

УДК 538.4:538.114

ДВИЖЕНИЕ АЭРИРОВАННОЙ НАМАГНИЧЕННОЙ
 НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО НАКЛОННОЙ ПОДЛОЖКЕ В
 МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БАГДОЕВ А. Г., БЕЗИРГЕНЯН Г. С.

Рассматривается движение тонкого слоя непроводящей двухфазной смеси несжимаемой магнитной жидкости (дисперсная, несущая фаза) с газовыми пузырями (диспергированная, несомая фаза) по наклонной плоской твердой подложке при наличии неоднородного магнитного поля. Считается, что газ, заключенный в пузырях,—совершенный, его движение изотермическое, а магнитная проницаемость смеси μ зависит только от плотности смеси ρ .

1. Направим ось Ox по оси симметрии подложки, ось Oy —перпендикулярно к ней в плоскости подложки, а ось Oz —перпендикулярно к подложке (фиг. 1). Полная система дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающая движение двухфазной смеси в односкоростном приближении (гомогенная смесь), записывается в форме [1—3]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left(\frac{d\mu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) - \vec{T}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (\beta - 1) \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \rho = \rho_g \beta + (1 - \beta) \rho_f \quad (1.2)$$

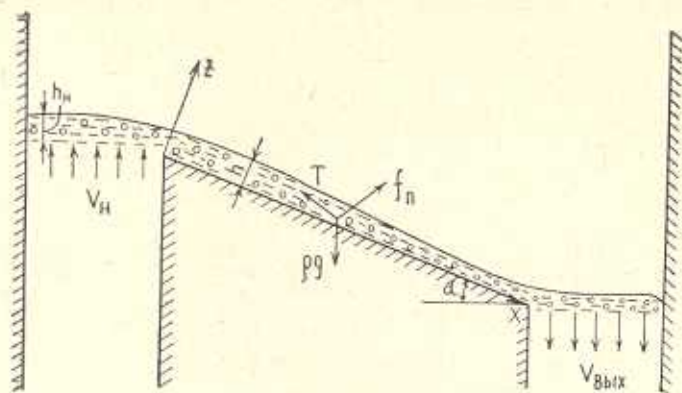
$$R^3 \cdot \rho = \text{const}, \quad \frac{p_g}{\rho_g} = \text{const} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = 0, \quad \vec{B} = \mu(\rho) \vec{H} \quad (1.4)$$

где $F = \{g\rho \sin \alpha, 0, -g\rho \cos \alpha\}$ —сила тяжести, p —давление в смеси, p_g —давление газа, заключенного в пузырях, \vec{V} —скорость потока, ρ_g, ρ_f —плотности, соответственно, газа и жидкости, β —объемная концентрация, $\vec{T} = \lambda |\vec{V}| \vec{V} / h$ —сила трения, λ —коэффициент гидравлического сопротивления, h —глубина потока, R —радиус пузыря, \vec{H}, \vec{B} —напряженность и индукция магнитного поля.

Уравнения (1.4) после введения потенциала напряжений $\vec{H} = \nabla \Phi$ можно записать в форме

$$\nabla(\mu \nabla \Phi) = 0 \quad (1.)$$



Фиг. 1

Система уравнений (1.1)—(1.3), (1.5) не замкнута. Чтобы ее замкнуть, необходимо кинематическое условие на свободной поверхности и получить связь между p и p_g .

Расчетная модель

а) Следуя многочисленным работам [2,4—7], считается, что соотношение между p и p_g в смеси такое же, как соотношение между давлением в изолированном пузырьке p_g , пульсирующем в безграничной жидкости, и давлением вдали от него p_∞ ;

б) пузырь при деформации слабо деформируется (Задача о значительной деформации формы пузыря рассмотрена в [8], то есть в [8] изучено явление схлопывания кавитационного пузыря в намагниченной жидкости);

в) при переходе от рассмотрения одиночного пузыря к рассмотрению смеси в соотношении $p_g - p_\infty$ заменяются: p_∞ на p , H_∞ на H , а $\rho_f d\rho_f/d\rho_f$ на $\rho d\rho/d\rho$, так как вокруг каждого пузыря имеется смесь.

