

УДК 539.319

ПРОНИКАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ, ЧАСТЬ ГРАНИЦЫ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ЖЕСТКУЮ ОПОРУ

МАРТИРОСЯН А. Н.

Задача о распространении давления, заданного на границе упругого или жидкого полупространства, в глубь него изучалась в [1, 2, 3]. Решения краевых задач для анизотропной среды методом Смирнова-Соболева даны в [4], а методом интегральных преобразований — в [5, 6]. Применение методов Смирнова-Соболева и интегральных преобразований к задачам динамической упругости дано в [7, 8, 9]. В настоящей работе рассматривается задача проникания давления в упругую анизотропную полуплоскость, часть границы которой имеет жесткую опору. Решение плоской задачи находится методом интегрального преобразования Лапласа и Фурье и решением уравнения Винера-Хопфа, а затем приводится к форме Смирнова-Соболева [7, 8]. Решаются частные задачи об ударной волне, распространяющейся по границе полуплоскости от взрыва на опоре или вне нее.

§ 1. Возникновение фронта давления на жесткой опоре

Рассмотрим задачу о проникании давления, которое создается ударной волной от взрыва вне упругой анизотропной полуплоскости. Поскольку упругая среда, а тем более твердая опора намного плотнее воздуха, можно, как в [1], считать, что отражение происходит от твердой границы полуплоскости и что давление на границе среды известно. Вначале рассмотрим более простую задачу о взрыве на опоре в некоторой точке $x = -l$, $l > 0$. Фронт ударной волны в момент l/V , где V есть скорость ударной волны, которая как и давление P_1 позади нее постоянны, достигает края опоры и после этого начинается проникание давления в глубь упругой анизотропной среды. Уравнения движения для анизотропной среды в плоском случае имеют вид [11]

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \left(a = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{C_{22}}{\rho} \right) \\ c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \left(d = \frac{C_{66}}{\rho}, \quad c = \frac{C_{66} + C_{12}}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь C_{ij} — упругие постоянные, ρ — плотность среды. Граничные условия при $y=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_{yy} &= \rho \left[(c-d) \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -P_1 \varepsilon(Vt-L-x), \quad x > 0 \\ v &= 0, \quad x < 0; \quad \tau_{xy} = \rho d \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u, v = O(r^{1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0; \quad u = v = 0 \quad \text{при } t=0$$

где $t=l/V$ — в момент достижения ударной волны края опоры. Опора занимает часть границы $x < 0$; u, v — перемещения упругой среды по осям x, y ; τ_{xy}, τ_{yy} — напряжения, $\varepsilon(t)$ — единичная функция.

Переходя к преобразованиям Лапласа \bar{u}, \bar{v} от u, v по t , решение задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}, \bar{v} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n \bar{v}_n \exp(i\bar{x}x + iy\bar{\beta}_n) d\bar{x} \\ \bar{v}_n &= \frac{a^2 - a\bar{x}^2 - a\bar{\beta}_n^2}{c\bar{x}\bar{\beta}_n} \bar{u}_n, \quad \bar{\beta}_n = \left[\frac{(b+d)\omega^2 - L\bar{x}^2 + (-1)^n \sqrt{\Delta(\bar{x})}}{2bd} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\Delta(\bar{x}) = [(b+d)\omega^2 - L\bar{x}^2]^2 - 4bd^2 a \mu_1^2 \mu_2^2; \quad \mu_n^2 = \frac{\omega^2}{c_n^2} - \bar{x}^2, \quad c_1 = a, \quad c_2 = d$$

