

УДК 534.131.2

ОБ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДЛИННОЙ ТРУБЫ,  
ЗАПОЛНЕННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТЬЮ

КУЛИКОВСКИЙ А. Г., ШИКИНА И. С.

Задача об изгибных колебаниях и устойчивости прямолинейной упругой трубы конечной длины с текущей в ней жидкостью при некоторых специальных граничных условиях рассматривалась рядом авторов, например, [1—3]. В [1, 2] для шарнирно закрепленной трубы найдена критическая скорость жидкости, при превышении которой возникает неустойчивость.

В данной работе рассматривается задача о развитии во времени первоначально локализованного малого прогиба бесконечно длинной трубы. Показано, что область растущего прогиба распространяется по трубе, и найдены скорости границ этой области.

Показано, что для трубы конечной, но достаточно большой длины имеет место неустойчивость при любой заданной скорости жидкости и произвольных граничных условиях на концах трубы. Природа неустойчивости может быть различной. При некоторых найденных в работе условиях рост прогиба трубы определяется свойствами уравнения, описывающего поведение прогиба, а при других условиях рост возмущений связан с фактом существования граничных условий на концах трубы, которые обеспечивают отражение упругих волн, бегущих по трубе.

При исследовании устойчивости течений или состояний, не зависящих от координат и времени, в линейной теории рассматриваются решения линеаризованных уравнений в виде бегущих волн вида  $\exp(ikx - i\omega t)$ . Волновое число  $k$  и частота  $\omega$  в этих решениях связаны дисперсионным уравнением  $D(\omega, k) = 0$ , которое получается из системы уравнений, описывающих поведение возмущений. Если для всех действительных значений  $k$  корни дисперсионного уравнения  $\omega_j(k)$  таковы, что  $\text{Im } \omega_j(k) < 0$  для всех  $j$ , то течение или состояние называется устойчивым. Если найдутся действительные  $k$ , для которых  $\text{Im } \omega_j > 0$  хотя бы для одного значения  $j$ , то говорят, что имеет место неустойчивость. Будем называть ее простой неустойчивостью.

Для системы уравнений, описывающей поведение малых возмущений, можно решить задачу Коши. Если начальные данные интегрируемы по модулю, то есть начальные возмущения в некотором смысле локализованы, то решение представляется интегралом Фурье

$$b(x, t) = \int b_j(k) \exp[ikx - i\omega_j(k)t] dk \quad (0.1)$$

где  $b_j(k)$  — фурье-компоненты начального возмущения  $b(x, 0)$ .

Рассмотрим асимптотику интеграла (0.1) при  $t \rightarrow \infty$  вдоль всевозможных лучей  $x = ut + \text{const}$ ,  $t > 0$  на плоскости  $x, t$ , то есть выясним поведение возмущений в движущихся системах координат, в которых  $x' = x - ut$ ,  $k' = k$ ,  $\omega'(u, k) = \omega - uk$ . Для этого в (0.1) заменим  $x$  на  $x'$ ,  $\omega$  на  $\omega' = \omega'(u, k)$ .

Для нахождения асимптотики воспользуемся методом перевала [4], согласно которому при  $t \rightarrow \infty$

$$b \sim b(k_s) t^{-\alpha} \exp[i(k_s x' - \omega'_s t)], \quad \omega'_s = \omega'(k_s)$$

здесь  $\alpha > 0$  и определяется порядком первой отличной от нуля в седловой точке  $k_s$  производной функции  $\omega'(k)$ . В седловой точке  $d\omega'/dk = 0$  и ее координаты задаются уравнениями

$$\operatorname{Re} \frac{d\omega}{dk} = u, \quad \operatorname{Im} \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad (0.2)$$

При фиксированном  $u$  может существовать несколько седловых точек, определяемых (0.2), но асимптотику дает та из них, через которую проходит контур интегрирования после его деформации. Если и таких точек несколько, то главный вклад в асимптотику дает седловая точка с наибольшим значением  $\operatorname{Im} \omega'_s$ . Для правильного выбора перевальной точки, дающей асимптотику, необходимо знать поведение функции  $\operatorname{Im} \omega'$  на комплексной плоскости  $k$  («рельеф»).

