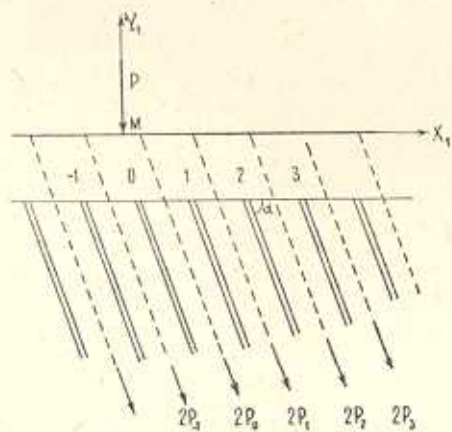


УДК 539.375

ЗАДАЧА ФЛАМАНА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НАКЛОННЫХ ЩЕЛЕЙ

КАМЫШЕВА Г. А., НУЛЛЕР В. М.

1. Пусть упругая изотропная полуплоскость $-\infty < X_1 < \infty$, $Y_1 \leq 0$ с коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига G ослаблена периодической системой параллельных прямолинейных полубесконечных закрытых щелей. Вершины щелей находятся на прямой $Y_1 = -H$, щели наклонены к этой прямой под углом α ($0 < \alpha < \pi/2$), расстояние между щелями равно 2 (фиг. 1). Берега щелей свободны от касательных напряжений. К границе полуплоскости в точке M (начало координат $X_1 Y_1$) приложена сосредоточенная нормальная сила P . На бесконечности, к области, заключенной между l -й и $(l+1)$ -й щелями, приложена продольная растягивающая сила $2P_l$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Требуется определить упругие деформации полуплоскости при условии ограниченности локальной энергии деформаций в окрестности вершин щелей.



Фиг. 1

Разделим плоскость $X_1 Y_1$ на ряд одинаковых наклонных полос с полубесконечными осевыми щелями. В каждой полосе введем две местные прямоугольные декартовы системы координат с началом в вершине щели: X, Y — с осями, параллельными X_1, Y_1 и x, y — с осью x при $x > 0$, совпадающей со щелью. Перенумеруем полосы, считая, что точка M с координатами (x_0, y_0) находится в нулевой полосе. Номера полос и расположенных в них щелей совпадают.

Решение поставленной задачи будем искать в виде суммы решений u^2 задачи Фламана для полуплоскости, нагруженной силой P и u^2 корректирующей смешанной задачи для полуплоскости с указанной системой щелей.

2. Решение задачи Фламана имеет вид

$$\sigma_{X_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{X_1^2 Y_1}{r^4}, \quad \sigma_{Y_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{Y_1^3}{r^4}, \quad \tau_{X_1 Y_1}^1 = \frac{2P}{\pi} \frac{X_1 Y_1^2}{r^4}, \quad r^2 = X_1^2 + Y_1^2 \quad (2.1)$$

Определяемые им касательные напряжения на площадках, параллельных оси Ox , выражаются формулой

$$\tau = [(\sigma_{Y_1}^1 - \sigma_{X_1}^1) a + \tau_{X_1 Y_1}^1 (1 - a^2)] (1 + a^2)^{-1}, \quad a = \operatorname{ctg} \alpha \quad (2.2)$$

В координатах x, y на l -ой щели ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отсюда имеем

$$\tau^l(x, 0) = \frac{2P}{\pi(1+a^2)} \frac{l^2 f_1(x) + l f_2(x) + f_3(x)}{[4l^2(1+a^2) + 4l g_1(x) + g_2(x)]^2} \quad (2.3)$$

$$f_1(x) = -4a\sqrt{1+a^2} (x + \sqrt{1+a^2} x_0)$$

$$f_2(x) = -2[\sqrt{1+a^2} x^2 + 2(a y_0 + x_0)x + \sqrt{1+a^2} x_0] a y_0 + x_0 + a(y_0 - a x_0)$$

$$f_3(x) = (a x_0 + y_0)x^2 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} [(y_0 + a x_0)^2 + 2(x_0^2 - y_0^2)] x + x_0(x_0 + a y_0)(a x_0 - y_0)$$

$$g_1(x) = a x + y_0 \sqrt{1+a^2}, \quad g_2(x) = x^2 + \frac{2(x_0 + a y_0)}{\sqrt{1+a^2}} x + x_0^2 + y_0^2$$