Рассмотрим движение одиночного сферического пузыря в безграничной массе намагниченной жидкости с магнитной проницаемостью $\mu_f = \mu_f(r_f) = \text{const}$ и \vec{H}_∞ в \vec{z} однородном вдали от пузыря внешнем магнитном поле. Поместим начало координат в центре пузыря, оси Ox_1 и Ox_2 выберем в экваториальной плоскости, а ось Ox_3 направим по \vec{H}_∞ . Обозначим через ψ географическую широту, а через ϑ — географическую долготу. Тогда

$$x_1 = r \cos \psi \cos \vartheta, \quad x_2 = r \cos \psi \sin \vartheta, \quad x_3 = r \sin \psi.$$

Считая намагниченную жидкость идеальной, а движение безвихревым, из уравнения движения и неразрывности (1.1) получается, соответственно, интеграл Коши-Лагранжа

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p_f'}{\rho_f} - \frac{d\rho_f}{d\rho_f} \frac{H^2}{8\pi} = \frac{p_\infty'}{\rho_\infty} - \left(\frac{d\rho_f}{d\rho_f} \frac{H^2}{8\pi} \right)_\infty \quad (1.6)$$

где $\vec{v} = \nabla\varphi$, $p' = p + \rho g(x_1 \sin \alpha - x_3 \cos \alpha)$, а $\nabla^2 \varphi = 0$

Записывая уравнение $\nabla^2 \varphi = 0$ в сферических координатах и считая, что возмущенное движение происходит радиально симметрично ($\varphi(r)$), с учетом граничного условия $v_r|_{r=R} = dR/dt$ получаем, что $\varphi = -1/r R^2 dR/dt$. Уравнение (1.6) на границе раздела $r=R(t)$ после подстановки в него выражений $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \frac{R}{r} - R^2 \frac{1}{r}$ и $v^2 = (dR/dt)^2 R^4 / r^4$ примет вид

$$p_{fn} - p_f \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d v_f}{d \rho_f} \frac{H^2}{8\pi} \right)_n \right] = p_\infty - p_f \left(\frac{d v_f H^2}{d \rho_f 8\pi} \right)_\infty \quad (1.7)$$

Но на границе раздела пузырь-жидкость для компонентов магнитного поля выполняются граничные условия

$$v_f H_n^e = H_n^i, \quad H_z^e = H_z^i, \quad [\vec{\Pi}_n] = 0 \quad (1.8)$$

где $H_n^e, H_n^i, H_z^e, H_z^i$ — проекции напряженностей внешних и внутренних магнитных полей, соответственно, на нормаль и касательную к поверхности раздела $r=R(t)$, $\vec{\Pi}_n = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$, $\Pi_i = \Pi_{ik} n_k$, n_k — направляющие косинусы единичного вектора нормали \vec{n}^0 к поверхности $r=R(t)$, относительно координатных осей x_1, x_2, x_3 :

$$\Pi_{ik}^e = \frac{v_f}{4\pi} \left[H_i^e H_k^e - \frac{(H^e)^2}{2} \left(1 - \rho_f \frac{d v_f}{d \rho_f} \right) \delta_{ik} \right] - \left(p_f - \frac{4 \rho_f v_f}{R} \frac{dR}{dt} \right) \delta_{ik} - \text{суммарный внешний тензор напряжений, } \delta_{ik} - \text{символ Кронекера, } -4 \rho_f v_f R^{-3} dR/dt \delta_{ik} - \text{вязкий тензор напряжений } (\tau_{ik} = -2 \rho_f v_f d v_n / d n|_{r=R} = -4 \rho_f R^{-3} dR/dt), \Pi_{ik}^i = \frac{1}{4\pi} [H_i^i H_k^i - H^2 / 2 \delta_{ik}] - p_g \delta_{ik} - \text{суммарный внутренний тензор напряжений.}$$

Из условий (1.8) и равенства (1.7) следует, что

$$p_\infty - p_g = \frac{d v_f}{d \rho_f} \frac{H^2}{8\pi} + \rho_f \frac{d v_f}{d \rho_f} \frac{H^2}{8\pi} - \rho_f \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4 v_f}{R} \frac{dR}{dt} \right] \quad (1.9)$$