Рост или затухание возмущений (0.1) для заданного  $u$  определяется знаком  $\operatorname{Im} \omega'$  в перевальной точке. Если рост возмущений происходит при  $u = 0$ , то неустойчивость называют абсолютной. Если при  $u = 0$  возмущения (0.1) стремятся к нулю, но существуют  $u$ , для которых они растут, то говорят о конвективной неустойчивости. Простая неустойчивость всегда влечет за собой либо абсолютную, либо конвективную неустойчивость (см., например, обзор [5]).

При рассмотрении решения задачи не на бесконечной прямой  $x$ , а на отрезке конечной длины  $L$  с однородными граничными условиями на его концах оказывается, что асимптотическое поведение решения определяется собственной частотой. При больших значениях  $L$  собственные частоты принадлежат к одному из двух типов [6]. «Граничные» собственные частоты определяются граничными условиями на одном из концов отрезка. «Глобальные» собственные частоты в пределе при  $L \rightarrow \infty$  не зависят от конкретного вида граничных условий (хотя предполагаются выполненными некоторые условия невырожденности граничных условий на обоих концах отрезка) и находятся из уравнения [6]

$$\operatorname{Im}[k_i(\omega) - k_j(\omega)] = 0 \quad (0.3)$$

где

$$\operatorname{Im} k_i(\omega) = \min_r \{\operatorname{Im} k_r(\omega)\}, \quad \operatorname{Im} k_j(\omega) = \max_l \{\operatorname{Im} k_l(\omega)\}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} k_r(\omega) &> 0 \\ \operatorname{Im} k_l(\omega) &< 0 \end{aligned} \quad \text{при } \operatorname{Im} \omega \rightarrow \infty \quad (0.4)$$

Физический смысл равенства (0.3) заключается в том, что асимптотическое поведение решения определяют две волны, распространяющиеся в противоположные стороны ( $k_1(\omega)$  соответствуют волнам, распространяющимся направо, а  $k_2(\omega)$  — волнам, распространяющимся налево) и превращающиеся одна в другую при отражениях от концов отрезка с коэффициентами отражения порядка единицы. На плоскости  $\omega$  уравнение (0.3) задает линию. Очевидно, эта линия — самая верхняя среди всех линий  $L_{ij}$ , на которых

$$\operatorname{Im} [k_1(\omega) - k_2(\omega)] = 0 \quad (0.5)$$

где  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$ , удовлетворяют условиям (0.1). Если какая-либо из линий (0.5) заходит в верхнюю полуплоскость  $\omega$ , то среди глобальных собственных частот, удовлетворяющих уравнению (0.3), обязательно найдутся  $\omega$  с  $\operatorname{Im} \omega > 0$ . Неустойчивость, соответствующая глобальной собственной частоте с  $\operatorname{Im} \omega > 0$ , называется глобальной.

Селловой точке  $k_2$  на плоскости  $k$  соответствует точка ветвления  $\omega_0$  на плоскости  $\omega$ . Если в точке ветвления  $k_1(\omega_0) = k_2(\omega_0)$ , то точка  $\omega_0$  является концом линии  $L_{ij}$ , что следует из приближенного равенства  $k_{1,2} = \pm A\sqrt{\omega - \omega_0}$ . Поэтому, если  $\operatorname{Im} \omega_0 > 0$ , то есть при  $L \rightarrow \infty$  имеет место абсолютная неустойчивость, то при большом, но конечном  $L$ , будет иметь место глобальная неустойчивость [6].

1. Рассмотрим задачу о поведении малых изгибных колебаний упругой трубы, заполненной движущейся жидкостью. Будем считать, что поперечное сечение трубы остается неизменным, а деформация сводится к изгибу оси. Скорость жидкости  $v$  будем считать постоянной. Запишем уравнение для прогиба трубы  $w(x, t)$  [1, 2]

$$\rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_2 \left( \frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w = -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (1.1)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины, а  $D$  — жесткость трубы на изгиб.

Интересно отметить, что дисперсионное уравнение, соответствующее (1.1), имеет такой же вид, как дисперсионное уравнение малых модульных нелинейных волн, полученное в [7].