3. Корректирующая задача для полуплоскости определяется касательными напряжениями, равными $-\tau^l(x, 0)$ на l -ой щели, и заданными на бесконечности продольными растягивающими силами P_l ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Пусть $u_{j1}^l(x, y)$ и $u_{j2}^l(x, y)$ — перемещения вдоль осей Ox и Oy , $u_{j3}^l(x, y)$, $u_{j5}^l(x, y)$, $u_{j4}^l(x, y)$ — соответственно нормальные σ_y и σ_x и касательные τ_{xy} напряжения в l -ой полосе. Индекс $j=1$ ($j=2$) обозначает принадлежность функций и параметров к области $0 \leq y \leq 1$ ($-1 \leq y \leq 0$).

Граничные условия и условия на бесконечности запишем в виде

$$\sigma_{Y_1}(X_1, 0) = \tau_{X_1 Y_1}(X_1, 0) = 0 \quad (3.1)$$

$$u_{1s}^{l-1}(x+a, 1) = u_{2s}^l(x-a, -1), \quad s=1, 2, 3, 4 \quad (3.2)$$

$$u_{1s}^l(x, 0) = u_{2s}^l(x, 0) \quad s=2, 3, 4 \quad (3.3)$$

$$u^l(x) \equiv u_{11}^l(x, 0) - u_{21}^l(x, 0) = 0 \quad (x < 0) \quad (3.4)$$

$$\tau_1^l(x) \equiv u_{14}^l(x, 0) = -\tau^l(x, 0) \quad (x \geq 0) \quad (3.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 u_{15}^l(x, y) dy + \int_{-1}^0 u_{25}^{l+1}(x, y) dy \right] = 2P_l \quad (3.6)$$

Применим к выражениям (3.1)–(3.6) дискретное преобразование Фурье с параметром $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$f(x, y, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f^l(x, y) \exp(-i\varphi l) \quad (3.7)$$

$$f^l(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y, \varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi \quad (3.8)$$

Тогда задача (3.1)–(3.6) для полуплоскости сведется к смешанной краевой задаче в плоскости трансформант для полуполосы с косым торцом $-1 \leq y \leq 1$, $-\infty < Y \leq H$ (фиг. 2)

$$\sigma_Y(X, H, \varphi) = \tau_{XY}(X, H, \varphi) = 0 \quad (3.9)$$

$$u_{1s}(x+a, 1, \varphi) = e^{i\varphi} u_{2s}(x-a, -1, \varphi) \quad (3.10)$$

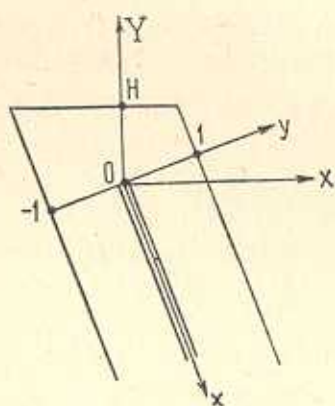
$s=1, 2, 3, 4$

$$u_{1s}(x, 0, \varphi) = u_{2s}(x, 0, \varphi), \quad s=2, 3, 4 \quad (3.11)$$

$$u(x, \varphi) = u_{11}(x, 0, \varphi) - u_{21}(x, 0, \varphi) = 0, \quad (x < 0) \quad (3.12)$$

$$\tau_1(x, \varphi) = -\tau(x, \varphi), \quad (x \geq 0) \quad (3.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 u_{1s}(x, y, \varphi) dy + e^{i\varphi} \int_{-1}^0 u_{2s}(x, y, \varphi) dy \right] = 2\sigma(\varphi) \quad (3.14)$$



Фиг. 2

$$\tau(x, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tau_l^*(x) e^{-i\varphi l}, \quad \sigma(\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_l e^{-i\varphi l} \quad (3.15)$$

Задачу (3.9)–(3.15) будем решать методом кусочно-однородных решений, полагая

$$u^2(x, y, \varphi) = u_{js}(x, y, \varphi) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{js}^k(x, y, \varphi) \quad (3.16)$$

где $u_{js}(x, y, \varphi)$ —решение неоднородной, а $\{u_{js}^k(x, y, \varphi)\}$ —система кусочно-однородных решений задачи для бесконечной полосы со щелью.