Таким образом, чтобы получить окончательную связь между давлением одиночного пузыря p_g и давлением намагниченной жидкости вдали от него p_∞ , необходимо определить внешнее магнитное поле. Решение уравнения $\Delta \cdot \vec{B} = 0$ с учетом первых двух граничных условий (1.8) и условий на бесконечности $H_{z3} \rightarrow H_\infty, H_{x1}, H_x \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ записывается в форме

$$\Phi^e = H_\infty \left(r + \frac{\mu_f - 1}{1 + 2\mu_f} \frac{R^3}{r^2} \right) \sin \psi, \quad \Phi^i = H_\infty \frac{3\mu_f}{1 + 2\mu_f} r \sin \psi$$

Осреднив слагаемое $1/8\pi (\mu_f - 1) [\mu_f (H_n^e)^2 + (H_z^e)^2]$ по поверхности сферы [6], с учетом формулы, приведенной в [1] (см. с. 69)

$$\mu = \mu_f + 3\mu_f \frac{1 - \mu_f}{1 + 2\mu_f} \quad (1.10)$$

(которая имеет место для мелкодисперсной суспензии и малых концентраций ($\beta \ll 1$)), и принятой модели расчета давления p в смеси из (1.9) находим искомое соотношение между p и p_g

$$p-p_g = \left(\frac{d\mu}{d\beta} + \nu \frac{d\mu}{d\rho} \right) \frac{H^2}{8\pi} - \rho \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4\nu}{R} \frac{dR}{dt} \right]$$

Последнюю формулу с учетом соотношения, $\rho_g \beta / \rho_l (1-\beta) = \text{const}$, которое следует из (1.2), можно переписать в форме

$$p-p_g = \beta \frac{d\mu}{d\beta} \frac{H^2}{8\pi} - \rho \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{4\nu}{R} \frac{dR}{dt} \right] \quad (1.11)$$

Из полученной формулы следует, что чем меньше количество пузырьков в магнитной жидкости (МЖ), тем меньше их влияние на давление в смеси.

Связь между p и p_g без учета деформации пузырьков в однородном на бесконечности магнитном или электрическом поле получена в работах [2,5], которая без учета вязкости на границе раздела для магнитной жидкости имеет вид

$$p-p_g = \frac{d\mu}{d\beta} \frac{H^2}{8\pi} \quad (1.12)$$

2. Введем условия совместности (без учета дисперсии и диссипации), имеющие место на фронте волны, из которых получим формулу для нормальной скорости распространения волны.

Используя выведенное замыкающее уравнение (1.11), преобразуем уравнение движения (1.1)

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \nabla p_g - \nabla \left(\frac{d\mu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) \frac{d\mu}{d\beta} \frac{H^2}{8\pi} \nabla \beta \quad (2.1)$$

Перейдем в уравнениях (2.1), (1.2)–(1.4) от декартовых координат x, y, z и времени t к координатам x_1, x_2, x_3, τ' , где τ' направлена по нормали к фронту волны: $S(t, x, y, z) = 0$, а $x_k, k=1, 2, 3$ находятся в касательной плоскости к S . Поскольку волна является характеристической поверхностью (поверхностью слабого разрыва), то на ней терпят разрыв только производные по τ' . Следовательно, для скачков производных ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \tau'} \right] \frac{\partial \tau'}{\partial x_j}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \tau'} \right] \frac{\partial \tau'}{\partial t} \quad (2.2)$$

Вводя единичный вектор \vec{n}_0 к фронту волны: $\vec{n}_0 = \nabla S / |\nabla S|$ и нормальную скорость волны $N = -(\partial S / \partial t) / |\Delta S|$, можно показать, что для получения условия совместности на слабом разрыве следует в уравнениях (2.1), (1.2)–(1.5) [10] заменить

$$\nabla \rightarrow \vec{n}_0 \partial, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -N \partial, \quad \text{где } \partial = \left[\frac{\partial}{\partial \tau'} \right] \quad (2.3)$$

Обозначим через $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$ нормальную скорость частиц, через c_n — нормальную скорость волны относительно частиц (скорость распространения) $c_n = N - v_n$. Тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rightarrow -c_n \hat{e} \quad (2.4)$$

