

УДК 539.375

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ  
 (ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ)<sup>1</sup>

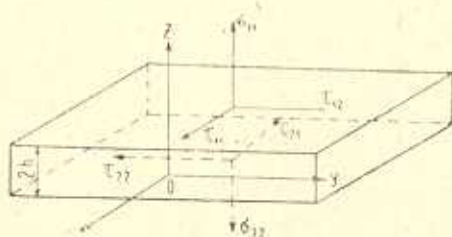
КОВАЛЕНКО Е. В.

В настоящее время исследование контактных задач для тел с покрытиями представляет собой актуальную прикладную проблему. С одной стороны, практика современного машиностроения все в большей степени подчеркивает определяющее значение поверхностной прочности в проблеме надежности работы машин и механизмов. С другой стороны, такие задачи встречаются при расчетах различных сооружений и конструкций, как например, аэродромных и дорожных покрытий, ледовых переправ, фундаментов зданий и т. д.

В работе приводятся: 1) уточненные уравнения пространственного деформирования тонких покрытий (пластин); 2) постановки и методы решения контактных задач для тел с покрытиями; 3) алгоритмы исследования контактных задач для тел с покрытиями с учетом износа последних.

Изучается влияние различных механических факторов на основные характеристики явления контактного взаимодействия тел.

1. Прежде чем перейти к постановке контактных задач, приведем уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние тонких<sup>2</sup> покрытий (фиг. 1), одновременно учитывающие как продольные и поперечные деформации растяжения и сдвига, так и их деформации изгиба и сжатия



Фиг. 1

$$4Gh^2\Delta^2 u_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} A_1^{\pm}(\sigma) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_2^{\pm}(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_3^{\pm}(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_4^{\pm}(\tau_2) \quad (1.1)$$

$$4Gh^2\Delta^2 v_{\pm} = \frac{\partial}{\partial y} A_1^{\pm}(\sigma) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_3^{\pm}(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_2^{\pm}(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_4^{\pm}(\tau_1) \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Работа докладывалась на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент, 1986).

<sup>2</sup> Пусть  $\Omega$ —область активного нагружения слоя, то есть такая область, где поверхностные нагрузки составляют, например, не менее 5% от их максимальных значений. Если  $\Omega$  односвязна, выпукла и ограничена, то  $\lambda = hl^{-1} \ll 1$ , где  $l = \sqrt{1.2 \max \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ,  $(\xi, \eta) \in \Omega$

$$4Gh^3\Delta^2 w_{\pm} = B_1^{\pm}(\sigma) + \frac{\partial}{\partial x} B_2^{\pm}(\tau_1) + \frac{\partial}{\partial y} B_2^{\pm}(\tau_2) \quad (1.3)$$

Здесь обозначено (положительные направления внешних усилий указаны на фиг. 1)

$$u_{\pm} = u(x, y, \pm h), \quad v_{\pm} = v(x, y, \pm h), \quad w_{\pm} = w(x, y, \pm h)$$

$$A_1^{\pm}(f) = \mp 3(1-\nu)f^{\pm} \pm (2-3\nu)h^2\Delta f^{\pm} - h^2\Delta^2 f^{\pm}$$

$$A_2^{\pm}(f) = (1-\nu)h(-f^{\pm} \mp 3f^{\pm} + 6/5h^2\Delta f^{\pm} \pm 2h^2\Delta^2 f^{\pm})$$

$$A_3^{\pm}(f) = 2h(-f^{\pm} + 13/15 h^2\Delta f^{\pm} \pm h^2\Delta^2 f^{\pm})$$

$$A_4^{\pm}(f) = h \left[ (1+\nu)f^{\pm} \mp 3(1-\nu)f^{\pm} - \frac{2(4+9\nu)}{15} h^2\Delta f^{\pm} + 2\nu h^2\Delta^2 f^{\pm} \right]$$

