\frac{1}{4}+\gamma^2\right)a^{-m}F\left(m,\ \frac{3}{2}-i\gamma;\ 3;\ 1-\bar{a}^2\right) \tag{5.2}$$

где

$$Z^*(y)=(a-y)^{-\frac{1}{2}+i\gamma}(y-\bar{a})^{-\frac{1}{2}-i\gamma}$$

а $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$—гипергеометрическая функция Гаусса.

Введем обозначение

$$a^{-m}F\left(m,\ \frac{k}{2}\pm i\gamma;\ k;\ 1-\bar{a}^2\right)=F_k^{\pm}(m),\quad (m=0,\pm1,\pm2,\ldots),\ (k=1,3) \tag{5.3}$$

тогда для $C_{kp}^{(1,2)}$ получим

$$C_{kp}^{(1,2)}=\frac{\pi(1-\nu)}{8}\{F_1^+(-k-p)-F_1^+(p-k)+F_1^+(k-p)-F_1^+(k+p)+$$

$$+\exp(2\alpha_2\gamma)[F_1^+(1-k-p)-F_1^+(1+p-k)+F_1^+(1+k-p)-F_1^+(1+k+p)]\}+$$

$$+\frac{\pi(1-\nu)(1+4\gamma^2)\sin^2\alpha_2}{16}\sum_{n=1}^{k}\{F_3^-(1+n-k)[F_1^+(1-n-p)-F_1^+(1-n+p)]-$$

$$-F_3^-(n+1)[F_1^+(1+k-n-p)-F_1^+(1+k-n+p)]\} \tag{5.4}$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты.

Используя формулы преобразований гипергеометрических функций, получаем, что $F_k^{\pm}(m)$ — действительные числа, которые определяются рекуррентными формулами

$$F_k^{\pm}(p+1)=\frac{k-p}{p}F_k^{\pm}(p-1)+\left(\frac{2p-k}{p}\cos\alpha_2\mp\frac{2\gamma}{p}\sin\alpha_2\right)F_k^{\pm}(p),\ (p>1) \tag{5.5}$$

$$F_k^{\pm}(-p-1)=-\frac{p}{k+p}F_k^{\pm}(1-p)+\frac{1}{p+k}[(2p+k)\cos\alpha_2\pm2\gamma\sin\alpha_2]F_k^{\pm}(-p),(p<-1)$$

а

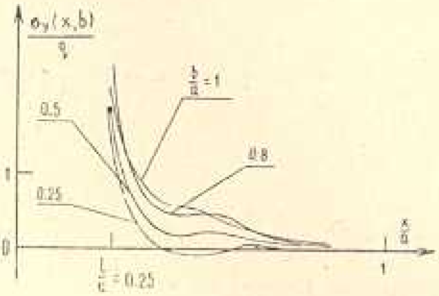
$$F(0,\beta;\gamma;z)=1,\ \bar{a}F\left(1,\frac{1}{2},\pm i\gamma;1;1-\bar{a}^2\right)=\exp(\mp2\alpha_2\gamma)$$

$$F_k^{\pm}(-1)=\cos\alpha_2\pm\frac{2\gamma}{k}\sin\alpha_2 \tag{5.6}$$

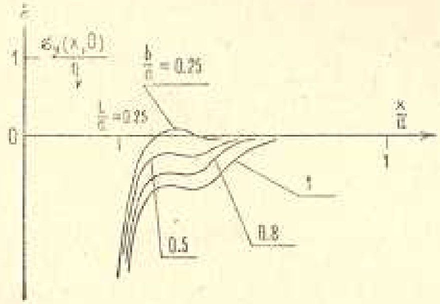
$$\bar{a}F\left(1,\frac{3}{2}\pm i\gamma;3;1-\bar{a}^2\right)=\frac{1}{2\sin^2\alpha_2\left(\frac{1}{4}\pm\gamma^2\right)}[\pm2\gamma\sin\alpha_2-\cos\alpha_2+\exp(\mp2\alpha_2\gamma)]$$