Решив квадратное относительно  $\omega$  дисперсионное уравнение, найдем его корни

$$\Omega_{1,2} = -UK \pm K\sqrt{K^2 - K_0^2}, \quad U = -\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad K_0^2 = \beta_1 \beta_2 \quad (1.2)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{v^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad K = \frac{k}{v} \sqrt{\frac{D}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad \beta_i = \frac{\rho_i}{\rho_1 + \rho_2}, \quad i = 1, 2$$

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать дисперсионное уравнение также относительно произвольно движущихся систем координат, то в (1.2) далее будем считать  $U$  произвольной постоянной, а  $\Omega = \Omega(U, K)$ . При этом величина  $\beta_2 + U$  представляет собой безразмерную скорость у омынутой выше системы координат относительно трубы. Обозначим  $\Omega(K, 0) = K\sqrt{K^2 - K_0^2} = \Omega_0(K)$ .

Заметим, что при изменении знака  $U$  дисперсионное уравнение (1.2) не изменится, если одновременно изменить знак  $K$ , что эквивалентно изменению направления оси  $X$ . Поэтому достаточно рассмотреть поведение возмущений в системах координат с  $U > 0$ .

Из (1.2) следует, что в рассматриваемой задаче простая неустойчивость имеет место всегда.

Изучим поведение первоначально локализованного малого прогиба трубы при  $t \rightarrow \infty$ , то есть найдем асимптотику интеграла

$$W(X', \tau) = \sum_{j=1}^2 \int W_j(K) \exp \{i[KX' - \Omega_j(K, U)\tau]\} dK$$

$$X = \frac{xk}{K}, \quad \tau = \frac{t\omega}{\Omega}, \quad X' = X - (\beta_2 + U)\tau, \quad W_j(K) = \frac{k\omega_j(k)}{K} \quad (1.3)$$

для различных значений  $|U|$ .

В плоскости  $K$  функция  $\Omega(K, U)$  для фиксированного  $U$  двузначна. Проведя разрезы по действительной оси от точек ветвления  $K = \pm K_0$  до  $K = \infty$  и по мнимой оси  $K$ , выделим ее однозначные ветви, отличающиеся знаком. На разрезах  $\text{Im}\Omega_0 = 0$ . Мнимая часть каждой из ветвей  $\Omega_j$  есть нечетная, а действительная — четная функция  $\text{Re}K$ . Отсюда следует, что асимптотическое поведение интеграла (1.3), взятого по правой и левой полуоси  $\text{Re}K$ , будет задаваться экспонентами с одинаковыми показателями и при исследовании асимптотики (1.3) достаточно ограничиться интегрированием по  $K$  от 0 до  $\infty$  и рассмотреть один член суммы с  $j=1$ . (Ветвь  $\Omega_1$  соответствует знаку  $+$  в (1.2)).

Уравнения для седловых точек имеют вид

$$\text{Re} \frac{2K^2 - K_0^2}{\sqrt{K^2 - K_0^2}} = U, \quad \text{Im} \frac{2K^2 - K_0^2}{\sqrt{K^2 - K_0^2}} = 0 \quad (1.4)$$

В плоскости  $K$  линию  $\text{Im}d\Omega/dK = 0$ , задаваемую вторым уравнением (1.4), назовем «хребтом». По нему движется седловая точка при изменении  $U$ . В полуплоскости  $\text{Re}K \geq 0$  имеются два хребта: полунтerval действительной оси  $[K_0, \infty)$  (совпадающий с разрезом) и кривая, задаваемая уравнением

$$K^2 - K_0^2 = \frac{K_0^2}{2} \exp(i\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1.5)$$

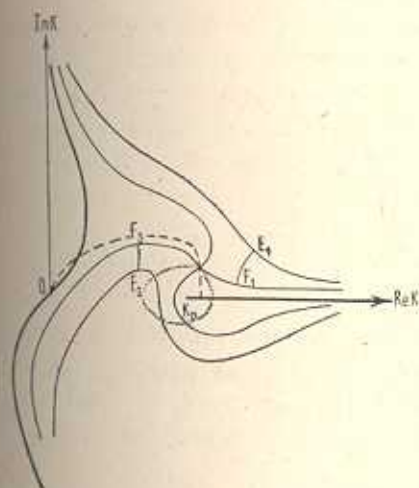
Эти хребты пересекаются в точке  $K_* = \sqrt{3/2} K_0$ , где  $d^2\Omega/dK^2 = 0$ . В верхней полуплоскости на хребтах  $U$  положительно, а в нижней —  $U < 0$ .