Используя формулы (2.2) — (2.4) и систему уравнений (2.1), (1.2) — (1.5), легко вывести условия совместности, имеющие место на фронте волны (поверхности слабых возмущений)

$$\rho c_n \delta v_n = \delta p_g + \frac{1-\beta}{d\beta^2} \frac{H^2}{8\pi} \delta \rho + 2 \frac{d\mu}{d\beta} H_n \delta H_n + \frac{d\mu}{d\beta} \frac{H^2}{8\pi} \delta \beta$$

$$-c_n \delta \rho + \rho \delta v_n = 0, \quad c_n \delta \beta + (\beta - 1) \delta v_n = 0$$

$$\delta \beta = -\frac{1-\beta}{\rho} \delta \rho, \quad \delta H = 0, \quad (\vec{H} \times \vec{n}_0 = H \vec{e} \times \vec{n}_0), \quad \frac{d\mu}{d\beta} H_n \delta \rho + \mu \delta H_n = 0$$

Определитель полученной системы однородных линейных алгебраических уравнений на фронте обращается в нуль. Из отмеченного уравнения определяется скорость распространения фронта волны (слабых возмущений) в намагниченной несжимаемой непроводящей жидкости с пузырьками газа

$$c_n^2 = a^2 - \frac{1-\beta}{\rho} \left| \frac{d^2 \mu}{d\beta^2} + \left(1 - \frac{2H_n^2}{\mu H^2} \frac{d\mu}{d\beta} \right) \frac{d\mu}{d\beta} \right| \quad (2.5)$$

где $a = \sqrt{\partial p_g / \partial \rho} = \sqrt{\rho_g / \beta [\beta \rho_g + (1-\beta) \rho_f]}$ — скорость звука в ненамагниченной (обычной) жидкости с пузырьками газа.

Если брать распределение давления в смеси по формуле (1.12) и повторить предыдущие выкладки, то получится

$$c_n^2 = a^2 - \frac{2-\beta}{\rho} \left| \frac{a^2 \mu}{d\beta^2} - \frac{2H_n^2}{\mu H^2} \left(\frac{d\mu}{d\beta} \right)^2 \right| \frac{H^2}{8\pi} \quad (2.6)$$

Если обозначить через γ угол между \vec{H} и \vec{n} ($H_n = H \cos \gamma$), то при зависимости (1.10) для μ формулы (2.5) и (2.6) примут вид

$$\lambda_n^2(\gamma) = 1 + \frac{3(1-\beta)\mu_f^2(\mu_f - 1)}{\mu(1+2\mu_f)^2} \left[(2+6\cos^2 \gamma - 3\beta)\mu_f + 3\beta + 1 - 6\cos^2 \gamma \right] \xi^2 \cos^2 \gamma \quad (2.7)$$

$$\lambda_n^2(\gamma) = 1 + \frac{18(2-\beta)\mu_f^2(\mu_f - 1)^2}{\mu(1+2\mu_f)^2} \xi^2 \cos^2 \gamma \quad (2.8)$$

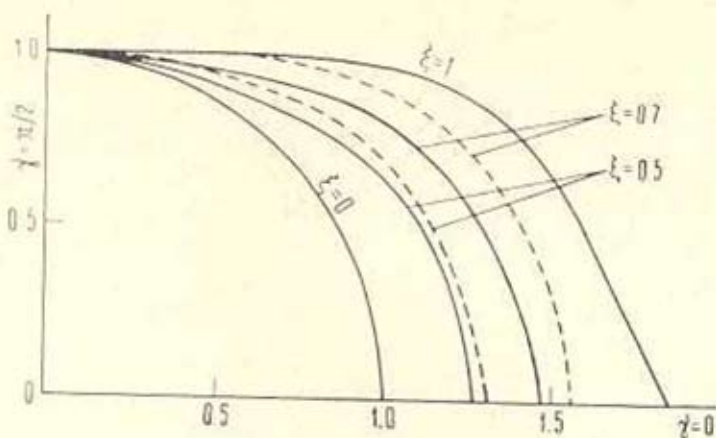
где $\lambda_n = c_n/a$, $\xi = H/\sqrt{8\pi\rho}a$ — безразмерные параметры.

Кривые $\lambda_n(\gamma)$, описываемые зависимостями (2.7), (2.8) при разных значениях безразмерных параметров β , μ_f и ξ , изображены на фиг. 2, где пунктир соответствует (2.8).