$$B_1^{\pm}(f) = 3(1-\nu) \left( f^{\pm} - \frac{4}{3} h^2\Delta f^{\pm} + \frac{11}{15} h^4\Delta^2 f^{\pm} \mp \frac{1}{3} h^4\Delta^2 f^{\pm} \right)$$

$$B_2^{\pm}(f) = \pm \nu h^3\Delta f^{\pm} + 3h(1-\nu)f^{\pm} - (2-3\nu)h^3\Delta f^{\pm}$$

$$f = \{f^{\pm}, f^{\mp}\}, \quad \sigma = \{\sigma^{\pm}, \sigma^{\mp}\}, \quad \sigma^{\pm} = \sigma_1 \pm \sigma_2, \quad \tau_j = \{\tau_j^{\pm}, \tau_j^{\mp}\}, \quad \tau_j^{\pm} = \tau_{1j} \pm \tau_{2j} \quad (j=1, 2)$$

Такие уравнения могут быть получены путем асимптотического анализа точного решения первой основной задачи теории упругости для слоя.

Если при выводе уравнений (1.1)–(1.3), вследствие малости параметра  $\lambda = h l^{-2}$  провести усреднение перемещений по толщине, то придем к следующим упрощенным уравнениям деформирования покрытий (пластин)

$$4Gh\Delta^2 w_{*} = \frac{\partial}{\partial x} A_1(\tau^+) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_2(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_3(\tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_4(\tau_2) \quad (1.4)$$

$$4Gh\Delta^2 v_{*} = \frac{\partial}{\partial y} A_1(\tau^+) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_3(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_2(\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_4(\tau_1) \quad (1.5)$$

$$4Gh^3\Delta^2 w_{*} = B_1(\sigma) + \frac{\partial}{\partial x} B_2(\tau_1^+) + \frac{\partial}{\partial y} B_2(\tau_2^+) \quad (1.6)$$

$$A_1(f) = -\nu h \Delta f, \quad A_2(f) = -(1-\nu)f + \frac{1-2\nu}{3} h^2 \Delta f, \quad A_3(f) = -2f + \frac{1}{3} h^2 \Delta f$$

$$A_4(f) = (1+\nu)f - \frac{1+2\nu}{3} h^2 \Delta f, \quad B_1(f) = 3(1-\nu)f - (3-2\nu)h^2 \Delta f + \frac{3-2\nu}{5} h^4 \Delta^2 f$$

$$B_2(f) = 3(1-\nu)hf - (1-\nu)h^3 \Delta f$$

которые в отличие от (1.1)–(1.3) не учитывают эффекта поперечного обжатия покрытия.

Соотношения (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6) есть уточненные дифференциальные уравнения деформирования тонких пластин. Заметим, что уравнения всех классических теорий деформирования тонкостенных упругих элементов [1] получаются из (1.1)–(1.6) как

частные случаи. Действительно, пренебрегая в правой части (1.3) (либо (1.6)) слагаемыми порядка  $\lambda^2$  и выше, приходим к модели пластинки типа Кирхгофа-Лява. Если же в (1.3) или в (1.6) отбросить лишь слагаемые  $O(\lambda^4)$ , то получим уравнения теории типа Рейсснера-Тимошенко. Опуская еще в левой и правой частях соотношения (1.3) слагаемые порядка  $\lambda^2$  и выше (то есть изгибной жесткостью покрытия пренебрегаем), а в правой части (1.1) и (1.2) члены  $O(\lambda^3)$  и преобразуя два последующих выражения при помощи первого, найдем

$$4Gh\Delta^2 u_{\pm} = -\nu h\Delta \frac{\partial \tau_1^+}{\partial x} - \Delta \tau_1^+ + \nu \frac{\partial^2 \tau_1^-}{\partial x^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_2^-}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_1^-}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

$$4Gh\Delta^2 v_{\pm} = -\nu h\Delta \frac{\partial \tau_2^+}{\partial y} - \Delta \tau_2^+ + \nu \frac{\partial^2 \tau_2^-}{\partial y^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_1^-}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_2^-}{\partial x^2}$$

$$\sigma = -h \left( \frac{\partial \tau_1^+}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2^+}{\partial y} \right)$$