На действительном хребте  $[K_0, \infty)$   $\text{Im}\Omega_1 = \text{Im}\Omega_0 = 0$ , а величина  $|U(K)| = |d\Omega_0/dK|$  согласно (1.4) принимает все значения от минимального  $|U| = U_* = U(K_*) = 2\sqrt{2} K_0$  до  $|U| = \infty$  в точках  $K = K_0$  и  $K = \infty$ . Значениям  $|U| < U_*$  соответствуют точки кривой (1.5). При движении в верхней полуплоскости от точки  $K_*$  по (1.5)  $U > 0$  монотонно уменьшается, а  $\text{Im}\Omega_1 > 0$  монотонно увеличивается, поскольку вдоль хребта

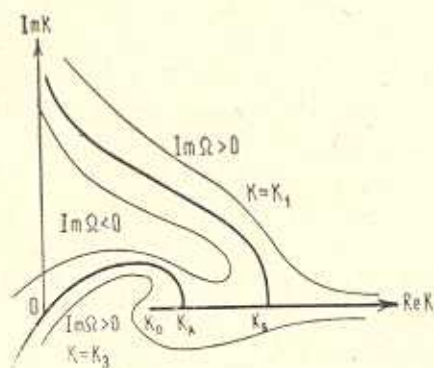
$$\frac{d\Omega}{dK} = \frac{d\Omega_0}{dK} - U - K \frac{dU}{dK} = -K \frac{dU}{dK}, \quad d\text{Im}\Omega = -\text{Im}K dU$$

Значению  $U=0$  соответствует действительная седловая точка  $K_s = =K_0\sqrt{2}$ , в ней  $\text{Im}\Omega_{1s}$  достигает максимального значения, равного  $K_s^2/2$ .

Смещая контур интегрирования с действительной оси и проводя его через перевальную точку, найдем, что при  $|U| < U_*$  интеграл (1.3) бесконечно растет со временем, так как  $\text{Im}\Omega_1(U, K_s) > 0$ . Линии уровня  $\text{Im}\Omega_1 = \text{const} \geq 0$  для  $0 < U < U_*$  показаны на фиг. 1. Контур интегрирования обозначен штриховой линией, пунктиром указан комплексный хребет. Жирно выделены линии  $\text{Im}\Omega_1 = 0$ . (На линиях  $F_1E_1$  и  $F_3E_3$   $\text{Re}\Omega_1 = \text{const}$  и эти линии потребуются в п. 2).



Фиг. 1



Фиг. 2

При  $|U| > U_*$  существует линия уровня  $\text{Im}\Omega_1 = 0$ , соединяющая точку  $K=0$  с точкой действительного хребта  $[K_0, \infty)$ , поэтому интеграл (1.3) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю. На фиг. 2 представлены линии  $\text{Im}\Omega_1 = \text{const}$  для  $U > U_*$ . Жирно выделены линии  $\text{Im}\Omega_1 = 0$ .

В плоскости  $x, t$  растущие возмущения находятся в секторе, ограниченном лучами  $x = u_+ t$  и  $x = u_- t$ , где  $u_+ = (\beta_2 + U_*)v$ , а  $u_- = (\beta_2 - U_*)v$ . Если  $\beta_2 < 8\beta_1$ , то  $u_+ > 0$ ,  $u_- < 0$  и ось  $t$  проходит внутри указанного сектора, так что при  $t \rightarrow \infty$  прогиб неограниченно растет в любой точке трубы. Если  $\beta_2 > 8\beta_1$ , то  $u_+ > 0$ ,  $u_- > 0$  и возмущение прогиба в любой фиксированной точке трубы асимптотически затухает, то есть имеет место конвективная неустойчивость.