4. Неоднородная задача для бесконечной полосы ($-\infty < x < \infty$, $-1 \leq y \leq 1$) определяется условиями (3.10)–(3.15). Возьмем ее решение в форме Папковича-Нейбера и применим к нему двустороннее преобразование Лапласа по x . Удовлетворив семи основным граничным условиям (3.10), (3.11), получим аналогично [1]

$$u_{js}(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p, \varphi) u_{js}^*(p, y, \varphi) e^{px} dp \quad (4.1)$$

$$u_{j1}^*(p, y, \varphi) = \sin py (\rho_j + \alpha_1 \delta \sin 2p) + \cos py [(-1)^j \alpha_2 \delta g_j + \varepsilon] \quad (4.2)$$

$$u_{j2}^*(p, y, \varphi) = \sin py [(-1)^{j+1} \alpha_2 \delta g_j - \varepsilon] + \cos py (\rho_j + \alpha_2 \delta \sin 2p) \quad (4.3)$$

$$u_{j3}^*(p, y, \varphi) = 2Gp \{ \sin py (\rho_j + 2\delta \sin 2p) + \cos py [(-1)^j 2\delta g_j + \varepsilon] \} \quad (4.4)$$

$$u_{j4}^*(p, y, \varphi) = 2Gp \{ \sin py [(-1)^{j+1} \delta g_j - \varepsilon] + \cos py (\rho_j + \delta \sin 2p) \} \quad (4.5)$$

$$u_{j5}^*(p, y, \varphi) = -2Gp \{ \rho_j \sin py + \varepsilon \cos py \} \quad (4.6)$$

где контур L —прямая, $\text{Re } p = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, лежащая правее мнимой оси.

$$\delta \equiv \delta(p, \varphi) = \text{ch}(2ap - i\varphi) - \cos 2p, \quad \alpha_1 = 2(1-\nu), \quad \alpha_2 = 2\nu - 1$$

$$g_j = g_j(p, \varphi) = \exp|(-1)^j (2ap - i\varphi)| - \cos 2p$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \varphi) = p \sin 2p [\delta y - 2 \operatorname{sh}(2ap - i\varphi)]$$

$$\rho_j = \rho_j(p, \varphi) = p \{ (-1)^{j+1} y_0^2 g_j - 2[1 - \cos 2p \operatorname{ch}(2ap - i\varphi)] \}, \quad j=1, 2$$

Подставив (4.1)–(4.6) в смешанные условия (3.12)–(3.13), получим систему двух функциональных уравнений

$$u^+(p, \varphi) = -2x_1 D_1(p, \varphi) C(p, \varphi), \quad \tau^-(p, \varphi) + \tau^+(p, \varphi) = 2G D_2(p, \varphi) C(p, \varphi) \quad (4.7)$$

где

$$u^+(p, \varphi) = \int_0^{\infty} u(x, \varphi) e^{-px} dx, \quad \tau^-(p, \varphi) = \int_{-\infty}^0 \tau_1(x, \varphi) e^{-px} dx$$

$$\tau^+(p, \varphi) = \int_0^{\infty} \tau_1(x, \varphi) e^{-px} dx \quad (4.8)$$

$$D_1(p, \varphi) = \delta^2(p, \varphi), \quad D_2(p, \varphi) = p \sin 2p \delta(p, \varphi) - 2p^2 [1 - \cos 2p \operatorname{ch}(2ap - i\varphi)] \quad (4.9)$$

Исключив из (4.7) функцию $C(p, \varphi)$, получим уравнение Винера-Хопфа

$$u^+(p, \varphi) = K(p, \varphi) [\tau^-(p, \varphi) + \tau^+(p, \varphi)] \quad (p \in L) \quad (4.10)$$

$$K(p, \varphi) = -\frac{x_1}{G} \frac{D_1(p, \varphi)}{D_2(p, \varphi)}$$

Общее решение неоднородной задачи (4.10) согласно [2] выражается формулами

$$u^+(p, \varphi) = u_0^+(p, \varphi) [I(p, \varphi) + A(\varphi)] \quad (4.11)$$

$$I(p, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau_0^+(t, \varphi)}{\tau_0^-(t, \varphi)(t-p)} dt$$