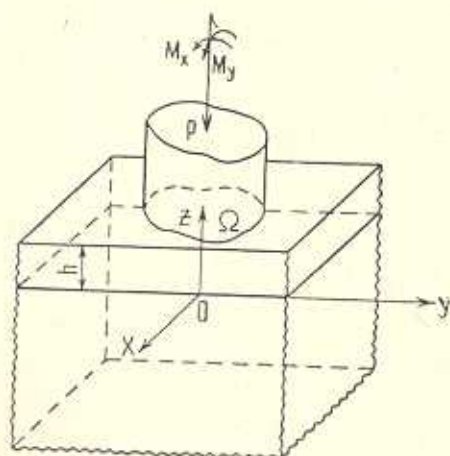
Соотношения (1.7) представляют собой уравнения пространственного деформирования накладки Мелана.

В частном случае  $\tau_1 = u = v = w = 0$  из (1.1)–(1.3) с точностью до членов  $O(\lambda)$  получим уравнение основания Фусса-Винклера с одним коэффициентом постели

$$i\omega \omega_0 = (1-2\nu)(1-\nu)^{-1} h \tau_1, \quad \tau_1 = \tau_2 \quad (1.8)$$

Если при выводе (1.1)–(1.3) удерживать члены порядка  $\lambda^0$ , то вместо (1.8) можно получить уравнения основания Пастернака-Власова с двумя коэффициентами постели [2].

И еще, использование уравнений (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6) при решении контактных задач для тонких покрытий не приводит, как при использовании уравнений классических теорий (Рейсснера-Тимошенко, Кирхгофа-Лява), к появлению на границах сопряжения участков сосредоточенных усилий или моментов.



Фиг. 2

2. Рассмотрим теперь контактную задачу о вдавливании без трения силой  $P$  и моментами  $M_x, M_y$  жесткого штампа в составное основание, представляющее собой упругое  $(G_2, \nu_2)$  полупространство, армированное относительно тонким  $(i = ht^{-1} \ll 1)$  упругим  $(G_1, \nu_1)$  слоем толщины  $h$ , жестко соединенным с ним (фиг. 2). Физико-механические свойства полупространства будем описывать уравнениями теории упругости (уравнениями Ламе), а покрытия — уравнениями (1.1)–(1.3) или (1.4)–(1.6). Тогда при помощи

интегрального преобразования Фурье поставленная задача сводится к определению контактных давлений  $q(x, y)$  из интегрального уравнения первого рода вида

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \zeta(\xi, \eta) k\left(\frac{R}{h}\right) d\xi d\eta = 2\pi h b_0 g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad R = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2} \quad (2.1)$$

$$k\left(\frac{R}{h}\right) = \int_0^{\infty} L(u) J_0\left(\frac{uR}{h}\right) du \quad (2.2)$$

в котором  $g(x, y)$  — функция осадки линейно-деформируемого основания, определяемая формой основания штампа и его жестким смещением

$$nL(u) = \left(\sum_{j=0}^4 a_{1j} u^j\right) \left(\sum_{j=0}^4 b_{1j} u^j\right)^{-1} \quad (2.3)$$

$$a_{i0} = n, \quad b_{i0} = 1 \quad (i=1, 2)$$

$$a_{11} = 2[(1-\varepsilon_2^2)n^2 - \varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)n + \varepsilon_1(1-\varepsilon_1)], \quad a_{12} = 32/15 n$$

$$a_{13} = 1/6[4(1-\varepsilon_2^2)n^2 - \varepsilon_2(1-8\varepsilon_1)n + \varepsilon_1(1-4\varepsilon_1) + 39/10] \quad (2.4)$$

$$a_{14} = 47/60 n, \quad b_{11} = 2n, \quad b_{12} = 2(\varepsilon_2 n - \varepsilon_1 + 16/15), \quad b_{13} = 4/3 n$$