$L = ab + d^2 - c^2$, $a > d$, $b > d > 0$, $K_1 = ab - (c-d)^2 > 0$, $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Подставляя (1.3) в (1.2) и производя преобразование Фурье по x , можно получить уравнения Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} \frac{i\omega \mu_2}{aC_0} F(\bar{x}) V^- &= \Omega^+ + P_1 \left[2\pi\omega \left(\frac{\omega}{V} - \bar{x} \right) \right]^{-1} \exp\left(-\frac{Ls}{V}\right) \\ \bar{u}_1 &= \frac{\bar{x}\bar{\beta}_1 [(c-d)\bar{\beta}_2^2 + a\mu_1^2] V^-}{a\mu_1^2 (\bar{\beta}_2^2 - \bar{\beta}_1^2)}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\bar{x}\bar{\beta}_2 [(c-d)\bar{\beta}_1^2 + a\mu_2^2] V^-}{a\mu_2^2 (\bar{\beta}_1^2 - \bar{\beta}_2^2)} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$F(\bar{x}) = \frac{C_0 R(\bar{x})}{(\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2) \mu_1 \mu_2}, \quad C_0 = \left(2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{L}{ad} \right)^{1/2} K_1^{-1}$$

$$\begin{aligned} R(\bar{x}) &= (b\omega^2 - K_1 \bar{x}^2) \sqrt{\frac{a}{b} \mu_2 + a\omega^2 \mu_1} = \frac{adK_1 \sqrt{\frac{a}{b}}}{4(a-d)\omega^2} \{ 4\bar{x}^2 \mu_1 \mu_2 + \\ &+ (\mu_2^2 - \bar{x}^2)^2 + P\omega^2 (\bar{x}^2 + \mu_1 \mu_2) + Q\omega^4 \} (\mu_1 + \mu_2) \end{aligned}$$

$$P = 4K_1^{-1} (Vab - b), \quad Q = \frac{P}{\sqrt{ab}} + \{ b(b-a) + (c+d-b)(c+b-3d) \} \frac{1}{K_1 d^2}$$

$$\Omega^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \tau_{yy} \Big|_{y=0} \exp(-i\bar{x}x) dx, \quad V^- = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} v \Big|_{y=0} \exp(-i\bar{x}x) dx$$

$R(\bar{x})$ есть функция Рэлея, Ω^+ и V^- аналитичны в верхней и нижней полуплоскости \bar{x} . Число и положение точек разветвления функций $\bar{\beta}_n$

на комплексных плоскостях в зависимости от соотношений упругих постоянных изучено в [11]. После выбора ветвей функций $\bar{\mu}_n, \bar{\beta}_n$ легко получить

$$F(\bar{x}) = F^+(\bar{x})F^-(\bar{x}), \quad \bar{\mu}_n = \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{c_n} + \bar{x}}} \sqrt{\frac{\omega}{\sqrt{c_n} - \bar{x}}} = \bar{\mu}_n^+ \cdot \bar{\mu}_n^- \quad (1.5)$$

$$F^\pm(\bar{x}) = \frac{\bar{\alpha}_R \pm \bar{\alpha}}{\bar{\mu}_2^+ \bar{\mu}_1^\mp} \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int \ln \frac{R(\xi) \beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)}{R(\xi) \beta_2(\xi) + \beta_1(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - \bar{x}} \right]$$

здесь $\bar{\alpha}_R = \omega/c_R$ — корень функции Рэлея, где интегрирование проводится по нижнему берегу разреза. Очевидно, что $F^+(\bar{x})$ и $F^-(\bar{x})$ — аналитические и отличные от нуля функции, соответственно, в полуплоскостях $\text{Im}\bar{x} > 0$ и $\text{Im}\bar{x} < 0$. В частном случае при $a=b, c=a-d$ выражения для $F^\pm(\bar{x})$ совпадают с результатом Мауэ [10], а в случае $b=a-c$ с результатом работы [6].

Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$\varphi(aC_0)^{-1} \bar{\mu}_2^- F^-(\bar{x}) V^- = \frac{\Omega^+}{\bar{\mu}_2^+ F^+(\bar{x})} + \frac{P_1 \exp\left(-\frac{ls}{V}\right)}{2\pi\omega \left(\frac{\omega}{V} - \bar{x}\right) \bar{\mu}_2^+ F^+(\bar{x})} \quad (1.6)$$

Левая часть уравнения (1.6) аналитична в нижней полуплоскости \bar{x} , а правая часть — в верхней полуплоскости, кроме точки $\bar{x} = \omega/V$, где имеется простой полюс. Решение уравнения (1.6) имеет вид

$$V^- = iP_1 a C_0 \left[2\pi\omega \left(\bar{x} - \frac{\omega}{V}\right) \bar{\mu}_2^+ \left(\frac{\omega}{V}\right) F^+\left(\frac{\omega}{V}\right) \bar{\mu}_2^-(\bar{x}) F^-(\bar{x}) \right]^{-1} \exp\left(-\frac{ls}{V}\right) \quad (1.7)$$

$$\Omega^+ = \left[\frac{\bar{\mu}_2^+(\bar{x}) F^+(\bar{x})}{\bar{\mu}_2^+\left(\frac{\omega}{V}\right) F^+\left(\frac{\omega}{V}\right)} - 1 \right] \frac{P_1 \exp\left(-\frac{ls}{V}\right)}{2\pi\omega \left(\frac{\omega}{V} - \bar{x}\right)}$$

Подставляя решение (1.7) в (1.3) и проводя обратное преобразование Лапласа по t [8], можно получить

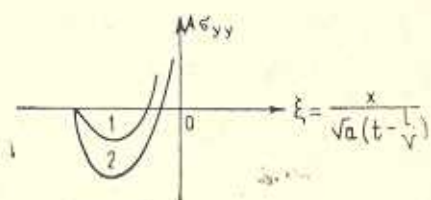
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 2\text{Re} \sum_{n=1}^2 \Phi_n(z_n), & \frac{\partial v}{\partial t} &= 2\text{Re} \sum_{n=1}^2 \Psi_n(z_n) \\ f_n(x) &= t - \frac{l}{V} - \alpha x - y \beta_n(x), & f_n(z_n) &= 0, \quad \bar{x} = \omega z \\ \Phi_n'(x) &= \bar{u}_n \exp\left(\frac{ls}{V}\right), & \Psi_n'(x) &= \bar{v}_n \exp\left(\frac{ls}{V}\right), \quad \bar{\beta}_n = \omega \beta_n \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.8) можно получить значения напряжений на оси $y=0$, ($x < 0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} = -\frac{P_1}{\pi x} \operatorname{Re} i \frac{\mu_2^+(x) F^+(z)}{\left(x - \frac{1}{V}\right) \mu_2^+ \left(\frac{1}{V}\right) F^+ \left(\frac{1}{V}\right)}, \quad x = \frac{t-l/V}{x} \quad (1.9)$$

а для коэффициента интенсивности напряжений ($y=0, x \rightarrow -0$)

$$\sigma_{yy} = \frac{K(t)}{\sqrt{-x}}, \quad K(t) = \frac{P_1}{\pi} \sqrt{t - \frac{l}{V}} \left[\mu_2^+ \left(\frac{1}{V}\right) F^+ \left(\frac{1}{V}\right) \right]^{-1}$$



Фиг. 1. График нормальных напряжений под опорой:

1. Распределение давления на опоре, $t > l/V$
2. Соответствует отражению плоской волны

По формуле (1.9) проведены расчеты на опоре для $b=a, c=a-d, a=2d, V^2=2a^2$. График $A\sigma_{yy}$, $A = \pi/P_1$ приведен на фиг. 1, кривая 1. Как видно, на участке $-0.34 < \xi < 0$, где $\xi = x[\sqrt{a}(t-l/V)]^{-1}$, $\sigma_{yy} > 0$, т.е. имеет место растяжение, при значениях $-1 < \xi < -0.34$ $\sigma_{yy} < 0$ имеет место сжатие. Кривая 2 дает значение σ_{yy} в случае нормального падения плоской волны на полуплоскость.