Здесь $u_0^+(p, \varphi)$, $\tau_0^-(p, \varphi)$ — каноническое решение однородного уравнения Винера-Хопфа $u^+(p, \varphi) = K(p, \varphi) \tau^-(p, \varphi)$, построенное, как в [3], и имеющее вид

$$u_0^+(p, \varphi) = \frac{\Gamma(1+p)}{p^2 \Gamma(1/2+p)} \exp I_1(p, \varphi), \quad \operatorname{Re} p \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\tau_0^-(p, \varphi) = \frac{G}{x_1} \frac{\Gamma(1/2-p)}{\Gamma(1-p)} \exp I_1(p, \varphi), \quad \operatorname{Re} p < 0 \quad (4.13)$$

$$I_1(p, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln K_1(t, \varphi)}{t-p} dt, \quad K_1(p, \varphi) = -p \operatorname{tg} \pi p \frac{D_1(p, \varphi)}{D_2(p, \varphi)}$$

Найдем функцию $A(\varphi)$. Подставив (4.7) в (4.1), учитывая (4.10), (4.11) и заменив функцию $K(p, \varphi)$ выражением $u_0^+(p, \varphi) [\tau_0^-(p, \varphi)]^{-1}$, получим

$$u_{js}(x, y, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A(\varphi) + I(p, \varphi)] \frac{\tau_0^-(p, \varphi) u_{js}^*(p, y, \varphi)}{2GD_2(p, \varphi)} e^{px} dp \quad (4.14)$$

Разложим внешний интеграл (2.14) в ряд по вычетам, взятым в полюсах функции $[D_2(p, \varphi)]^{-1}$, и перейдем к пределу при $x \rightarrow \infty$, ($\text{Re } p \leq 0$). Тогда имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{1s}(x, y, \varphi) = -1/2 \tau_0^-(0)(e^{i\varphi} - 1)[A(\varphi) + I^-(0, \varphi)] \quad (4.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_{2s}(x, y, \varphi) = 1/2 \tau_0^-(0)(e^{-i\varphi} - 1)[A(\varphi) + I^-(0, \varphi)] \quad (4.16)$$

Подставив (4.15), (4.16) в (3.14), получим

$$A(\varphi) = \frac{\sigma(\varphi)}{\tau_0^-(0)(1 - e^{i\varphi})} - I^-(0, \varphi) \quad (4.17)$$

Из (4.17) и из формулы Сохоцкого следует

$$A(\varphi) = \frac{\sigma(\varphi)}{\tau_0^-(0)(1 - e^{i\varphi})} + \frac{1}{2} \frac{\tau_0^+(0, \varphi)}{\tau_0^-(0)} + \frac{2}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\tau_0^+(t, \varphi)}{\tau_0^-(t, \varphi)} \frac{dt}{t} \quad (4.18)$$

$$\tau_0^-(0) = \frac{2G \exp I(0, \varphi)}{x_1 \sqrt{1 - \cos \varphi}}$$

Таким образом, решение смешанной неоднородной задачи (3.10) — (3.15) для бесконечной полосы получено в квадратурах.

5. Построим систему кусочно-однородных решений $u_{js}^k(x, y, \varphi)$ ($k=1, 2, \dots$) задачи (3.10) — (3.13) при $\tau(x, \varphi) = 0$, $P_l = 0$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) [4] с особенностями при $x = -\infty$. Распространим условие (3.12) на всю границу $-\infty < x < \infty$, $y = 0$. Тогда полученным однородным граничным условиям

$$u_{1s}(x+a, 1, \varphi) = e^{i\varphi} u_{2s}(x-a, -1, \varphi), \quad u_{1s}(x, 0, \varphi) = u_{2s}(x, 0, \varphi), \quad s=1, 2, 3, 4 \quad (5.1)$$

удовлетворяет решение

$$u_{js}^k(x, y, \varphi) = A_k [u_{js}^*(-p_k, y, \varphi) + x u_{js}^*(-p_k, y, \varphi)] e^{-p_k x} + B_k u_{js}^*(-p_k, y, \varphi) e^{-p_k x} \quad (5.2)$$