$$b_{14} = 1/3[(1-\varepsilon_2^2)n^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 n - \varepsilon_1^2 + 8/5]$$

$$a_{21} = 2(1-\varepsilon_2^2)n^2 - \varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)n, \quad a_{22} = (1+2\varepsilon_1)n/12$$

$$a_{23} = 1/6(2-\varepsilon_1)n[2n(1-\varepsilon_2^2) - \varepsilon_2(1-2\varepsilon_1)], \quad a_{24} = \frac{n}{36} \left( \varepsilon_1^2 - \frac{3+16\varepsilon_1}{20} \right) \quad (2.5)$$

$$b_{21} = b_{11}, \quad b_{22} = \varepsilon_2 n - 1/6(5\varepsilon_1 - 7/2), \quad b_{23} = 1/6(5 - 2\varepsilon_1)n$$

$$b_{24} = 1/6[2(1-\varepsilon_1^2)n^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 n + 1/6(\varepsilon_1^2 - 19/5\varepsilon_1 + 27/20)]$$

Здесь формулы (2.4) и (2.5) соответствуют случаям, когда физико-механические свойства тонкого верхнего слоя моделируются уравнениями (1.1)–(1.3) и (1.4)–(1.6).

В (2.1)–(2.5) обозначено

$$n = b_1 b_2^{-1}, \quad b_i = G_i(1-\nu_i)^{-1}, \quad \varepsilon_i = 1/2(1-2\nu_i)(1-\nu_i)^{-1} \quad (i=1, 2)$$

Для замыкания постановки контактной задачи о вдавливании штампа в двухслойное основание к интегральному уравнению (2.1)–(2.3) необходимо еще добавить очевидные условия статики

$$P = \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy, \quad \{M_x, M_y\} = \iint_{\Omega} \{y, x\} q(x, y) dx dy$$

Остановимся теперь на асимптотическом анализе [3] рассматриваемой контактной задачи, считая

$$n \sim \lambda^m \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (2.6)$$

где при  $m > 0$  жесткость ложемент (упругого полупространства) больше жесткости покрытия, а при  $m < 0$  наоборот, жесткость полупространства меньше жесткости верхнего упругого слоя.

При проведении дальнейших рассуждений будем подразумевать, что в формулах (2.2), (2.3) совершен переход к новой переменной  $u = u'$ , и штрих у нее опущен.

Если  $m > 0$ , то внося (2.6) в (2.3), (2.4) и пренебрегая в полученном выражении слагаемыми порядка  $\lambda^2$  и выше, придем к соотношению

$$nL(u) = n + 2\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1)u \quad (2.7)$$

что соответствует трансформанте Фурье ядра интегрального уравнения (2.1), когда покрытие работает по типу основания Фусса-Винклера (1.8). Если же  $m \geq 5$ , то с точностью до членов  $O(\lambda^4)$  из (2.3), (2.4) получим символ ядра контактной задачи для защемленного по нижней грани слоя, лежащего на жестком основании.

Изучим далее случаи, когда жесткость покрытия больше жесткости ложемент. Пусть в (2.6)  $m = -1$ . Подставляя (2.6) в (2.3), (2.4) с точностью до членов  $O(\lambda^3)$ , получим выражения (2.3), (2.5), т. е. в этом случае в качестве модели покрытия можно выбрать уравнения (1.4) — (1.6) (показано также [3], что с точностью до членов порядка  $\lambda^3$  физико-механические свойства покрытия можно описывать уравнениями типа Рейсснера-Тимошенко). Отбрасывая же члены  $O(\lambda^2)$  и выше, будем иметь

$$L(u) = \frac{1 + 2n(1 - \varepsilon_2^2)u}{1 + 2nu} \quad (2.8)$$

что указывает на то, что покрытие работает по типу накладки (1.7). При  $m \leq -2$  из (2.3), (2.5), (2.6) с точностью до членов  $O(\lambda^2)$  заключаем, что физико-механические свойства покрытия можно моделировать при помощи уравнений типа Кирхгофа-Лява.