§ 2. Взрыв на границе полуплоскости вне опоры

В случае, когда взрыв производится при $x=l$ вне опоры, граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= -P_1 z(Vt-x+l)z(Vt+x-l), \quad x > 0 \\ v &= 0, \quad x < 0; \quad \sigma_{xy} = 0 \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

Записывая σ_{yy} в (2.1) как сумму волн, движущихся вправо и влево со скоростью V , можно получить

$$\sigma_{yy} = -\frac{P_1}{s} \left[\sigma(x-l) \exp\left(-\frac{s}{V}(x-l)\right) + z(l-x) \exp\left(-\frac{s}{V}(l-x)\right) \right]$$

и преобразуя в нем Фурье по x будет

$$\bar{\sigma}_{yy} = \Omega^+ + \Omega^-, \quad \Omega^- = \frac{P_1 \exp(-il\bar{z})}{\pi \left(\frac{m^2}{V^2} - \bar{x}^2\right)} - \frac{P_1 \exp\left(-\frac{s\bar{t}}{V}\right)}{2\pi m \left(\frac{\bar{t}}{x} + \frac{m}{V}\right)} \quad (2.2)$$

Ω^+ дается формулой (1.4). Из (2.1) можно получить, как и выше, следующее уравнение Винера-Хопфа:

$$\frac{i\bar{p}}{aC_0} \bar{\mu}_2^- F^-(\bar{z}) V^- = \frac{\Omega^+}{\bar{\mu}_2^+ F^+} + \frac{\Omega^-}{\bar{\mu}_2^+ F^+} \quad (2.3)$$

Решая полученные уравнения и обращая трансформанты [4, 5], можно получить

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -2 \operatorname{Re} i \sum_{m,n=1}^2 \left| \frac{A_{m,n}(x_{m,n})}{f_{m,n}(x_{m,n})} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{A_{3,n}(x_{3,n}) \varphi(\tau) d\tau}{f_{3,n}(x_{3,n})(\tau - x_{3,n})} \right|$$

$$A_{1,1}(x) = P_1 \alpha \beta_1 M_2 \left[\pi \mu_1 (\beta_2 - \beta_1) \left(x^2 - \frac{1}{V^2} \right) R(x) \right]^{-1}, \quad M_n = (c-d) \beta_n^2 + a \mu_n^2$$

$$A_{2,1}(x) = \frac{VP_1 \alpha \beta_1 M_2 F^{-} \left(-\frac{1}{V} \right) \mu_1 \left(-\frac{1}{V} \right) \mu_2 \left(-\frac{1}{V} \right) \left[\beta_1 \left(-\frac{1}{V} \right) + \beta_2 \left(-\frac{1}{V} \right) \right]}{2\pi \mu_1^2(x) \left[\beta_2^2(x) - \beta_1^2(x) \right] R \left(\frac{1}{V} \right) \left(\frac{1}{V} + x \right) \mu_2^{-}(x) F^{-}(x)}$$

$$A_{3,1}(x) = \frac{C_0 \alpha \beta_1 M_2}{\beta_1^2(\beta_1^2 - \beta_2^2) \mu_2^{-}(x) F^{-}(x)}, \quad A_{m,2}(x) = -\frac{M_1}{M_2} A_{m,1}(x)$$

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \varphi_1(\tau) = \frac{P_1 F^{-}(\tau) \mu_2(\tau) \mu_2^{-}(\tau) [\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)]}{\pi^2 C_0 \left(\frac{1}{V^2} - \tau^2 \right) R(\tau)}, & \tau < -\frac{1}{\sqrt{d}} \\ \varphi_2(\tau) = \frac{P_1 F^{-}(\tau) \mu_2(\tau) \mu_2^{-}(\tau) \left[a \mu_1 \beta_2 + (K_1 \tau^2 - b^2) \sqrt{\frac{a}{b}} \mu_2 \beta_1 \right]}{C_0 \pi^2 \left(\frac{1}{V^2} - \tau^2 \right) |R(\tau)|^2} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$f_{m,n}(x_{m,n}) = 0, \quad f_{1,n}(x) = t - (x-l)\alpha - y \beta_n(x), \quad m=1, 2, 3$$

$$f_{2,n}(x) = t - \frac{l}{V} - \alpha x - y \beta_n(x), \quad f_{3,n}(x) = t + l\tau - \alpha x - y \beta_n(x), \quad n=1, 2$$

и подобные значения для $\partial^2 v / \partial t^2$. Решение вблизи волны находится так же, как и в работе [6].