Рассмотрен численный пример, когда

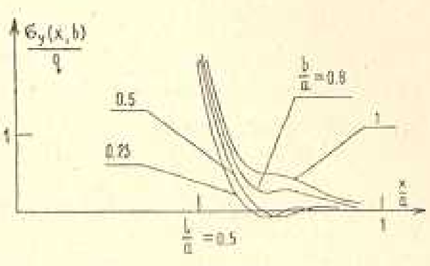
$$l_1=l_2=l,\ h_1(x)=0,\quad h_2(x)=q\quad(0<x<l)$$



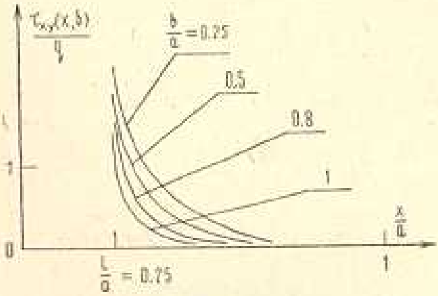
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Ниже приводятся графики распределения контактных напряжений $\sigma_y(x,(j-1)b)$, $\tau_{xy}(x,(j-1)b)$ для конкретных значений геометрических и физических параметров (фиг. 2—5).

$\nu=0,3;\quad l/a=0,25;\ 0,5;\quad b/a=0,25;\ 0,5;\ 0,8;\ 1$

Из графиков можно сделать следующие выводы: как нормальные, так и касательные напряжения, действующие на линиях заделки ($l\leqslant x\leqslant a$), с приближением к вершине прямого угла затухают и практически превращаются в нуль. Последнее свидетельствует о том, что в таких заделках напряжения в угловой точке не только не имеют особенностей, но и в случаях неподвижных границ заделки стремятся к нулю; нормальные контактные напряжения, с уменьшением глубины заделки могут менять свой знак [8, 9].

CONTACT PROBLEM FOR PARTIALLY CLAMPED RECTANGULAR WITH ACCOUNT OF COUPLING

A. M. MKRTCHIAN, S. H. TERZIAN

ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ՝ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս. Հ. ԹԵՐԶՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյան համար կոնտակտային խնդիր, երբ ուղղանկյան եզրագիծը, բացառությամբ երկու զուգահեռ կողմերի կենտրոնական մասերի, որտեղ տրված են լարումները, ամրակցված է։

Խնդիրը բերվում է Հիլբերտի կորիզով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների, որոնք հետագայում բերվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի։

Լարումների բանաձևերում անջատված են եզակիությունները։

Դիտարկված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника.—ПММ, 1957, т. *21*, вып. 1, т. 89—100.
2. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1970, т. *23*, №5, с. 5—19.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1969, т. *22*, №1, с. 3—16.
4. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Смешанная задача для прямоугольника.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1972, т. 25, №2, с. 3—14.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко-защемленной пластинки на основе решения пространственной задачи теории упругости.—Тр. 7 Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970, с. 205—211.

7. *Енгибарян А. А., Мкртчян А. М.* Контактная задача для прямоугольника, ослабленного разрезом.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1983, т. *36*, №6, с. 3—11.
8. *Мкртчян А. М.* Плоская задача для полосы с нецентральными разрезами.— Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1971, т. *24*, №2, с. 16—23.
9. *Проценко В. Г., Проценко В. С., Синекоп Н. С.* О решении некоторых контактных задач для упругого прямоугольника структурным методом.—Прикл. механика, 1974, т. *10*, вып. 9, с. 60—64.
10. *Терзян С. А.* Контактная задача для упругого прямоугольника симметрично образом частично заделанного в жесткие стенки.—В сб.: Исследования по механике твердого деформируемого тела.—Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981, с. 249—254.
11. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений.—Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 122, кн. 3, 1962, с. 95—124.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
24.VII.1987