И вообще, при  $m > 0$  с точностью до членов  $O(\lambda^4)$ , а при  $m < 0$  с точностью до членов порядка  $\lambda^3$ , как показывает асимптотический анализ, проведенный с использованием формул теории упругости [3], физико-механические свойства покрытия следует описывать уравнениями (1.1) — (1.3).

Таким образом, приведенный асимптотический анализ дает возможность выбирать приближенные модели для описания свойств покрытий в зависимости от соотношений физико-механических и геометрических характеристик относительно тонкого упругого слоя и массивного тела, что в некоторых случаях проще, чем использование уравнений теории упругости, поскольку позволяет решить ряд задач для тел с покрытиями в замкнутом виде.

3. Приведем теперь алгоритм решения интегрального уравнения (2.1) — (2.3) на примере осесимметричной задачи для кольцевого в

плане штампа ( $\Omega: b \leq r \leq a$ ). Ограничимся ниже рассмотрением двух предельных случаев (2.7) и (2.8). Вводя безразмерные переменные  $\rho = \rho a^{-1}$ ,  $r' = r a^{-1}$  и обозначения  $c = b a^{-1}$ ,  $\varphi(r') = q(r) \theta_2^{-1}$ ,  $g'(r') = g(r) a^{-1}$ ,  $l = h a^{-1}$ ,  $\Lambda = 2a\lambda$ ,  $N_0 = P(\theta_2 a)^{-1}$ ,  $l = (1 - \varepsilon_2^2)^{-1}$ , преобразуем (2.1)–(2.3) соответственно для вариантов (2.7) и (2.8) к виду ( $K(k)$ -полный эллиптический интеграл первого рода)

$$\mu \varphi(r) + \frac{2}{\pi} \int_c^1 \varphi(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) \frac{\rho d\rho}{\rho+r} = g(r), \quad (c \leq r \leq 1, \mu = 2\varepsilon_1(1 - \varepsilon_1) l n^{-1}) \quad (3.1)$$

$$\int_c^1 \varphi(\rho) \rho k\left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right) d\rho = \Lambda l g(r) \quad (c \leq r \leq 1) \quad (3.2)$$

$$k\left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l+u}{u+1} J_0\left(\frac{u}{\Lambda} \rho\right) J_0\left(\frac{u}{\Lambda} r\right) du \quad (3.3)$$

Штрих здесь и ниже опустим. Заметим, что имеют место следующие теоремы [4, 5].

**Теорема 1. Оператор**

$$H_1 \varphi = \frac{2}{\pi} \int_c^1 \varphi(\rho) K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) \frac{\rho d\rho}{\rho+r} \quad (3.4)$$

является вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим из  $L_2(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$ .

**Теорема 2. Оператор**

$$H_2 \varphi = \int_c^1 \varphi(\rho) \rho k\left(\frac{\rho}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda}\right) d\rho \quad (3.5)$$

где  $k(\rho \Lambda^{-1}, r \Lambda^{-1})$  дается формулой (3.3), является вполне непрерывным и положительно определенным, действующим в  $L_{2,1/2}(\Omega)$ .

Здесь  $L_2(\Omega)$  и  $L_{2,1/2}(\Omega)$  — гильбертовы пространства квадратично суммируемых соответственно с весом 1 и  $[(1-r^2)(r^2-c^2)]^{-1/2}$  по области  $\Omega$  функций.

Из теорем 1 и 2 следует [6]: 1) системы собственных функций  $\{\varphi_n^{(j)}(r)\}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) операторов  $H_j \varphi$  ( $j=1, 2$ ) ортонормированы и полны в  $L_2(\Omega)$  ( $j=1$ ) и в  $L_{2,1/2}(\Omega)$  ( $j=2$ ); 2) собственные числа  $\lambda_n^{(j)}$  операторов  $H_j \varphi$  вещественны, положительны и  $\lambda_1^{(j)} > \lambda_2^{(j)} > \dots > \lambda_n^{(j)} > \dots > 0$ ,  $\lambda_n^{(j)} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (как правило, в смешанных задачах механики сплошных сред [5] собственные числа интегральных операторов не бывают кратными).