Здесь штрих означает производную по p , A_k, B_k — комплексные произвольные постоянные, p_k — комплексные нули функции $D_1(p, \varphi)$ в правой полуплоскости ($k=1, 2, \dots$)

$$p_{4n-3} = \frac{[(4n-3)\pi + \varphi/2](1 - ai)}{1 + a^2}, \quad p_{4n-1} = \frac{[(4n-1)\pi - \varphi/2](1 + ai)}{1 + a^2} \quad (5.3)$$

$$p_{4n-2} = \bar{p}_{4n-3}, \quad p_{4n} = \bar{p}_{4n-1}, \quad A_{4n-2} = \bar{A}_{4n-3}, \quad A_{4n} = \bar{A}_{4n-1}$$

$$B_{4n-2} = \bar{B}_{4n-3}, \quad B_{4n} = \bar{B}_{4n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для удовлетворения условию $\tau_1(x, \varphi) = 0$ при $x \geq 0$ добавим к решению (3.2) решение смешанной задачи (3.10)–(3.13) при условии

$$\tau(x, \varphi) = u_{14}^{k1}(x, 0, \varphi) \quad (x \geq 0) \quad (5.4)$$

которое находится так же, как в п. 4 при $P_l = 0$, и имеет вид

$$u_{j_s}^{k2}(x, y, \varphi) = A_k [T_{k1} J_{j_s}^1(x, y, \varphi) + L_{k1} J_{j_s}^2(x, y, \varphi) + L_{k2} J_{j_s}^3(x, y, \varphi)] + \\ + B_k [T_{k2} J_{j_s}^1(x, y, \varphi) + L_{k2} J_{j_s}^2(x, y, \varphi)] \quad (5.5)$$

$$T_{ki} = T_i(-p_k), \quad L_{ki} = L_i(-p_k), \quad i = 1, 2$$

$$T_1(p) = \frac{\tau_1(p)}{p\tau_0^{-1}(p, \varphi)} - \frac{[\tau_1(p)p^{-1} - \tau_2(p)]}{p\tau_0^-(p, \varphi)}, \quad T_2(p) = \frac{\tau_2(p)}{p\tau_0^-(p, \varphi)}$$

$$L_1(p) = \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^{-1}(p, \varphi)} + \frac{\tau_2(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)}, \quad L_2(p) = \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)}$$

$$\tau_1(p) = u_{14}^+(p, 0, \varphi), \quad \tau_2(p) = u_{14}^-(p, 0, \varphi)$$

$$J_{j_s}^n(x, y, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i \gamma_1} \int_L \frac{u_0^+(p, \varphi) u_{j_s}^+(p, y, \varphi) \exp(px)}{(p+p_k)^{n-1} J_1(p, \varphi)} dp \quad (n=1, 2, 3) \quad (5.6)$$

Теперь k -й элемент системы кусочно-однородных решений может быть выписан как сумма

$$u_{j_s}^k(x, y, \varphi) = u_{j_s}^{k1}(x, y, \varphi) + u_{j_s}^{k2}(x, y, \varphi) \quad (5.7)$$

Перейдем к решению задачи для полуполосы в плоскости трансформант. Для удовлетворения условию на торце (3.9) воспользуемся построенной в п. 5 системой кусочно-однородных решений (5.7).

6. Разложим интегралы (5.6) при $s=3, 4$ в ряды по вычетах в полюсах функции $[D_1(p, \varphi)]^{-1}$. Используя выражения (4.2)–(4.6) и комплексную сопряженность функций (5.3), вычислим $u_{j_s}^{2k-1}(x, y, \varphi) + u_{j_s}^{2k}(x, y, \varphi)$ ($k=1, 2, \dots$). В полученных выражениях перейдем к координатам X, Y . Полагая $Y=H$, $X_{k1} = \operatorname{Re} A_k \exp(q_k H)$, $X_{k2} = \operatorname{Im} A_k \exp(q_k H)$, $X_{k3} = \operatorname{Re} B_k \exp(q_k H)$, $X_{k4} = \operatorname{Im} B_k \exp(q_k H)$, получим

$$u_{j_s}^{2k-1}(X, H, \varphi) + u_{j_s}^{2k}(X, H, \varphi) = \sum_{l=1}^4 \left\{ a_s \theta_{ks} X_{kl} [(d_{ks}^i H + e_{ks}^i) \cos q_k X + \right. \\ \left. + (-1)^i (\bar{d}_{ks}^i H + \bar{e}_{ks}^i) \sin q_k X] + \gamma_s \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{ns} \exp(-(q_k + q_n)H) X_{kl} [(b_{ns}^{kl} H + \right. \\ \left. + c_{ns}^{kl}) \cos q_n X + (-1)^i (\bar{b}_{ns}^{kl} H + \bar{c}_{ns}^{kl}) \sin q_n X] \right\} \quad (6.1)$$

