

УДК. 539.3.539.55

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛОК В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

АРТЕМЯН Э. Г.

В данной работе решены задачи колебаний (и параметрических колебаний) упругой и вязкоупругой балок в неоднородном температурном поле, когда механические свойства материала зависят от температуры. Определены собственные частоты колебаний балок и области динамической неустойчивости упругой балки в зависимости от изменения температур. Температурное поле берется стационарным и неоднородным.

1. Рассмотрим колебания упругой балки в стационарном температурном поле. Уравнение колебания балки принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1.1)$$

где $F(x, t)$ — внешняя возмущающая сила. Решение этого уравнения ищем в виде ряда синусов, удовлетворяющего граничным условиям шарнирного опирания

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \lambda_k x \quad (1.2)$$

где $\lambda_k = \pi k / l$.

В виде ряда представим также жесткость балки и возмущающую силу

$$EJ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x \quad (1.3)$$

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \lambda_k x \quad (1.4)$$

Подставляя (1.2) — (1.4) в уравнение (1.1) и сделав ряд преобразований относительно неизвестных функций $w_k(t)$, получим следующую бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразования с $w_k(t)$ аналогичны тем же, что и в [6]

$$\begin{aligned} \frac{a^2 w_k(t)}{dt^2} + p^2 \left[(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4 w_k + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) \lambda_p^2 \lambda_k^2 w_p + \right. \\ \left. + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{p+k} - a_{p-k}) \lambda_p^2 \lambda_k^2 w_p \right] = 2f_k(t) p^2, \quad p = \frac{1}{\sqrt{\rho h}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В конкретном случае можно предположить, что модуль Юнга зависит от температуры линейным образом

$$E = E_0(1 - \mu \alpha_0 T) \quad (1.6)$$

где α_0 — коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, а μ — некоторый безразмерный коэффициент.

Предполагается, что температура изменяется по координате также линейным образом

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{l} \quad (1.7)$$

Коэффициенты разложения в ряд Фурье примут следующий вид:

$$a_0 = E_0 J [2 - \mu \alpha_0 (T_2 - T_1)] \quad (1.8)$$

$$a_k = -E_0 J \mu \alpha_0 (T_2 - T_1) \frac{\cos \pi k - 1}{\pi^2 k^2} \quad (1.9)$$

Если довольствоваться вторым приближением, то для определения собственной частоты колебания балки из (1.5) получим

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4] w_k + p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^2 (a_{2k-1} - a_0) w_{k+1} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{d^2 w_{k+1}}{dt^2} + p^2 [(2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4] w_{k+1} + p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^2 (a_{2k+1} - a_0) w_k = 0$$

Из первого уравнения системы (1.10) имеем

$$w_{k+1} = \frac{-\frac{d^2 w_k}{dt^2} - p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4] w_k}{p^2 \lambda_k^2 \lambda_{k+1}^2 (a_{2k-1} - a_0)} \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) во второе уравнение системы (1.10) и сделав ряд преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4 w_k}{dt^4} + p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4 + (2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4] \frac{d^2 w_k}{dt^2} - p^4 \lambda_k^4 \lambda_{k+1}^4 [(a_{2k+1} - a_1)(a_{2k-1} - a_0) - (2a_0 - a_{2k+1})(2a_0 - a_{2k})] w_k = 0$$

Характеристическое уравнение будет

$$i^4 + A i^2 + B = 0$$

где $A = p^2 [(2a_0 - a_{2k}) \lambda_k^4 + (2a_0 - a_{2k+1}) \lambda_{k+1}^4]$

$$B = -p^4 \lambda_k^4 \lambda_{k+1}^4 [(a_{2k+1} - a_1)(a_{2k-1} - a_0) - (2a_0 - a_{2k+1})(2a_0 - a_{2k-1})]$$

На фиг. 1 показана зависимость отношений ω/ω^* и T_2/T_1 , где ω^* — частота собственных колебаний упругой балки без воздействия температурного поля.

Как видно из фиг. 1, частота собственных колебаний значитель-

но зависит от температуры: с ростом температуры частота резко уменьшается и при $T_2/T_1=5$ практически в два раза меньше частоты собственных колебаний без учета температуры. Пунктиром показана зависимость частоты балки от температуры при решении в первом приближении. Как видно из сравнения результатов приближений, второе приближение значительно уточняет значение собственной частоты колебания балки. При этом, значения, получаемые в первом приближении, значительно выше более точных, которые получены из второго. (на фиг. 1 второе приближение указано сплошной чертой).