Таким образом, критическое условие, разделяющее абсолютную и конвективную неустойчивости, возникающие при движении жидкости в бесконечно длинной трубе, имеет вид:  $\rho_2/\rho_1 = 8$ . В массивной трубе при  $\rho_1 > \rho_2/8$  неустойчивость будет абсолютной, а при течении более массивной жидкости с  $\rho_2 > 8\rho_1$  неустойчивость трубы будет конвективной.

2. Изучим теперь устойчивость достаточно длинной, но конечной трубы.

Для выяснения вопроса о глобальной устойчивости или неустойчивости рассмотрим поведение корней  $K(\Omega)$  дисперсионного уравнения (1.2) при изменении  $\Omega$  и параметра  $U$ .

Для значений  $\Omega$  с  $\text{Im}\Omega \rightarrow -\infty$  четыре корня  $K(\Omega)$  разделяются на  $K_1, K_2$  с  $\text{Im}K > 0$  (они соответствуют волнам, идущим направо,  $r=1, 2$ ) и  $K_3, K_4$  с  $\text{Im}K < 0$  (волны, идущие налево,  $l=3, 4$ ). Нумерация корней выбрана так, что  $\text{Re}K_1 > 0; \text{Re}K_3 > 0$  при  $\text{Im}\Omega \rightarrow \infty$ .

Дисперсионному уравнению наряду с корнями  $iK, -i\Omega$  удовлетворяют комплексно-сопряженные корни, поэтому

$$\hat{K}_2(\hat{\Omega}) = K_1(\Omega), \quad \hat{K}_4(\hat{\Omega}) = K_3(\Omega) \quad (2.1)$$

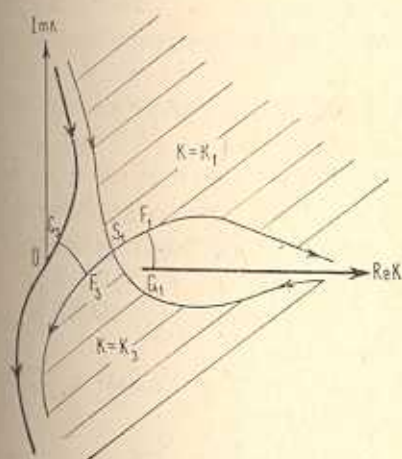
где крышкой обозначена операция изменения знака действительной части комплексной величины  $\hat{a} = -\text{Re}a + i\text{Im}a$ . Для достаточно больших значений  $\text{Im}\Omega > 0$  корням  $K_1, K_2$  соответствует ветвь  $\Omega_1$ , а корням  $K_3, K_4$  — ветвь  $\Omega_2$ . Как было показано в п. 1, при  $|U| < U_*$  в правой полуплоскости  $K$  имеется комплексная седловая точка  $S_1$ , в которой  $\text{Im}\Omega_{1,2} = C > 0, C = C(U)$ . В ней сливаются корни  $K_1$  и  $K_3$ . В соответствии со свойствами (2.1) корней  $K(\Omega)$  существует вторая седловая точка  $S_2$ , симметричная относительно мнимой оси (и лежащая на втором листе плоскости  $K$ ), в которой сливаются корни  $K_2, K_4$  при том же значении  $\text{Im}\Omega_{2,3} = C$ .

Рассмотрим соответствие комплексных плоскостей  $\Omega$  и  $K$  и покажем, что при всех значениях  $U$  часть, по крайней мере, одной из линий  $L_{r,l}$  ( $r=1, 2; l=3, 4$ ), задаваемых уравнениями (0.5), лежит в верхней полуплоскости  $\Omega$ , то есть как сказано выше, имеет место глобальная неустойчивость.

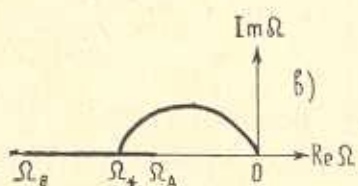
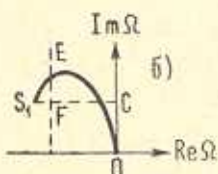
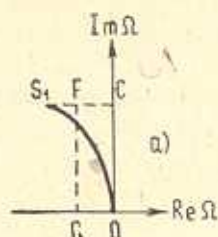
В плоскости  $K$  линии уровня  $\text{Im}\Omega_1 = C$  для малых значений  $U > 0$  показаны на фиг. 3. Жирно выделены линии  $\text{Im}\Omega_1 = 0$ . Линии  $\text{Re}\Omega_1 = \text{const}$  ортогональны линиям  $\text{Im}\Omega_1 = \text{const}$ , направление роста  $\text{Re}\Omega_1$  на линиях  $\text{Im}\Omega_1 = \text{const}$  указано стрелками. Заштрихованы области значений  $K$ , для которых  $\text{Im}\Omega_1 > C$ . В седловой точке  $S_1$   $\text{Re}\Omega_1 < 0$ .