Отношение вторых слагаемых в формулах (2.7) и (2.8), которые характеризуются магнитной проницаемостью смеси, объемной концентрацией пузырьков и магнитным полем, при $\gamma=0$ равно

$$\frac{6(2-\beta)(\mu_f - 1)}{(1-\beta)[(8-3\beta)\mu_f + 3\beta - 5]} \approx \frac{12(\mu_f - 1)}{8\mu_f - 5} \quad (2.9)$$

Дробь (2.9) больше единицы и является монотонно возрастающей функцией от μ_f ($\mu_f \geq 2$).



Фиг. 2

Таким образом, расчетная формула (2.8) для c_n по сравнению с формулой (2.7) дает завышенные значения скорости звука и расхождение между ними становится тем больше, чем сильнее магнитные свойства жидкости. Для проверки достоверности полученных расчетных формул (2.5), (2.6) следует провести эксперименты, аналогичные экспериментам, проведенным в [11, 12] для измерения скорости распространения ультразвука в магнитной жидкости, содержащей агрегаты.

Отметим, что относительное приращение скорости звука $\Delta c_n / c_n$ в аэрированной, намагниченной жидкости значительно увеличивается за счет пузырьков по сравнению с приращением $\Delta c_n / c_n$ в намагниченной жидкости.

3. При выводе плановых уравнений рассмотрим случай установившегося движения и равномерного распределения концентрации β по глубине потока, то есть $\beta = \beta(x, y)$. Относительно МГД-течения со свободной поверхностью по наклонной плоской подложке сделаем те же допущения, которые делаются в плановой теории непроводящих потоков относительно малой толщины со свободной поверхностью

$$V_x(x, y, z) \approx V_x(x, y, \xi) = u(x, y), \quad V_y(x, y, z) \approx V_y(x, y, \xi) = v(x, y)$$

$$V_z(x, y, z) \approx 0 \quad (3.1)$$

где ξ —параметр, причем $0 \leq \xi \leq h$, а u, v —компоненты плановой скорости. С учетом, что $\beta = \beta(x, y)$ и сделанных допущений (3.1) ($\rho = \rho_r \beta + (1 - \beta)\rho_f \approx (1 - \beta)\rho_f$, следовательно, $\rho = \rho(x, y)$), уравнения движения в проекциях на координатные оси после их осреднения по глубине примут вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho h} \int_0^h \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\nu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) \right] dz - T_x \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho h} \int_0^h \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu}{8\pi} \right) \right] dz - T_y \quad (3.3)$$

$$p(x, y, z) = p_0^c - \rho \frac{d\nu}{d\rho} \left(\frac{\bar{H}^2}{8\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \right) + g\nu(h-z) \cos \alpha \quad (3.4)$$

где p_0^c и \bar{H} — значения давления и H на свободной поверхности.

Условия, выполняющиеся на свободной поверхности МГД-течения, такие же, как на границе раздела МЖ и пузыря, то есть при $z=h$

$$\nu \bar{H}_n^c = \bar{H}_n^c \quad (3.5a), \quad \bar{H}_n^c = \bar{H}_n^c \quad (3.5b), \quad \bar{\Pi}_n^c = \bar{\Pi}_n^c \quad (3.5в)$$

Из (3.5в), с учетом (3.4а) и (3.4б), следует, что

$$\rho \frac{d\nu}{d\rho} \frac{\bar{H}^2}{8\pi} - p_0^c = \frac{\nu-1}{8\pi} (\nu \bar{H}_n^2 + \bar{H}_n^2) \quad (3.6)$$

Подстановка (3.6) в (3.4) дает

$$p(x, y, z) = p_0^c + \rho g(h-z) \cos \alpha - \frac{\nu-1}{8\pi} (\nu \bar{H}_n^2 + \bar{H}_n^2) + \rho \frac{d\nu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \quad (3.7)$$

Преобразуем уравнения (3.2), (3.3), используя найденное распределение (3.7) давления в смеси