Здесь и ниже \sum' означает суммирование по нечетным k

$$q_k = \sqrt{1+a^2} \operatorname{Re} p_k, \quad a_3 = a_4 = 8G, \quad \theta_{k3} = \theta_{k4} = q_k, \quad \gamma_3 = -\gamma_4 = 4G_{\lambda_1}^{-1}$$

$$d_{k4}^1 = -d_{k3}^2 = F_k, \quad d_{k3}^1 = d_{k4}^2 = E_k, \quad d_{k3}^3 = d_{k4}^4 = \bar{d}_{k3}^3 = \bar{d}_{k4}^4 = 0$$

$$e_{k3}^1 = -H_{k3}, \quad e_{k4}^1 = H_{k4}, \quad e_{k3}^2 = -G_{k3}, \quad e_{k4}^2 = G_{k4}, \quad e_{k3}^3 = -e_{k4}^3 = F_k(1+a^2)^{-1/2}$$

$$e_{k3}^3 = e_{k4}^4 = -F_k(1+a^2)^{-1/2}, \quad \bar{e}_{k3}^1 = e_{k4}^2, \quad \bar{e}_{k3}^2 = e_{k4}^1, \quad \bar{e}_{k3}^3 = -e_{k4}^4, \quad \bar{e}_{k4}^1 = e_{k3}^3$$

$$c_{ns}^{ki} = H_{ns} \operatorname{Re} S_i + G_{ns} \operatorname{Im} S_i + \gamma_{ns}^i, \quad \bar{c}_{ns}^{ki} = G_{ns} \operatorname{Re} S_i - H_{ns} \operatorname{Im} S_i + \bar{\gamma}_{ns}^i \quad (s=3, 4)$$

$$b_{n4}^{ki} = -\bar{b}_{n3}^{ki} = \alpha_{1i}, \quad b_{n3}^{ki} = \bar{b}_{n4}^{ki} = \alpha_{2i}, \quad \bar{\gamma}_{n3}^i = \gamma_{n4}^i = \delta_{1i}, \quad -\gamma_{n3}^i = \bar{\gamma}_{n4}^i = \delta_{2i}$$

$$\alpha_{1i} = F_n \operatorname{Re} S_i + E_n \operatorname{Im} S_i, \quad \alpha_{2i} = E_n \operatorname{Re} S_i - F_n \operatorname{Im} S_i \quad (i=1, 3)$$

$$\alpha_{1i} = E_n \operatorname{Re} S_i + F_n \operatorname{Im} S_i, \quad \alpha_{2i} = -F_n \operatorname{Re} S_i + E_n \operatorname{Im} S_i \quad (i=2, 4)$$

$$\delta_{1i} = (F_n \operatorname{Re} V_i + E_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1}, \quad \delta_{2i} = (E_n \operatorname{Re} V_i - F_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1} \quad (i=1, 3)$$

$$\delta_{1i} = (E_n \operatorname{Re} V_i + F_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1}, \quad \delta_{2i} = (-F_n \operatorname{Re} V_i + E_n \operatorname{Im} V_i)(1+a^2)^{-1} \quad (i=2, 4)$$

$$F_n = q_n(\xi_{1n} - a\xi_{2n}), \quad E_n = q_n(\xi_{1n} + a\xi_{2n}), \quad H_{n1} = \alpha_2 \xi_{2n} + a\alpha_1 \xi_{1n} + \rho_{1n}$$

$$H = \alpha_2 \xi_{1n} - a\alpha_1 \xi_{2n}, \quad H_{n3} = \alpha_2^{-1} \xi_{1n} - \rho_{2n}, \quad H_{n4} = \xi_{2n} + a\xi_{1n} + \rho_{1n}$$

$$G_{n1} = -\alpha_2 \xi_{1n} - a\alpha_1 \xi_{2n} + \rho_{2n}, \quad G_{n2} = -\alpha_1 \xi_{2n} - a\alpha_2 \xi_{1n} - \rho_{1n}$$

$$G_{n3} = -\alpha_2^{-1} \xi_{2n} + \rho_{1n}, \quad G_{n4} = \xi_{1n} - a\xi_{2n} + \rho_{2n}, \quad \xi_{1n} = \operatorname{Re}(\sin^2 2p_n)$$