Проследим, где в плоскости  $\Omega$  выполняется равенство (0.5) для  $r=1, l=3$ . Рассмотрим в этой плоскости точку  $F$ , для которой  $\text{Im}\Omega_F = C, 0 \geq \text{Re}\Omega_F > \text{Re}\Omega_S$  (фиг. 4а). На фиг. 3 ей отвечают две точки  $F_1$  и  $F_3$ , соответствующие  $K_1(\Omega)$  и  $K_3(\Omega)$ . Не меняя значения  $\text{Re}\Omega = \text{Re}\Omega_F$ , будем уменьшать  $\text{Im}\Omega$  от  $C$  до нуля, тогда  $K_1(\Omega)$  будет двигаться по линии  $F_1G_1$  вниз, а  $K_3(\Omega)$  — по линии  $F_3G_3$  вверх (фиг. 3) (точки  $G_1, G_3$  лежат на линиях  $\text{Im}\Omega_1 = 0$ ). Поскольку в точках  $F_1, F_3$   $\text{Im}K_1 > \text{Im}K_3$ , а в точках  $G_1, G_3$   $\text{Im}K_1 < \text{Im}K_3$ , то при некотором значении  $0 < \text{Im}\Omega_1 < C$  получим  $\text{Im}K_1 = \text{Im}K_3$ . Рассмотрев аналогично всевозможные точки  $F$ , для которых  $\text{Im}\Omega_1 = C, \text{Re}\Omega_1 < 0$ , найдем, что часть линии  $L_{13}$  лежит в верхней полуплоскости  $\Omega$  (фиг. 4а). Она соединяет точку ветвления  $S_1$  с точкой  $\Omega = 0$ . Для значений  $\Omega$  с  $\text{Re}\Omega > 0$   $\text{Im}K_1 > 0$ , а  $\text{Im}K_3 < 0$ , поэтому  $L_{13}$  из II четверти продолжается только в нижнюю полуплоскость  $\Omega$ .

Изучим, как деформируется линия  $L_{23}$  при изменении  $|U|$ . От знака  $U$  вид линий  $L_{ki}$  не зависит в силу замечания п. 1.



Фиг. 3



Фиг. 4

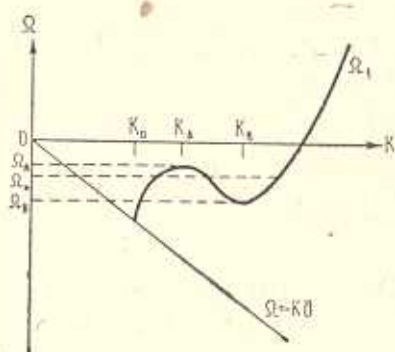
При  $U=0$  седловая точка  $S_1$  лежит на действительной оси  $K$  и в ней  $\text{Re}\Omega_s=0$ ,  $\text{Im}\Omega_s=K_0^2/2$ . Крестовина, изображающая линии уровня в окрестности седловой точки образует с осями  $\text{Re}K$ ,  $\text{Im}K$  углы в  $45^\circ$ . В плоскости  $\Omega$  линия  $L_{23}$  совпадает с отрезком оси  $\text{Im}\Omega$ .

С ростом  $|U|$  седловая точка движется по комплексному хребту (1.5),  $|\text{Re}\Omega_s|$  в ней увеличивается,  $\text{Im}\Omega_s > 0$  уменьшается, а крестовина линий уровня в плоскости  $K$  поворачивается. При  $|U|=U_0=\sqrt{3}K_0$  она становится параллельной координатным осям ( $U_0$  находится из дополнительного условия  $\text{Im}d^2\Omega/dK^2=0$ ). Качественная картина линий  $\text{Im}\Omega_1=\text{const} > 0$  в плоскости  $K$  для  $U_0 < U < U_*$  представлена на фиг. 1.

