ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 6, 1987 Механика

УДК 539.375

КОСОЕ СОУДАРЕНИЕ УПРУГИХ ПОЛОСЫ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РЕЗКО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

САЖИН В. В.

1. В декартовой подвижной системе координат xOy рассмотрим соударение жидкой полосы $(0<y\leq 1, |x|<\infty)$ с упругим полупространством $(y<0, |x|<\infty)$ как установившееся движение. При $x<0$, $y=0$ полоса и полупространство взаимодействуют при условии непрерывности нормальных компонент скорости и давлений: при $x>0$, $y=0$ (разрез) ставится условие отсутствия давлений и задается скачок нормальной скорости на бесконечности: верхняя грань полосы не нагружена. Скорость движения точки контакта c—дозвуковая, а касательная скорость полосы мала по сравнению с волновыми. Обозначим (u, v)—компоненты массовой скорости по осям x, y: $\sigma^{(x)}$, σ, τ—нормальные и тангенциальная компоненты тензора напряжений: p—давление в жидкости. За единицы измерения примем: плотность упругого полупространства ρ_1, скорость поперечных волн c_2^0 и 2μ, где μ—модуль сдвига, c_1 и $c_2=1$—безразмерные скорости продольных и поперечных волн в упругом теле, а c_0—безразмерная скорость звука в акустической среде. Уравнения для продольного φ и поперечного ψ потенциалов скоростей в упругой области и уравнение для потенциала скорости χ в жидкости будут уравнениями эллиптического типа:

$$\beta_0^2\chi_{xx}+\chi_{yy}=0,\quad \beta_1^2\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \tag{1.1}$$

$$\beta_2^2\psi_{xx}+\psi_{yy}=0,\quad \beta_j=\sqrt{1-c^2/c_j^2},\quad j=0,\,1,\,2$$

Скорости, напряжения и давление связаны с φ, ψ, χ известными соотношениями [5].

Краевые условия имеют вид:

$$p=0\ (y=1,\ |x|<\infty);\quad \tau=0\ (y=0,\ |x|<\infty) \tag{1.2}$$

$$\sigma=-p,\ v=0\ (y=0,\ x<0);\quad \sigma=p=0\ (y=0,\ x>0)$$

v—скачок скорости на границе раздела двух сред. Для выделения постоянной составляющей скачка скорости при $x\to\infty$ используем условие [4]

$$v_\infty=\lim_{x_1,x_2,x_2/x_1\to\infty}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{v(x,0)}{x_2-x_1}\,dx=-v_0 \tag{1.3}$$

Необходимость этого условия обусловлена тем, что решение на бесконечности может содержать собственные волны. В точках нерегулярности решения $x=y=0$ и $x=\pm\infty$ следует наложить дополнительные условия: конечности и неотрицательности потока энергии в точку $x=y=0$:

$$0 \leq e_0 < \infty \tag{1.4}$$

а на бесконечности учтем энергетический принцип излучения Мандельштама [6] энергия распространяется от источника на бесконечность, но не наоборот.

2. Выполним преобразование Фурье всех функций по x с параметром k.

Введем обозначения:

$$V^+(k)=\int_0^\infty v(x,0)\exp(ikx)\,dx, \quad \Sigma^-(k)=\int_{-\infty}^0 \sigma(x,0)\exp(ikx)\,dx$$

Функция $V^+(\xi)$ $(\Sigma^-(\xi))$ аналитична в верхней (нижней) полуплоскости комплексного переменного $\xi=k+im$. Решая преобразованные уравнения (1.1) с учетом краевых условий (1.2), можно получить выражения для Фурье-образов потенциалов скоростей через функцию $\Sigma^-(k)$

$$X=\frac{2i\Sigma^-}{k\rho_0 c}\cdot\frac{\operatorname{sh}[\beta_0 k(y-1)]}{\operatorname{sh}(\beta_0 k)} \tag{2.1}$$

$$\Phi=-\frac{ic\Sigma^-}{k\beta R}\exp(\beta_1|k|y), \quad \Psi=\frac{c\beta_1\Sigma^-\operatorname{Sgn}k}{k\beta^2 R}\exp(\beta_2|k|y)$$

где $R=\beta_1\beta_2/\beta^2-1$ — функция Рэлея, $\beta=(1+\beta_2^2)/2$.