Для построения собственных чисел и соответствующих им собственных функций можно воспользоваться, например, методом Рунца

[7], взяв в качестве последовательностей координатных функций в первом случае систему

$$\{P_n^*(r)\} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad P_n^*(r) = \sqrt{\frac{4n+2}{1-c^2}} P_n \left( \frac{1+c^2}{1-c^2} - \frac{2}{1-c^2} r^2 \right)$$

а во втором

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_{2n} \left( \sqrt{\frac{r^2-c^2}{1-c^2}} \right) \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

где  $P_n(x)$  и  $T_n(x)$  — полиномы Лежандра и Чебышева. Определив  $\{\varphi_n^{(1)}\}$  и  $\{\varphi_n^{(2)}(r)\}$  будем разыскивать решения интегральных уравнений (3.1) и (3.2) в формах

$$\varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \varphi_n^{(1)}(r), \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-c^2)}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \varphi_n^{(2)}(r) \quad (3.6)$$

Разлагая еще правые части в (3.1) и (3.2) в ряды вида

$$g_j(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(j)} \varphi_n^{(j)}(r) \quad (3.7)$$

$$b_n^{(1)} = \int_c^1 g_1(r) \varphi_n^{(1)}(r) r dr, \quad b_n^{(2)} = \int_c^1 \frac{g_2(r) r dr}{\sqrt{(1-r^2)(r^2-c^2)}}$$

подставляя (3.6), (3.7) в (3.1), (3.2) и приравнявая в полученных соотношениях коэффициенты при собственных функциях операторов  $H_j \varphi$  ( $j=1, 2$ ) одинакового номера, найдем

$$a_n^{(1)} = \frac{b_n^{(1)}}{\lambda_n^{(1)}}, \quad a_n^{(2)} = M \frac{b_n^{(2)}}{\lambda_n^{(2)}} \quad (3.8)$$

и, таким образом, построим решения исходных интегральных уравнений в формах (3.6) — (3.8).

4. Коснемся еще контактных задач с износом. Как известно [8, 9], осесимметричная контактная задача при наличии абразивного износа о вдавливание кольцевого в плане штампа ( $c \leq r \leq 1$ ) в упругое полупространство, армированное тонким покрытием (фиг. 3), в безразмерных переменных и с учетом обозначений, введенных в [8], сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) + \frac{2}{\pi} \int_c^1 \varphi(\rho, t) K \left( \frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r} \right) \frac{\rho d\rho}{\rho+r} = \\ = \gamma(t) - f(r) - r \int_0^t \varphi(r, \tau) d\tau \quad (c \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq T < \infty) \end{aligned} \quad (4.1)$$

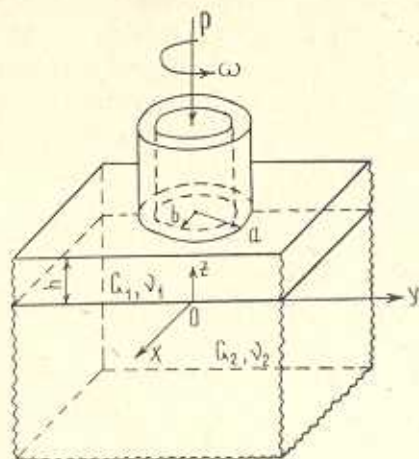
когда покрытие «мягче» ложеамента и к уравнению

$$\frac{1}{\Lambda L} \int_c^1 \varphi(r, t) r k \left( \frac{r}{\Lambda}, \frac{r}{\Lambda} \right) dr = \quad (4.2)$$

$$= \gamma(t) - f(r) - r \int_0^t \varphi(r, \tau) d\tau$$

$$(c \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T < \infty)$$

когда жесткость покрытия больше жесткости полупространства. Здесь и далее предполагаем, что величина  $T$  достаточно большая, но такая, что  $\gamma(t)$  имеет порядок перемещений в линейной теории упругости. Уравнения (4.1) и (4.2) имеют место при выполнении условия