При проведении вычислений начальная температура бралась равной $T_1=200^\circ\text{C}$, а параметры относительно температуры брались равными параметрам стали ($\mu_{20} = 1,3 \cdot 10^{-5}$).

2. Рассмотрим параметрические колебания упругой балки в том же температурном поле под действием периодической продольной силы

$$P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t \quad (2.1)$$

Уравнение колебания балки под действием силы (2.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Так же, как и в первой задаче, представим в виде ряда (1.3) функцию EJ и ищем в виде ряда (1.2) функцию w . После подстановки (1.2) и (1.3) в уравнение (2.2) и проведения некоторых преобразований, относительно неизвестных w_k получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \rho^2 \left[(2a_0 - a_{2k}) i_p^4 w_k + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) i_p^2 i_k^2 w_p + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{p+k} - a_{p-k}) i_p^2 i_k^2 w_p \right] - i_k^2 (P_0 + P_1 \cos \Omega t) w_k = 0 \quad (2.3)$$

Выпишем систему (2.3) для второго приближения

$$\frac{d^2 w_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2i_k^2 \cos \Omega t) w_k + i_k^2 w_{k+1} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}, \quad \omega_k = p \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{2a_0 - a_{2k}}$$

$$i = \frac{P_1}{2(P_* - P_0)}, \quad P_* = \frac{p^2 (2a_0 - a_{2k}) \pi^2 k^2}{l^2} \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 w_{k+1}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 (1 - 2\mu_1 \cos \theta t) + \gamma_1^2 w_k = 0 \quad (2.6)$$

где $\Omega_{1k} = \omega_k \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_*}}$, $\omega_k = p \frac{\pi^2 (k+1)^2}{l^2} \sqrt{2a_0 - a_{2k+1}}$

$$\omega_1 = \frac{P_1}{2(P_* - P_0)}, \quad P_* = \frac{p^2 (2a_0 - a_{2k+1}) \pi^2 (k+1)^2}{l^2} \quad (2.7)$$

$$\gamma^2 = \frac{\lambda_k^4 (P_0 + P_1 \cos \theta t)^2 (2a_0 - a_{2k})}{4p^2 (2a_0 - a_{2k+1}) (P_* - P_0)}, \quad \gamma_1^2 = \frac{\lambda_k^4 (P_0 + P_1 \cos \theta t) (2a_0 - a_{2k+1})}{4p^2 (2a_0 - a_{2k}) \cdot (P_* - P_0)}$$

Определим главные области динамической неустойчивости. Для этого пользуемся методом, изложенным в [1].

Периодические решения с периодом $2T$ ($T=2\pi/\theta$) ищем в виде:

$$w_k = a_1 \sin \frac{\theta t}{2} + b_1 \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.8)$$

$$w_{k+1} = a_2 \sin \frac{\theta t}{2} + b_2 \cos \frac{\theta t}{2} \quad (2.9)$$

Подставляя поочередно (2.8) в уравнение (2.4) и (2.9) в уравнение (2.6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых $\sin \theta t/2$ и $\cos \theta t/2$, получим две системы, каждая из которых представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными. Условиями существования периодических решений уравнения (2.3) являются условия равенства нулю определителей указанных систем. Запишем эти определители, соединяя соответственно первое уравнение системы с третьим, а второе уравнение с четвертым:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2} + 1 - \mu & \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \\ \frac{\gamma_1^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2} + 1 - \mu_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{4\Omega^2} + 1 + \mu & \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \\ \frac{\gamma_1^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\theta^2}{4\Omega_1^2} + 1 + \mu_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Для определения главной области динамической неустойчивости следует удерживать в (2.10) и (2.11) верхние диагональные элементы и приравнять их нулю. Как и в [1] получаем приближенную формулу для оценки границ главной области динамической неустойчивости

$$\theta_* = 2\Omega \sqrt{1 \pm \mu} \quad (2.12)$$

В силу наличия $k+1$ -го члена, можно уточнить границы главной об-

ласти, разрешив определители (2.10) и (2.11) относительно θ . На фиг. 2 показаны главные области динамической неустойчивости, при этом заштрихованная область соответствует главной области упругой задачи без учета влияния температурного поля, силовые линии ограничивают область, получаемую из соотношения (2.12), а внешние пунктирные линии обозначают область, получаемую из решений (2.10) и (2.11). Иначе говоря, внешние пунктирные линии являются уточнением границ главной области динамической неустойчивости при учете в (2.3) $k+1$ -ого члена. Как видно из фиг. 2, при увеличении температуры границы главной области динамической неустойчивости значительно расширяются. Учет же $k+1$ -ого члена позволяет еще более уточнить границы главной области. Это уточнение можно проводить и далее, если учесть в (2.3) $k+2$, $k+3$ и последующие члены. Однако, рассмотрение этих членов с математической точки зрения не является целесообразным, поскольку их влияние на границы главной области практически не сказывается.