§ 3. Учет движения опоры под действием распространяющейся волны ударного давления

Пусть опора под действием ударного давления вертикально перемещается со скоростью V_0 . Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$\sigma_{yy} = 0, \quad x > 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = V_0 \sigma(Vt - x - l) \sigma(Vt + x + l), \quad x < 0$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad |x| < \infty \quad (3.1)$$

Производя выкладки, как в § 2, можно для (3.1) получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{i\varphi}{aC_0} \mu_2^{-} F^{-} \left(V - + \frac{iV_0 \exp(-sl/V)}{2\pi s^2 \left(\bar{\nu} + \frac{\omega}{V} \right)} \right) + f^{-}(\bar{x}) = \frac{\Omega^{+}}{\mu_2^{+}(x) F^{+}(x)} - f^{+}(x)$$

$$f^+(\bar{x}) + f^-(\bar{x}) = f(\bar{x}) = \frac{i V_0 \rho \mu_2^-(\bar{x}) F^-(\bar{x}) \exp(i \bar{x} l)}{a C_0 \pi s V \left(\bar{x}^2 - \frac{\omega^2}{V^2} \right)}$$

$$f^-(\bar{x}) = \frac{i V_0 \rho \mu_2^-(\omega/V) F^-(\omega/V) \exp(-s l / V)}{2 a C_0 \pi s \omega \left(\bar{x} - \frac{\omega}{V} \right)} + \int_{\frac{\omega}{\sqrt{a}}}^{\infty} \frac{\Psi(\tau)}{\tau - \bar{x}} \exp(\tau i l) d\tau \quad (3.2)$$

$$\Psi(\tau) = \begin{cases} \Psi_1(\tau) = \frac{\rho V_0 R(\tau) (\tau^2 - \omega^2 / V^2)^{-1}}{V \pi^2 s (\beta_1 + \beta_2) \mu_1(\tau) \mu_2^+(\tau)}, & \frac{\omega}{\sqrt{a}} < \tau < \infty \\ \Psi_2(\tau) = \frac{i \rho V_0 \operatorname{Re} [R(\tau) (\beta_2(\tau) + \beta_1(\tau))^{-1}]}{2 \pi^2 s V \sqrt{\tau^2 - \frac{\omega^2}{a}} \mu_2^+(\tau) F^-(\tau) \left(\tau^2 - \frac{\omega^2}{V^2} \right)}, & \frac{\omega}{\sqrt{a}} < \tau < \frac{\omega}{\sqrt{a d}} \end{cases}$$

Здесь V^- , Ω^- даются формулами (1.4) и (2.2), где интегрирование производится по верхнему берегу разреза. Учитывая условие на ребре, из (3.2) получим решение

$$V^- = \frac{V_0 \exp(-s l / V)}{2 \pi s^2 (\bar{x} - \omega / V)} + \frac{i a C_0 f^-(\bar{x})}{\rho \mu_2^-(\bar{x}) F^-(\bar{x})} \quad (3.3)$$