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\nu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho - \rho \frac{d\nu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{H^2}{8\pi} = g \left[\frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \right. \\ &- z \frac{\partial \rho}{\partial x} \left. \right] \cos \alpha - \frac{\nu-1}{8\pi} \left(\nu \frac{\partial \bar{H}_n^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}_n^2}{\partial x} \right) - \frac{\nu-1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} \bar{H}_n^2 - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} (\nu \bar{H}_n^2 + \bar{H}_n^2) + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} (H_n^2 + H_n^2), \quad \frac{1}{h} \int_0^h \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\nu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) \right] dz = g \cos \alpha \left[\frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \right. \\ &- \frac{h}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left. \right] - \frac{\nu-1}{8\pi} \left(\nu \frac{\partial \bar{H}_n^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{H}_n^2}{\partial x} \right) - \frac{\nu-1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} \bar{H}_n^2 - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} (\nu \bar{H}_n^2 + \bar{H}_n^2) + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \nu}{\partial x} \frac{1}{h} \int_0^h (H_n^2 + H_n^2) dz \quad (3.8) \end{aligned}$$

Так как относительная толщина аэрированного потока намагниченной жидкости, движущейся по наклонной подложке, достаточно мала, то

$$\frac{1}{h} \int_0^h (H_n^2 + H_n^2) dz = \bar{H}_n^2 + \bar{H}_n^2 \quad (3.9)$$

Равенство (3.8) с учетом соотношений $\partial(\rho h)/\partial x = h/2 \cdot \partial \rho/\partial x = 1/2 h \partial(\rho h^2)/\partial x$, $\partial \rho/\partial x = \bar{H}_n^2 + \mu/2 \partial \bar{H}_n^2/\partial x = 1/\mu \bar{B}_n \partial \bar{B}_n/\partial x$ и осредненного значения интеграла (3.9) можно представить в следующей форме:

$$\frac{1}{\rho h} \int_0^h \left[\frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) \right] dz = g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha - \frac{gh \cos \alpha}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu\rho} \times \\ \times \left(\bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial x} + \bar{B}_n \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial x} \right) \quad (3.10)$$

Аналогичное имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{\rho h} \int_0^h \left[\frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \frac{H^2}{8\pi} \right) \right] dz = g \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha - \frac{gh \cos \alpha}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \\ - \frac{\mu-1}{4\pi\rho} \left(\bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial y} + \bar{B}_n \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

Заменяя в уравнениях (3.2) и (3.3) интегралы правыми частями равенств (3.10), (3.11) с учетом соотношения $(1/\rho)d\rho = \beta/\bar{\rho}_g d\bar{\rho}_g$, которое следует из равенств $\rho = \beta \bar{\rho}_g + (1-\beta)\rho_f$, $\beta \bar{\rho}_g/(1-\beta)\rho_f = \text{const} = A_1$, получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha - g \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha - \beta \frac{gh \cos \alpha}{2\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial x} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \left(\bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial x} + \bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial x} \right) \quad (3.12)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \cos \alpha - \beta \frac{gh \cos \alpha}{2\bar{\rho}_g} \frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial y} - \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \left(\bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial y} + \bar{B}_n \frac{\partial \bar{B}_n}{\partial y} \right) \quad (3.13)$$

$$\beta = [1 + \bar{\rho}_g / (A_1 A_2 \rho_f)]^{-1} \quad (3.14)$$

После осреднения равенства (3.7) по глубине потока, с учетом соотношения (1.11) между ρ и $\bar{\rho}_g$, в котором отброшены слагаемые, описывающие диссипацию и деформацию пузыря, получается распределение осредненного давления \bar{p}_g в пузырях газа

$$\bar{p}_g = p_0 + (1 + A_1) \frac{(1-\beta)\rho_f}{2} gh \cos \alpha \quad (3.15)$$

Подставляя выражение β (3.14) в (3.15), получим распределение \bar{p}_g в аэрированной ненамагниченной жидкости как функцию от h , μ , H_n и H_s , то есть

$$\bar{p}_g = \bar{p}_g(h, \mu, H_n, H_s)$$

Из уравнений неразрывности (1.1) и кинематического условия на свободной поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

при допущениях (3.1), которые делаются в теории открытых потоков непроводящей жидкости относительно малой глубины [13, 14], легко получить

$$\frac{\partial((1-\beta)hu)}{\partial x} + \frac{\partial((1-\beta)hv)}{\partial y} = 0 \quad (3.16)$$

Таким образом, в приближении теории «мелкой воды» решение исходной системы уравнений (кроме уравнений, описывающих магнитное поле) трехмерной задачи свелось к разрешению плановых (двухмерных) уравнений (3.12) — (3.16) при заданном магнитном поле (безиндукционное приближение, искажения приложенного внешнего поля слоем магнитной жидкости не учитываются).