Удовлетворяя условию $V(k,0)=V^+(k)$, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^+(k)=H(k)\Sigma^-(k), \tag{2.2}$$

$$H(k)=\frac{2i\beta_0}{\rho_0 cR}\{R\operatorname{cth}(\beta_0|k|)-2B\}\operatorname{Sgn}k, \quad B=\frac{\rho_0 c^4\beta_1}{8\beta_0\beta^2}$$

$$H(k)\sim\frac{2i}{\rho_0 ck}, \quad k\to 0; \quad H(k)\sim\pm\frac{2i\beta_0 S}{\rho_0 cR}=\pm A, \quad k\to\pm\infty$$

где $S=R-2B=0$ — уравнение Стоунли для случая, когда одна из двух сред является идеальной сжимаемой жидкостью. Функция $H(k)$ может обращаться в нуль лишь в интервале $c_S<c<c_R$, где $c_S(c_R)$ — единственный положительный корень уравнения Стоунли (Рэлея). При $0<c<c_S$ и $c_R<c<c^*$, где $c^*=\min(c_0, 1)$, функция $H(k)$ не имеет действительных корней, а в интервале $c_S<c<c_R$ $H(k)$ имеет два действительных симметричных относительно нуля корня $k=\pm k_s$, которым отвечают собственные волны, распространяющиеся с групповой скоростью $c_g<c$. Принцип излучения имеет вид

$$c_g<c, \quad x\to-\infty; \quad c_g>c, \quad x\to\infty \tag{2.3}$$

Проводя факторизацию коэффициента $H(k)$ [7, 8] и используя обобщенную теорему Лиувилля, придем к следующим результатам.

Интервалы $0<c<c_S$ *и* $c_R<c<c^*$. Особенности $V^*(\xi)$ определяют следующую структуру $v(x, 0)$: в него входят постоянное слагаемое (вычет в точке $\xi=0$) и локальное возмущение-экспоненциально исчезающая на бесконечности функция

$$v(x,0) \underset{x\to+0}{\sim} \frac{AC_1\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi x}}, \quad \sigma(x,0) \underset{x\to-0}{\sim} \frac{C_1\exp(i\pi/4)}{\sqrt{-\pi x}} \tag{2.4}$$

Используя условие (1.3), получим

$$C_1=-\sqrt{R/\beta_0 S}\rho_0 c v_0 \exp(-i\pi/4)/2$$

$e_0=\rho_0 c v_0^2/2$. Расход кинетической мощности на единицу длины $K=\rho_0 c v_0^2/2$. Учитывая, что все функции экспоненциально стремятся к нулю при $y\to-\infty$, сразу видим, что энергия сохраняется, $e_0=K$, то есть вся кинетическая энергия выделяется в нуле. Собственные волны в указанных интервалах отсутствуют. При $x\to-\infty$ решение экспоненциально стремится к нулю. Полюс $\xi=0$ обходится сверху.

Интервал $c_S<c<c_R$. В этом интервале $e_0=0$, скачок скорости и напряжение $\sigma(x, 0)$ непрерывны в точке $x=y=0$

$$v(x,0)\sim-2v_0 k_5\sqrt{-S\beta_0 x/\pi R}, \quad x\to+0$$

$$\sigma(x,0)\sim-\rho_0 c v_0 k_5\sqrt{Rx/\pi S\beta_0}, \quad x\to-0$$

Скачок $v(x, 0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а функция $\sigma(x, 0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны (вклад полюсов в точках $\xi=+k_5$ обходятся снизу). Выделим эту собственную волну:

$$\sigma(x,0)\sim-\rho_0 c v_0\sqrt{-R/\beta_0 S}\,\mathrm{Im}\{Q^-(k_5)\exp[-i(k_5 x-\pi/4)]\}/2, \quad x\to-\infty$$

Функция $Q^-(k)$ возникает при факторизации коэффициента $H(k)$ и является аналитической в нижней полуплоскости ξ.

Рассмотрим теперь нормальные и касательные компоненты скоростей упругой и жидкой фаз на границе раздела. Их Фурье-изображения при $y=0$ выражаются по формулам:

$$W_1(k)=ic^3\beta_1\,\mathrm{Sgn}\,k\Sigma^-(k)/2\beta^2 R, \quad W_0(k)=2i\beta_0\,\mathrm{cth}(\beta_0 k)\Sigma^-(k)/\rho_0 c$$

$$U_1(k)=c(R+1+\beta^{-1})\Sigma^-(k)/R, \quad U_0(k)=-2\Sigma^-(k)/\rho_0 c$$

Из формулы для $U_0(k)$ сразу видно, что поведение и асимптотики касательной скорости на поверхности жидкой фазы $u_0(x)$ с точностью до коэффициента $-2/\rho_0 c$ совпадает с поведением функции $\sigma(x, 0)$. Сложность определения структуры и асимптотик остальных функций в том, что они имеют особенности в обеих ξ-полуплоскостях. Выделяя особенности в функциях $W_1(k)$, $W_0(k)$ и $U_1(k)$, придем к следующим результатам.