$$\Omega^- = \mu_2^-(\bar{x}) F^+(\bar{x}) [f(\bar{x}) - f^-(\bar{x})] \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (1.3) и проводя обратное преобразование Лапласа по t , получим для $y=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{y3} = & - \frac{V_0 \rho R(1/V)}{a \mu_1(1/V) (\beta_1(1/V) + \beta_2(1/V))} \left\{ \delta \left(t - \frac{x+l}{V} \right) + \delta \left(t + \frac{x+l}{V} \right) \right\} - \\ & - 2 \operatorname{Re} i \rho V_0 R(\tau_1) \left\{ V \pi a \mu_1(\tau_1) (\beta_1(\tau_1) + \beta_2(\tau_1)) \left(\tau_1^2 - \frac{1}{V^2} \right) (l+x) \right\}^{-1} - \\ & - 2 \operatorname{Re} i \frac{\rho V_0 R(\tau_2) \mu_2^-\left(\frac{1}{V}\right) F^-\left(\frac{1}{V}\right) \left(\frac{1}{V} - \tau_2\right)^{-1}}{2 a \pi x \mu_1(\tau_2) (\beta_1(\tau_2) + \beta_2(\tau_2)) \mu_2^-(\tau_2) F^-(\tau_2)} + \\ & + 2 \operatorname{Re} i \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty} R(\tau_2) C_0 \Psi(\tau) [\pi \mu_1(\tau_2) (\beta_1(\tau_2) + \beta_2(\tau_2)) \mu_2^-(\tau_2) F^-(\tau_2) (\tau - \tau_2)]^{-1} d\tau \\ & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\tau_1 = t/(l+x), \quad \tau_2 = (t-l/V)/x, \quad \tau_3 = (t-\tau l)/x, \quad x < 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \operatorname{Re} i \left[\frac{V_0 \rho \mu_2^-(1/V) F^-(1/V)}{\pi x (1/V - \tau_2) \mu_2^-(\tau_2) F^-(\tau_2)} - \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\infty} \frac{2 a C_0 \Psi(\tau) d\tau}{x \rho \mu_2^-(\tau_2) F^-(\tau_2) (\tau - \tau_2)} \right], \quad x > 0 \quad (3.6)$$

Рассмотрим случай, когда взрыв происходит вне опоры и опора движется под действием давления, то есть имеют место следующие граничные условия:

$$\varepsilon_{yy}=0, x>0; \frac{\partial v}{\partial t} = V_0 \varepsilon(Vt-l+x), x<0, \varepsilon_{xy}=0, -\infty < x < \infty \quad (3.7)$$

Для задачи (3.7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{yy} = - \frac{V_0 \rho R \left(\frac{1}{V} \right) \delta \left(t - \frac{l-x}{V} \right)}{\alpha \mu_1 \left(\frac{1}{V} \right) \left(\beta_1 \left(\frac{1}{V} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{V} \right) \right)} + \operatorname{Rei} \frac{V_0 \rho \mu_2^+ \left(\frac{1}{V} \right) F^+ \left(\frac{1}{V} \right) \mu_2^+ (\alpha_2) F^+ (\alpha_2)}{\pi x a C_0 \left(\frac{1}{V} + \alpha_2 \right)} \quad x < 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \operatorname{Rei} \frac{V_0 \rho \mu_2^+ \left(\frac{1}{V} \right) F^+ \left(\frac{1}{V} \right)}{\pi x \left(\frac{1}{V} + \alpha_2 \right) \mu_2^- (\alpha_2) F^- (\alpha_2)}, \quad x > 0 \quad (3.9)$$

Для решения задачи, когда взрыв производится на опоре и опора движется под действием давления P_1 со скоростью V_0 , то есть для граничной задачи

$$\varepsilon_{yy} = -P_1 \varepsilon(Vt-l-x), x>0; \varepsilon_{xy} = 0, |x| < \infty$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V_0 \varepsilon(Vt-l-x) \varepsilon(Vt+l+x), x < 0 \quad (3.10)$$