В общем случае, чтобы получить полную замкнутую систему плановых уравнений для области, занятой магнитной жидкостью, необходимо решить связанную внешнюю и внутреннюю задачи для напряженности магнитного поля.

Такая задача изучена в работе [17] для проводящей ненамагниченной жидкости, где получена замкнутая система двухмерных (плановых) интегро-дифференциальных уравнений при замене подложки бесконечной полосой.

Отметим, что плановые уравнения для ФМ ($\mu = \mu(H)$) в приближении теории «мелкой воды» выведены в [15], где исходные уравнения взяты в форме [16].

THE MOTION OF AERATED MAGNETIZED NONCONDUCTING FLUID ON INCLINED PLANE BOTTOM IN MAGNETIC FIELD

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGENIAN

ՕԳՆԱԶԳԵՅՎԱԾ, ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆԱՅՎԱԾ ԱՆՇԱՂՈՐԳԻԶ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐՔՈՒՄԸ ԹԵՔ ՀԱՐԹԱԿՈՎ՝ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅՎ, Գ. Ս. ԲԵՏԻՐԳԵՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկված է երկֆազ խառնուրդի (անսեղմելի մագնիսական հեղուկի և գազային պղպջակների) բարակ շերտի շարժումը թեք հարթակով՝ անհամասեռ մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում:

Գազային պղպջակներով մագնիսական հեղուկի ճեղման և աչգ հեղուկում ձախի տարածման արագության համար ստացված են բանաձևեր:

«Մանծաղ ջրի» տեսության մոտափորոթյամբ, երբ $Re_m \ll 1$, ստացված են երկշափ հավասարումներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, т. 8, 1982, 620 с.
2. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошников Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей. М.: ВИНТИ, т. 16, 1981, 208 с.
3. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.—МГ, 1972, 1, с. 3—11.
4. Ван Вейнгарден. Одномерные течения жидкости с пузырьками газа. В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 68—103.
5. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошников Г. А. Диффузная и многоскоростная модели двухфазных сред в электрическом поле.—ПММ, 1980, 44, с. 290—300.
6. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости, содержащей пузырьки газа.—Докл. АН СССР, 1975, т. 22, № 4, с. 1331—1333.
7. Норданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа.—ПМТФ, 1960, № 3, с. 102—110.
8. Попова Л. Н., Тарапов И. Е. Действие магнитного поля на форму кавитационного пузырька в намагничивающейся жидкости.—МГ, 1976, 4, с. 33—37.
9. Эмульсии. Под ред. Абрамзона. Ленинград, 1972, 447 с.
10. Jeffery A., Taitati T. Nonlinear wave propagation with application to physics and magnetohydrodynamics. New York—London: Academic Press, 1964, 369 p.
11. Chang D. Y., Isler W. E. Ultrasonic velocity anisotropy in ferrofluids under the influence of a magnetic field.—J. Appl. Phys., 1978, vol. 49, p. 1809—1811.
12. Игнатенко Н. Н. и др. Влияние внешнего магнитного поля на скорость распространения ультразвуковых волн в магнитной жидкости.—Изв. вузов, физика, 1983, № 4, с. 65—69.
13. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. М.: Энергия, 1967, 212 с.
14. Басюков А. Г., Безиргенян Г. С. Решение прямой задачи о движении несжимаемой жидкости на быстротоке с переменным продольным уклоном.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1979, № 2, с. 11—19.
15. Гогосов В. В., Налетова В. А. и др. Теория «мелкой воды» для магнитной жидкости. В кн.: Одиннадцатое рижское совещание по магнитной гидродинамике, т. 3. Магнитные жидкости. Саратов: 1984, с. 49—82.
16. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics.—Phys. Fluids, 1964, vol. 7, № 12, p. 1927—1932.
17. Безиргенян Г. С. Безнапорное движение жидкого металла по наклонному лотку во внешнем магнитном поле. XII Рижское совещание по МГ, 1987, 1, с. 143—146.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
23.VI.1986