Фиг. 3

$$N_0(t) = 2\pi \int_c^1 r \varphi(r, t) dr \quad (4.3)$$

Отмечено [8], что представляют интерес два основных варианта задач (4.1)–(4.3): 1) задается функция  $\gamma(t)$ , характеризующая перемещение штампа как жесткого целого, находятся контактное давление  $\varphi(r, t)$  и сила  $N_0(t)$ , прижимающая штамп к основанию; 2) задается  $N_0(t)$ , находятся  $\varphi(r, t)$  и  $\gamma(t)$ . В обоих случаях по формулам (1.2), (1.3) работы [8] затем определяется скорость изнашивания покрытия.

Остановимся вначале на первом варианте системы (4.1), (4.3) и допустим, что жесткое перемещение штампа  $\gamma(t)$  изменяется во времени по закону

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_\infty t + \gamma_*(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.4)$$

$$\gamma_*(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty); \quad \gamma_0, \gamma_\infty = \text{const}$$

Если еще потребовать, чтобы  $\gamma(t) \in C(0, T)$ , то, как показано в [8], контактное напряжение  $\varphi(r, t)$  имеет следующую структуру:

$$\varphi(r, t) = r^{-1} \varphi_\infty + \varphi_*(r, t), \quad \varphi_\infty = \gamma_\infty \quad (4.5)$$

причем  $\varphi_*(r, t)$  экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство и (4.5) позволяют упростить интегральное уравнение (4.1) следующим образом [10]:

$$\mu r \varphi(r, t) + H_1 \varphi(r, t) = \gamma(t) - f(r) - r \int_0^t \varphi(r, \tau) d\tau - \varphi(r) \quad (4.6)$$

$$\Phi(r) = \frac{1-r}{T} \int_0^t \varphi(r, \tau) d\tau \quad (c \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T)$$



Решение последнего, в предположении задания функции  $\gamma_1(t)$  вида (4.4), сводится [10] к спектральной задаче для оператора  $H_{12}$  (3.4). При этом, как следует из формулы (4.3), сила  $N_0(t)$ , прижимающая штамп к основанию, стремится к постоянному значению при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть теперь

$$N_0(t) = N_\infty + N_*(t); \quad N_\infty = \text{const}, \quad N_*(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.7)$$

Тогда, на основании вышесказанного, контактное напряжение  $\varphi(r, t)$  и осадка  $\gamma(t)$  изменяются во времени по законам (4.4), (4.5), причем  $N_\infty = 2\pi(1-c)\varphi_\infty = 2\pi(1-c)\gamma_\infty$ , если потребовать в соответствии с условием (4.3) и представлением

$$\varphi_*(r, t) = r^{-2}[\varphi_1(t) + \varphi_2(r, t)] \quad (4.8)$$

чтобы

$$\int_c^1 \varphi_2(r, t) dr = 0, \quad 2\pi \int_c^1 \varphi_1(t) dr = 2\pi(1-c)\varphi_1(t) = N_*(t) \quad (4.9)$$

Перейдем, как и ранее, от интегрального уравнения (4.1) к приближенному уравнению (4.6), которое эквивалентно следующей системе:

$$(\mu + D)[\varphi_1(t) - \varphi_1(0)] + \int_0^t \varphi_1(\tau) d\tau = \gamma_*(t) - \gamma_*(0) - \int_c^1 [\varphi_2(\rho, t) - \varphi_2(\rho, 0)] B(\rho) d\rho \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \mu[\varphi_2(r, t) - \varphi_2(r, 0)] + \frac{2}{\pi} \int_c^1 [\varphi_2(\rho, t) - \varphi_2(\rho, 0)] k^0(\rho, r) d\rho + \\ & + \int_0^t \varphi_2(r, \tau) d\tau = g(r, t) \quad (c \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq T) \end{aligned}$$