Интервалы $0<c<c_S$ *и* $c_R<c<c^*$. Поведение функций $w_1(x)$, $w_0(x)$ и $u_1(x)$—одинаково. И слева, и справа от точки $x=0$ решение

есть локальное возмущение (слева $O(1)$, справа $O(x^{-1/2})$). Для функции $w_0(x)$ в решение добавляется скорость на бесконечности.

Интервал $c_S<c<c_R$. Решение для всех функций представляет из себя локальное возмущение $O(1)$ при $x>0$ и расщепляется на локальное возмущение $O(1)$ и собственные волны при $x<0$. Для функции $w_0(x)$ добавляется скорость на бесконечности. Можно показать, что все полученные асимптотики для функций $w_1(x)$ и $w_0(x)$ согласуются с асимптотиками для скачка скорости v.

3. Перейдем теперь к решению задачи, в которой среды поменялись местами. Область $0<y\leqslant 1$, $|x|<\infty$ занята упругой средой, а область $y<0$, $|x|<\infty$ — акустическим полупространством, все обозначения остаются прежними. В краевых условиях (1.2) условие $p=0$ ($y=1$, $|x|<\infty$) заменяется условием $\sigma=\tau=0$ ($y=1$, $|x|<\infty$).

Действуя аналогично п. 1—2, приходим к следующей задаче Римана-Гильберта:

$$V^+(k)=H_1(k)\Sigma^-(k), \quad H_1(k)=\frac{2i\beta_0}{\rho_0 c}\,\frac{F_1(k)}{\Delta_1(k)\Delta_2(k)}$$

$$H_1(k)\sim 2i/ck, \quad k\to 0; \quad H_1(k)\sim\pm A, \quad k\to\pm\infty$$

$$F_1(k)=\left\{\Delta_1(|k|)\Delta_2(|k|)-B\left[\Delta_1(|k|)+\operatorname{th}\frac{|\lambda_1|}{2}\operatorname{th}\frac{|\lambda_2|}{2}\Delta_2(|k|)\right]\right\}\operatorname{Sgn}k$$

$$\Delta_1(k)=(R+1)\operatorname{th}\frac{\lambda_1}{2}-\operatorname{th}\frac{\lambda_2}{2}$$

$$\Delta_2(k)=(R+1)\operatorname{th}\frac{\lambda_2}{2}-\operatorname{th}\frac{\lambda_1}{2}, \quad \lambda_j=k\beta_j, \quad j=1,\ 2$$

Ненулевые действительные решения уравнений $\Delta_1(k)=0$, $\Delta_2(k)=0$ известны [9]. Для определения нулей уравнения $F_1(k)$ использовался численный счет. В результате выяснилось, что уравнение $F_1(k)=0$ в интервале $c_S<c<c_R$ не имеет действительных ненулевых корней, а в интервалах $0<c<c_S$ и $c_R<c<c^*$—по два действительных симметричных относительно нуля корня $k=\pm k_3$ и $k=\pm k_4$. Корни уравнения $\Delta_1(k)=0$, $k=\pm k_1$ существуют только при $c>c_R$, а корни уравнения $\Delta_2(k)=0$, $k=\pm k_2$ существуют лишь при $c<c_R$. Для уравнения $F_1(c,k)=0$ была численно рассчитана производная $c'(k)$ в точках $k=\pm k_i$, $i=3,4$. Оказалось, что корням $k=\pm k_3$ отвечают собственные волны с $c_g>c$, а корням $k=\pm k_4$—собственные волны с $c_g<c$ (совместные локализованные колебания упругой и жидкой фаз).

Выделяя особенности и проводя факторизацию коэффициента $H_1(k)$, получим выражения для оригиналов $v(x,0)$ и $\sigma(x,0)$ в трех интервалах дозвукового диапазона точки контакта.

Интервал $0<c<c_S$. $v(x,0)$ состоит из постоянного слагаемого, локального возмущения и собственной волны. Асимптотическое поведение оригиналов вблизи точки $x=y=0$ описывается формулами (2.4), где вместо коэффициента C_1 стоит C_2:

$$C_2=-cv_0k_2\sqrt{\rho_0R/\beta_0S}\exp(-i\pi/4)/2k_3,\quad e_0=cv_0^2k_2^2/2k_3^2$$

Расходуемая кинетическая мощность $K=cv_0^2/2$, следовательно, часть энергии, выделяющаяся в нуле, зависит от отношения k_2/k_3 (причем $k_2<k_3$). Решение исчезает при $x\to-\infty$. Принцип излучения (2.3) удовлетворяется, то есть собственная волна уносит энергию вправо на бесконечность.