3. Уравнение колебания вязкоупругой балки в том же температурном поле принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau, T) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\tau \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (3.1)$$

Как и в [6], рассматриваются простые экспоненциальные ядра

$$\Gamma(t-\tau, T) = A(T) \exp \{-\alpha(T)(t-\tau)\} \quad (3.2)$$

Воспользуемся температурно-временной аналогией [4, 5, 7] и заменим фактическое время приведенным:

$$t' = t/a_T = f(x)t \quad (3.3)$$

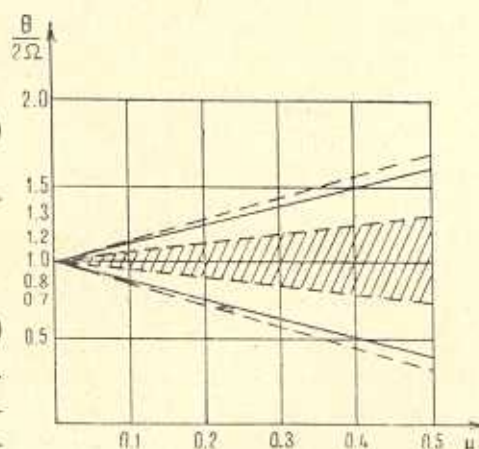
где a_T —функция температурного сдвига. Чтобы избежать лишних обозначений, вместо t' используем t , с учетом (3.3). Уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EJ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A(T) f(x) \int_0^t \exp \{-\alpha(t-\tau)\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\tau \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) ищем в следующем виде:

$$w = \bar{w}(x) \exp \{i(\omega t + \varphi)\} \quad (3.5)$$

Внешнее возмущение задается в виде:



Фиг. 2

$$F(x, t) = A_k(x) \exp(i\omega t) \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в уравнение (3.4), получаем:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EJ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c - iA \cdot f \cdot \Gamma_s) \right\} + \rho h \bar{w} (i\omega)^2 = A_k(x) \exp(i\varphi) \quad (3.7)$$

Здесь, как и в [2,3]

$$\Gamma_c = \int_0^{\infty} \Gamma(z) \cos \omega z dz, \quad \Gamma_s = \int_0^{\infty} \Gamma(z) \sin \omega z dz \quad (3.8)$$

Отделяя мнимую и действительную части уравнения (3.7) и учитывая, согласно [2], что $E = i\nu\nu(T)$, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c) \right\} - \rho h \bar{w} \omega^2 &= A_k(x) \cos \varphi \\ EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} A \cdot f \cdot \Gamma_s \right\} &= A_k(x) \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для определения собственных частот колебаний балки, рассматриваем первое уравнение системы (3.9). Второе уравнение не рассматривается, так как нас интересует только частота, а не фаза. Для данного случая оно примет вид

$$EJ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} (1 - A \cdot f \cdot \Gamma_c) \right\} - \rho h \bar{w} \omega^2 = 0 \quad (3.10)$$

Решение уравнения (3.10) ищем в виде ряда синусов:

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (3.11)$$

В виде ряда представим следующую функцию:

$$A[T(x)] \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{l} x \quad (3.12)$$

Подставляя (3.11) и (3.12) в уравнение (3.10) и сделав ряд несложных преобразований относительно неизвестных функций ω_k , получим бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[2EJ \frac{\pi^4 k^4}{l^4} - 2\rho h \omega^2 \right] \omega_k - EJ \Gamma_c \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \left[(2a_0 - a_{2k}) \omega_k + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{k-1} (a_{k-p} - a_{k+p}) \omega_p + \sum_{p=k+1}^{\infty} (a_{k+p} - a_{k-p}) \omega_p \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Определим коэффициенты ряда Фурье. Для этого предполагаем, что элементы ядра вязкости изменяются в зависимости от температуры линейным образом

$$A = \bar{A}(1 - \mu \alpha_0 T) \quad (3.14)$$

$$\alpha = \bar{\alpha}(1 - \mu \alpha_0 T) \quad (3.15)$$

где α_0 — коэффициент линейного теплового расширения без учета зависимости от температуры, μ — некоторый безразмерный коэффициент.