$$k^0(\rho, r) = \frac{1}{\rho+r} K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) - \frac{\pi}{2} [B(\rho) + B(r)] \quad (4.11)$$

$$g(r, t) = [\varphi_1(t) - \varphi_1(0)] [D - (1-c)B(r)], \quad D = (1-c) \int_c^1 B(r) dr$$

$$B(\rho) = \frac{2}{\pi(1-c)} \int_c^1 K\left(\frac{2\sqrt{\rho y}}{\rho+y}\right) \frac{dy}{\rho+y}$$

Заметим, что ядро  $k^0(\rho, r)$  вида (4.11) симметрично и обладает свойством

$$\int_c^1 \int_c^1 \varphi_2(\rho, t) k^0(\rho, r) d\rho dr = 0$$

На основании этого и первой формулы (4.9) введем в рассмотрение пространство  $L_c^0(c, 1)$  функций, интегрируемых с квадратом, среднее значение которых на сегменте  $[c, 1]$  равно нулю. Можно показать, что  $L_c^0(c, 1)$  является подпространством  $L_2(c, 1)$ .

Теорема 3 [10]. Интегральный оператор

$$H_3\varphi = \frac{2}{\pi} \int_c^1 z(\rho) k^0(\rho, r) d\rho \quad (4.12)$$

является вполне непрерывным и положительно определенным оператором, действующим в  $L_c^0(c, 1)$ .

Теорема 3 указывает на то, что решение системы (4.10), (4.11) можно построить, используя собственные функции оператора  $H_3\varphi$  (4.12), то есть в случае задания силы  $N_0(t)$  вида (4.7) решение интегрального уравнения (4.1) сводится к спектральной задаче для оператора  $H_3\varphi$  [10].

Аналогичным образом может быть исследовано [10, 11] и интегральное уравнение (4.2), (4.3).

## CONTACT PROBLEMS FOR COATED BODIES (SETTING AND METHODS FOR SOLUTION)

E. V. KOVALENKO

### ՄԱՍԿՈՒՅԹՈՎ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՆՏԻՐՆԵՐ

Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Շերտի համար առաձգականության տեսության առաջին հիմնական խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծության հիման վրա բերվում են բարակ ծածկույթի ընդհանուր տարածական դեֆորմացման էշտրոմված հավասարումները, որոնց օգնությամբ դրվում են ծածկույթով մարմինների համար կոնտակտային խնդիրներ և բերվում են դրանց լուծման ալգորիթմները: Ուսումնասիրվում են տարբեր մեխանիկական դործոնների ազդեցությունները մարմինների կոնտակտային փոխազդեցության երևույթի հիմնական բնութագրերի վրա:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.—М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании.—М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
3. Авилякин В. И., Коваленко Е. В. Асимптотический анализ плоской контактной за-

даны теории упругости для двухслойного основания.—ПМТФ, 1985, № 1, с. 133—138.

4. Александров В. М., Коваленко Е. В., Марченко С. М. О двух контактных задачах теории упругости для слоя с покрытием гинклеровского типа.—Прикл. мех., 1983, т. 19, № 10, с. 47—54.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.—М.: Наука, 1986, 336 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977, 742 с.
7. Коваленко Е. В. О приближенном решении слояго типа интегральных уравнений теории упругости и математической физики.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т. 34, № 5, с. 14—26.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа.—Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 5, с. 58—66.
9. Галин Л. А., Горячева И. Г. Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа.—ПММ, 1977, т. 41, Вып. 5, с. 807—812.
10. Коваленко Е. В. Исследование осесимметричной контактной задачи об изнашивании пары кольцевой штамп-упругое шероховатое полупространство.—ПММ, 1985, т. 49, вып. 5, с. 836—843.
11. Коваленко Е. В. Об интегральном уравнении контактных задач теории упругости при наличии абразивного износа.—ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 868—873.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию  
4.XII.1986