решение можно получить как сумму решения задач (1.2) и (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{yy} = & - \frac{V_0 \rho R \left(\frac{1}{V} \right)}{\alpha \mu_1 \left(\frac{1}{V} \right) \left(\beta_1 \left(\frac{1}{V} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{V} \right) \right)} \left\{ \delta \left(t - \frac{l+x}{V} \right) + \delta \left(t + \frac{l+x}{V} \right) \right\} + \\ & + \operatorname{Rei} \frac{\mu_2^+ (\alpha_2) F^+ (\alpha_2)}{\pi x \left(\alpha_2 - \frac{1}{V} \right) \mu_2^+ \left(\frac{1}{V} \right) F^+ \left(\frac{1}{V} \right)} \left\{ \frac{V_0 \rho R (1/V)}{a \left(\beta_1 \left(\frac{1}{V} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{V} \right) \right) \mu_1 \left(\frac{1}{V} \right)} - P_1 \right\} + \\ & + 2 \operatorname{Rei} \int_{\frac{l}{V}}^{\infty} \frac{C_0 R(\alpha_2) \Psi(\tau) d\tau}{x \mu_1(\alpha_2) (\beta_2(\alpha_2) + \beta_1(\alpha_2)) \mu_2^-(\alpha_2) F^-(\alpha_2) (\tau - \alpha_2)} - \\ & - 2 \operatorname{Rei} \rho V_0 R(\alpha_1) \left\{ \pi a V \mu_1(\alpha_1) (\beta_1(\alpha_1) + \beta_2(\alpha_2)) \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{V^2} \right) (l+x) \right\}^{-1} \end{aligned}$$

Аналогичная формула получится для $\partial^2 v / \partial t^2$.

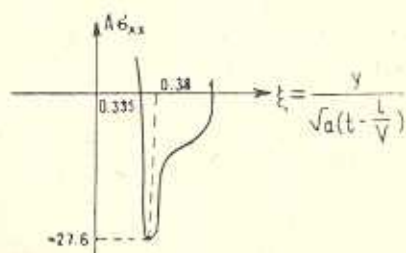
Когда $V \rightarrow \infty$, решение можно записать в виде

$$\varepsilon_{yy} = -V_0 \sqrt{\bar{b}} \varepsilon(t) + (V_0 \sqrt{\bar{b}} - P_1) \operatorname{Rei} \int_{\frac{l}{V}}^{t/x} \frac{\mu_2^+ (t/x) F^+ (t/x) \sqrt{\bar{a}} dt}{\pi t F^+ (0)}, \quad x < 0$$

$$F^+(0) = F^-(0) = -\frac{1}{\sqrt{K_1}} (ab(L + 2d\sqrt{ab})^{1/4})$$

График интеграла подобен кривым фиг. 1, причем знак $\sigma_{yy} + V_0 \rho \sqrt{b}$ дается $\rho V_0 \sqrt{b} - P_1$. Кроме того, определено σ_{xx} при $x=0$, $b=a$, $c = a-d$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{P_1 \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (2-\eta)(1+\eta) \left[\sqrt{\eta-1} \left(1 - \frac{3}{4\eta} \right) \left(\frac{1}{\eta} + 3,62 \right) \cdot 2,25 \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ [1,07(\sqrt{1+\eta} - \sqrt{\eta-1}) - (\eta-1)\sqrt{\eta+1} + 2,15(\eta-1)] \cos \varphi - \right. \\ &- \left. \left[2,55\sqrt{\eta^2-1} + (\eta-1) \left(\sqrt{\eta-1} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin \varphi \right\} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left[\frac{\pi}{2} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \arctg \frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2 \sqrt{\theta^2-1} \sqrt{4-\theta^2}} \right] \left[\frac{\theta}{\theta^2+\eta-1} + \frac{2}{2\theta+1} \right] d\theta \right\} + \\ &+ \frac{\sqrt{\eta-4} (0,62+\eta)^{-1}}{2,55\sqrt{3} \left(\eta^{-1} - \frac{15}{4\eta^2} \right)} \{ (5,07-\eta) \sqrt{1+\sqrt{\eta-3}} + 2,55\sqrt{\eta-4} \times \\ &\times \sqrt{\sqrt{\eta-3}-1} \cos \varphi_1 - [2,55\sqrt{\eta-4} \sqrt{1+\sqrt{\eta-3}} + (\eta-5,07) \sqrt{\sqrt{\eta-3}-1}] \times \\ &\times \sin \varphi_1 \} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2 \sqrt{\theta^2-1} \sqrt{4-\theta^2}} \right] \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\theta}{\theta^2+\eta-4} + \frac{2}{2\theta+1} \right) d\theta \right\} \\ \varphi &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2 \sqrt{\theta^2-1} \sqrt{4-\theta^2}} \right] \frac{\sqrt{\eta-1}}{\theta^2+\eta-1} d\theta \\ \varphi_1 &= \frac{1}{\pi} \int_1^2 \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(2-\theta^2)^2}{\theta^2 \sqrt{\theta^2-1} \sqrt{4-\theta^2}} \right] \frac{\sqrt{\eta-4}}{\theta^2+\eta-4} d\theta \\ \eta &= \xi^{-2} \end{aligned}$$