При  $U_0 < U < U_*$  точке  $F$ , лежащей в плоскости  $\Omega$  несколько правее точки  $S_1$  на прямой  $\text{Im}\Omega=C$  (фиг. 4б), соответствуют значения  $K_1$  и  $K_2$  (точки  $F_1$  и  $F_2$  на фиг. 1) такие, что  $\text{Im}K_1 < \text{Im}K_2$ . При увеличении  $\text{Im}\Omega$  вдоль линии  $\text{Re}\Omega=\text{Re}\Omega_F$  точка  $K_1$  движется вверх, а точка  $K_2$  движется вниз, и при некотором значении  $\text{Im}\Omega > C$  минимые части  $K_1$  и  $K_2$  совпадут, то есть выполнится равенство (0.5). Рассмотрев аналогично ввозможные точки  $F$ , для которых  $\text{Im}\Omega_F=C$ ,  $0 > \text{Re}\Omega_F$ , получим, что кривая  $L_{23}$  начинается из точки  $S_1$  и проходит через  $\Omega=0$ , причем часть ее лежит в области  $\text{Im}\Omega > \text{Im}\Omega_s$  (фиг. 4б). Таким образом, для  $U_0 < |U| < U_*$  инкремент глобальной неустойчивости оказывается большим, чем инкремент абсолютной неустойчивости.

Рассмотрим  $|U| \geq U_*$  и покажем, что хотя неустойчивость в бесконечно длинной трубе в этом случае конвективная, в достаточно протяженной, но конечной трубе глобальная неустойчивость имеет место для всех значений  $U$ .

Из фиг. 2 видно, что для действительных  $K$ , лежащих на верхнем берегу разреза  $[K_0, \infty)$ ,  $K = K_3$  для  $K \in [K_0, K_A]$  и  $K = K_1$  для  $K \in [K_B, \infty)$ .



Фиг. 5

Рассмотрим зависимость  $\Omega_1$  от действительных  $K$ , лежащих на верхнем берегу разреза, при  $|U| > U_*$  (фиг. 5). Поскольку  $d\Omega/dK$  на  $[K_0, K_A]$  монотонно уменьшается от  $\infty$  до 0, а из  $[K_B, \infty)$  монотонно увеличивается от 0 до  $\infty$ , то существует такое действительное значение  $\Omega_*$ , которому соответствуют точки  $K_{1*} \in [K_0, K_A]$  и  $K_{2*} \in [K_B, \infty)$  такие, что  $(d\Omega/dK)_{K_{1*}} = -(d\Omega/dK)_{K_{2*}}$ .

Воспользовавшись разложением в ряд Тейлора  $K_1(\Omega)$  и  $K_3(\Omega)$ , лежащих в малой окрестности точки  $\Omega_*$ , найдем

$$\text{Im}(K_1 - K_3) = N \text{Im}(\Omega - \Omega_*)^2, \quad N = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right)_{K_{1*}} - \left( \frac{\partial^2 K}{\partial \Omega^2} \right)_{K_{2*}} \right]$$

Отсюда следует, что в малой окрестности точки  $\Omega_*$  равенство (0.5) для  $r=1, l=3$  выполняется на двух взаимноперпендикулярных линиях  $\text{Re}\Omega = \text{Re}\Omega_*$  и  $\text{Im}\Omega = \text{Im}\Omega_* = 0$ , то есть из точки  $\Omega_*$  линия  $L_{13}$  с вертикальной касательной уходит в верхнюю полуплоскость (фиг. 4в). Если  $U \rightarrow \infty$ , то  $K_A \rightarrow K_0, K_B \rightarrow \infty, \Omega_* \rightarrow K_0 U \rightarrow -\infty, \Omega_A - \Omega_* \rightarrow 0$ , а максимум  $\text{Im}\Omega$  на линии  $L_{13}$ , как можно показать, остается конечным и стремится к  $K_0^2/4$ .