Интервал $c_S<c<c_R$. В этом интервале нет потока энергии в нуль, а асимптотики оригиналов в этой точке таковы, что решение является непрерывной функцией x в точке $x=y=0$:

$$v(x,0)\sim-2v_0k_2\sqrt{-S\beta_0x/\rho_0\pi R},\qquad x\to+0$$

$$\sigma(x,0)\sim-cv_0k_2\sqrt{\rho_0Rx/\pi S\beta_0},\qquad x\to-0$$

Полюса действительной оси обходятся сверху. Поведение $v(x,0)$, определяемое особенностями $V^+(\xi)$ такое же, как и в интервале $0<c<c_S$. Вся кинетическая энергия столкновения уносится собственной волной вправо на бесконечность.

Интервал $c_R<c<c^*$. Асимптотики в нуле описываются формулами, аналогичными (2.4) (C_1 заменяется на C_3):

$$C_3=-cv_0k_4\sqrt{\rho_0R/\rho_0S}\exp(-i\pi/4)/2k_1$$

Полюс $\xi=0$ обходится сверху, а полюса $\xi=\pm k_4$ — снизу. $v(x,0)$ расщепляется на постоянное слагаемое и локальное возмущение, а $\sigma(x,0)$ состоит из локального возмущения и собственной волны. Энергия уносится собственной волной влево на бесконечность, что находится в согласии с принципом излучения.

Нормальные и касательные компоненты скорости при $y=0$ имеют следующую структуру. В интервале $0<c<c_S$ асимптотики всех функций $(w_1(x),\ w_0(x),\ u_1(x))$ есть $O(1)$ при $x\to-0$ и $O(x^{-1/2})$ при $x\to+0$. Поведение функций таково. При $x<0$ $w_1(x)$ есть локальное возмущение, при $x>0$ функция $w_1(x)$ расщепляется на локальное возмущение, собственные волны (сумма вычетов в точках $\xi=\pm k_2$) и скорость упругой полосы при $x\to\infty$ ($w_1(x)\to-v_0$, $x\to\infty$). Для функции $w_0(x)$ решение и слева, и справа представляет из себя локальное возмущение. Функция $u_1(x)$ при $x<0$ есть локальное возмущение, а при $x>0$ в решении присутствуют локальное возмущение и собственные волны. Интервал $c_S<c<c_R$. Поведение всех функций не отличается от их поведения в первом интервале, а асимптотики при $x\to\pm\sim O(1)$. Интервал $c_R<c<c^*$. При $x<0$ все функции представимы в виде локального возмущения и собственных волн, при $x>0$ — локального возмущения. Асимптотическое поведение функций качественно совпадает с их поведением в первом интервале при $|x|\to0$.

Автор выражает благодарность И. В. Симонову за полезные обсуждения.

OBLIQUE IMPACTION BETWEEN ELASTIC STRIPS AND HALF-SPACE WITH STRONG DIFFERENT PARAMETRES

V. V. SAZHIN

ԽԻՍՏ ՏԱՐԲԵՐՎՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ԵՎ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՇԵՂ ՀԱՐՎԱԾԸ

Վ. Վ. ՍԱԺԻՆ

Դիտարկվում են ալիքային դաշտի եղակիությունները ակուստիկական շերտի և առաձգական կիսատարածության (առաձգական շերտի և ակուստիկական կիսատարածության) մինչձայնային ռեժիմում փոքր անկյան տակ ստացիոնար հարվածի դեպքում։ Ֆուրյեի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրը բերվում է Ռիմանի ընդհանրացված խնդրին։ Ֆակտորիզացիայի մեթոդով ստացված լուծումը պարունակում է մի շարք կամայական հաստատուններ, որոնք որոշվում են եզակի կետերում դրված պայմաններից։ Կոնտակտի կետի շարժման արագությունների դիապազոնը Ռելեի և Ստոունլիի ալիքների արագություններով բաժանվում է երեք միջակայքի, որոնցից յուրաքանչյուրում լուծման վարքը տարբեր է։ Որոշված է լուծման վարքը կոնտակտի կետի շրջակայքում և անվերջությունում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.—М.: Наука, 1977. 408С.
2. *Ефремов В. В.* Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №1, с. 171—179.
3. *Ефремов В. В.* О косых соударениях металлических пластин в упругой постановке.—ПМТФ, 1975, №5, с. 167—172.
4. *Симонов И. В.* Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе.—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №6, с. 90—99.
5. *Новацкий В.* Теория упругости.—М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.—М.: Наука, 1972. 439 с.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977. 640 с.
8. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.—М.: Наука, 1978. 295 с.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1979. 349 с.

Институт проблем механики АН СССР

Поступила в редакцию
8.XII.1986