Фиг. 2. График нормальных напряжений на оси y при заданном распределении давления на твердой опоре

По глубине для значений $0 < \xi < 1$,

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{a(t-l/V)}}, \quad a = 4d, \quad V^2 = 4a$$

сделаны вычисления $A\sigma_{xx}$, которые приведены на графике фиг. 2, откуда получится, что около границы $x=0$, $\sigma_{xx} > 0$ и имеет место растяжение, а дальше — сжатие. Полученные графики позволяют изучить поле напряжений, которые пока-

зывают действие ударной волны от взрыва на грунт при наличии опоры.

В заключение отметим, что методом [12, 13] можно получить решение и в случае произвольного закона движения края опоры.

THE SHOCK WAVE PROPAGATION IN HALF-SPACE THE PART OF BOUNDARY OF WHICH HAS RIGID SUPPORT

A. N. MARTIROSIAN

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱՐԻԲ ԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԵՋՐԻ ՄԻ ՄԱՍՈՒՄ ԿՈՇՏ ՀԻՄՔ ՈՐԵՆՑՈՂ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ո ս մ

Իրատարկվում է հարվածային ալիքի թափանցման խնդիրը առանցական կիսահարթություն, որի կզրագծի մի մասն ունի կոշտ հիմք: Հարթ խնդրի լուծումը դանված է կապլաուի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով և Վրներ-Հոպֆի հավասարման լուծումով և լուծումը բերված է Սմիր-Նով-Սորոլիի փակ տեսքի: Լուծվում են մասնակի խնդիրները միջավայրի կզրի վրա հարթ ալիքի, կենտրոնացված իմպուլսի և հիմքի վրա կամ նրանից դուրս պայթյունից կիսատարածության կզրով տարածվող հարվածային ալիքի վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости.—Изд. Московского университета, 1970, с. 121.
2. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии.—Уч. зап. ЛГУ, сер. мат. 1951, № 149, вып. 24, с. 3—117.
3. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные задачи движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1961, 276 с.
4. Свекло В. А. К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.—ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
5. Norris A. N., Achenbach J. D. Elastic wave diffraction by anisotropic material.—Quarterly Journal Mech. Appl. Mat. ematic, 1984, № 4, p. 565—580.
6. Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н. Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.—МТТ, 1976, № 1, с. 107—117.
7. Freund L. B. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading.—J. Mech. Phys. Solids, v. 20 1972, 1, p. 129, II, p. 141.
8. Багдоев А. Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1974, т. 27, № 2, с. 13—23.

9. Флитман Л. М. Волны, вызванные мгновенным разрывом сплошной упругой среды.—ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 618—628
10. Maue A. W. Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. —ZAMM, 1954, bd. 34, H. 1/2.
11. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника.—ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 548—555.
12. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле.—МТТ, 1979, № 4, с. 54—72.
13. Vakez V. R. Dynamic stresses created by a moving crack. —Trans ASME, Ser. E. J., Appl. Mech., 1962, v. 29, № 3, p. 3—12.

Горисский филиал Армиединститута им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
8.VII.1986