На фиг. 4а, 4б, 4в для различных значений  $U$  изображена часть линии  $L_{13}$ , лежащая в верхней полуплоскости  $\Omega$ , и равенство (0.5) выполнено на ней для  $\text{Im}\Omega_1 > 0$ . Нижняя часть линии  $L_{13}$  расположена симметрично относительно действительной оси  $\Omega$ .

Проводя аналогичные рассуждения для корней  $K_2, K_4$ , найдем, что линия  $L_{24}$  лежит в правой полуплоскости  $\Omega$  и симметрична  $L_{13}$  относительно мнимой оси  $\Omega$ .

Проведенного исследования линии  $L_{13}$  достаточно для выводов о глобальной неустойчивости. Однако, приведем без доказательства результаты относительно линий  $L_{14}$  и  $L_{23}$  на плоскости  $\Omega$ , соответствующих  $r=1, l=4$  и  $r=2, l=3$  в уравнении (0.5).

Согласно (2.1) эти линии расположены симметрично относительно мнимой оси  $\Omega$ . Существует значение  $0 < U_1 < U_0$  такое, что при  $|U| > U_1$   $\max \text{Im}\Omega$  на  $L_{14}$  больше  $\max \text{Im}\Omega$  на  $L_{13}$ . При  $U \rightarrow \infty$   $\max \text{Im}\Omega$  на  $L_{14}$ , так же, как и на  $L_{13}$ , стремится к  $K_0^2/4$ . При  $|U| < U_1$   $\max \text{Im}\Omega$  на линии  $L_{14}$  меньше, чем на линии  $L_{13}$ , где он достигается в седло-



вой точке. Отсюда следует, что в зависимости от соотношения масс трубы и жидкости растущая собственная функция может образовываться как на волнах, соответствующих  $K_1(\Omega)$  и  $K_3(\Omega)$  (или  $K_2(\Omega)$  и  $K_4(\Omega)$ ), так и на волнах, соответствующих  $K_1(\Omega)$  и  $K_4(\Omega)$  (или  $K_2(\Omega)$  и  $K_3(\Omega)$ ).

Таким образом, показано, что линия (0.3), определяющая глобальные собственные частоты, при всех значениях  $U$  лежит в верхней полуплоскости  $\Omega$ . Следовательно, во всех системах координат, движущихся с постоянными скоростями, и, в частности, в системе, связанной с трубой, имеется глобальная неустойчивость.

## ON BENDING VIBRATIONS OF A LONG TUBE WITH MOVING FLUID

A. G. KULIKOVSKY, I. S. SHIKINA

ՇԱՐՔՎՈՂ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՅՎԱՆ ԵՐԿԱՐ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԾՈՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԿՈՒԼԻԿՈՎՍԿԻ, Ի. Ս. ՇԻԿԻՆԱ

### Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկվում է մեծ ժամանակահատվածների դեպքում առաձգական խողովակի ճկվածքի փոքր, սկզբում տեղայնացված զրգոման ասիմպտոտիկ վարքը, երբ խողովակով հաստատուն արագությամբ հեղուկ է հոսում:

Յույց է տրվում, որ զրգոված տիրույթը, որտեղ ճկվածքը աճում է, տարածվում է խողովակով և դառնում են այդ տիրույթի սահմանները:

Անվերջ երկար խողովակի համար դուրս է բերված բացարձակ և կոնվեկտիվ անկայունության հայտանիշը:

Յույց է տրված, որ վերջավոր, բայց բավականաչափ երկար խողովակի համար միշտ տեղի ունի անկայունություն, կապված ծոման ատտանումների հետ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.—Инж. сборник, 1951, т. 10, с. 169—170.
2. Мовчан А. А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.—ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 760—762.
3. Paitoussis M. P. and Issid N. T. Dynamic Stability of pipes conveying fluid.—J. of Sound and Vibration, 1974, vol. 33, № 3, p. 267—294.
4. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
5. Ахиезер А. Н., Половин Р. В. Критерии нарастания волн.—Усп. физ. наук, 1971, т. 104, вып. 2, с. 185—200.
6. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний.—ПММ, 1966, т. 30, вып. 1, с. 148—153.
7. Багдоев А. Г. Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд. АН Арм. ССР, 1981. 307 с.

Московский Государственный университет

Поступила в редакцию  
29.V.1985