Температурное поле задано в виде (1.7). Кроме того, следуя [9], предположим, что

$$\ln a_f(T) = c(T - T_1) \quad (3.16)$$

где c — некоторое постоянное число. В частности, можем рассмотреть случай, когда $c = 1$. Учитывая (3.14) и (3.15), можем записать выражения для Γ_c и Γ_s :

$$\Gamma_c = \frac{\bar{A} \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2 + \omega^2}, \quad \Gamma_s = \frac{\bar{A} \omega^2}{\bar{\alpha}^2 + \omega^2} \quad (3.17)$$

Коэффициенты разбегания примут следующий вид:

$$a_0 = 2\bar{A} \left[\left(\frac{1}{T_2 - T_1} - \frac{\mu \alpha_0 T_1}{T_2 - T_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\exp(T_2 - T_1)} \right) - \frac{\mu \alpha_0}{T_2 - T_1} \left(\frac{T_2 - T_1 - 1}{\exp(T_2 - T_1)} - 1 \right) \right] \quad (3.18)$$

$$a_k = \frac{\bar{A}(T_2 - T_1)}{(T_2 - T_1)^2 + \pi^2 k^2} \left\{ (1 - \mu \alpha_0 T_1) \left(\frac{\cos \pi k}{\exp(T_2 - T_1)} - 1 \right) - \mu \alpha_0 \left(\left(1 - \frac{\cos \pi k}{\exp(T_2 - T_1)} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\pi^2 k^2 - (T_2 - T_1)^2}{(T_2 - T_1)^2 - \pi^2 k^2} - \frac{(T_2 - T_1) \cos \pi k}{\exp(T_2 - T_1)} \right) \right\} \quad (3.19)$$

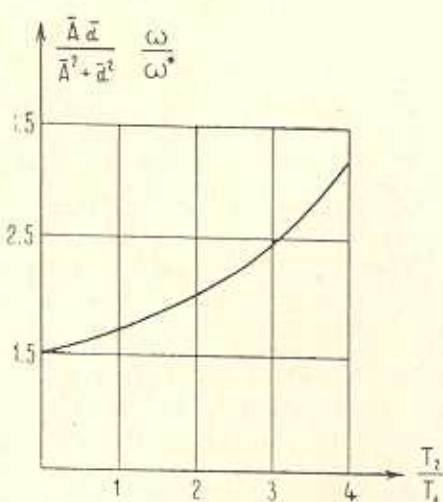
Проведены числовые вычисления, характеризующие зависимость частоты собственных колебаний вязкоупругой балки от изменения температур. На фиг. 3 показан график зависимости отношения

отношения $\frac{\bar{A} \bar{\alpha}}{\bar{A}^2 + \bar{\alpha}^2} \cdot \frac{\omega}{\omega^*}$

от отношения температур $\frac{T_2}{T_1}$, где

ω^* — как и в первой задаче, частота собственных колебаний упругой

балки без учета температур. $\frac{\bar{A} \bar{\alpha}}{\bar{A}^2 + \bar{\alpha}^2}$,



Фиг. 3

согласно [5], есть некоторая постоянная величина. Как видно из фиг. 3, закономерность изменения частоты колебаний от изменения температур, как и в упругой задаче, сохранялась. Однако, увеличение температур в вязкоупругой задаче влияло на рост частоты собственных колебаний балки более интенсивно, чем в упругом случае.

Как и в упругой задаче, вычисления проводились для второго приближения и при тех же значениях параметров.

ELASTIC AND VISCO-ELASTIC BEAMES VIBRATION IN THE NONHOMOGENEOUS TEMPERATURE FIELD

E. G. ARTEMIAN

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԵՎ ԱՌԱՋԳԱՄԱՍՈՒՅԻՆ ՀԵՐԱՆՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄԸ
ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՆՈՒ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԳԱՇՏՈՒՄ

Է. Զ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Աշխատանքում ստացված է առաձգական և առաձգամածուցիկ հեծանների տարանման սեփական հաճախականությունների կախվածությունը չհրմային դաշտի փոփոխությունից (երբ չհրմային դաշտը ստացիոնար է և ոչ համասեռ): Առաձգական հեծանի համար կատարված է առաջին և երկրորդ մոտավորությամբ ստացված սեփական հաճախականությունների համեմատություն:

Բացի այդ, առաձգական հեծանի համար դրված է դինամիկական անկայունության գլխավոր տիրույթը և ստացված է այդ տիրույթի սահմանների փոփոխման օրինաչափությունը՝ կախված չհրմային դաշտի փոփոխությունից:

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 595 с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 382 с.
3. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Знание, 1980. 561 с.
4. Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
5. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 272 с.
6. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругих и вязкоупругих термочувствительных пластин и оболочек.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1986, т. 39, № 4, с. 35—41.
7. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 277 с.
8. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукови думка, 1978. 343 с.
9. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 300 с.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
12. X. 1987