$$\xi_{2n} = \operatorname{Im}(\sin^2 2p_n), \quad \rho_{1n} = q_n(1+a^2)^{-1/2} [2a \operatorname{Re}(\sin 4p_n) + (1-a^2) \operatorname{Im}(\sin 4p_n)]$$

$$\rho_{2n} = q_n(1+a^2)^{-1/2} [(1-a^2) \operatorname{Re}(\sin 4p_n) - 2a \operatorname{Im}(\sin 4p_n)]$$

$$S_i \equiv S_i(-p_k, p_n) = [f_n(-p_k) + (-1)^{i+1} f_n(-\bar{p}_k)] [\delta'(p_n, \varphi)]^{-2}, \quad i=1, 2$$

$$S_i \equiv S_i(-p_k, p_n) = [g_n(-p_k) + (-1)^{i+1} g_n(-\bar{p}_k)] [\delta'(p_n, \varphi)]^{-2}, \quad i=3, 4$$

$$V_i \equiv V_i(-p_k, p_n) =$$

$$\frac{[m_n(-p_k) + (-1)^{i+1} m_n(-\bar{p}_k)] \delta'(p_n, \varphi) - [f_n(-p_k) + (-1)^{i+1} f_n(-\bar{p}_k)] \delta''(p_n, \varphi)}{[\delta'(p_n, \varphi)]^2} \quad (i=1, 2)$$

$$V_i \equiv V_i(-p_k, p_n) =$$

$$\frac{[h_n(-p_k) + (-1)^{i+1} h_n(-\bar{p}_k)] \delta'(p_n, \varphi) - [g_n(-p_k) + (-1)^{i+1} g_n(-\bar{p}_k)] \delta''(p_n, \varphi)}{[\delta'(p_n, \varphi)]^2} \quad (i=3, 4)$$

$$f_n(p) = u_0^+(p_n, \varphi) \left[T_1(p) + \frac{\tau_1(p) + \tau_2(p)(p_n - p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} \right]$$

$$g_n(p) = u_0^+(p_n, \varphi) \left[T_2(p) + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)} \right]$$

$$m_n(p) = u_0^+(p_n, \varphi) \left[T_1(p) - \frac{\tau_1(p) - \tau_2(p)(p_n - p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)} \right] -$$

$$-u_0^+(p_n, \varphi) \left[\frac{2\tau_2(p) + \tau_2(p)(p_n - p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2} \right]$$

$$h_n(p) = u_0^+(p_n, \varphi) \left[T_1(p) + \frac{\tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)} \right] + \frac{u_0^+(p_n, \varphi) \tau_1(p)}{\tau_0^-(p, \varphi)(p_n - p)^2}$$

Разложим интегралы (4.1) при $s=3, 4$ в ряды по вычетам в полюсах функции $[D_s(p, \varphi)]^{-1}$. Учитывая (5.3), перейдем к координатам X, Y и положим $Y=H$. Тогда получим

$$u_{js}(X, H) = 4Gx_1^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \exp(-q_k H) \{ \cos q_k X [\beta_{ks}^1 H + \beta_{ks}^2] + \sin q_k X [\beta_{ks}^3 H + \beta_{ks}^4] \} \quad (6.2)$$

$$\beta_{ks}^l = \alpha_{ks}^l \operatorname{Re} Q_1(p_k) + \mu_{ks}^l \operatorname{Im} Q_1(p_k) + k_{ks}^l$$

$$\alpha_{k3}^1 = -\alpha_{k4}^3 = -\mu_{k3}^3 = -\mu_{k4}^1 = E_k, \quad \alpha_{k3}^3 = \alpha_{k4}^1 = \mu_{k3}^1 = -\mu_{k3}^3 = -F_k$$

$$\mu_{k3}^4 = -\alpha_{k3}^2 = H_{k3}, \quad \alpha_{k3}^4 = \mu_{k3}^2 = -G_{k3}, \quad \alpha_{k4}^2 = -\mu_{k4}^4 = H_{k4}$$

$$\alpha_{k4}^4 = \mu_{k4}^2 = G_{k4}, \quad k_{k3}^1 = k_{k3}^3 = k_{k4}^1 = k_{k4}^3 = 0$$

$$k_{k3}^2 = -k_{k4}^4 = [-\operatorname{Re} Q_2(p_k) E_k + \operatorname{Im} Q_2(p_k) F_k] (1 + a^2)^{-1/2}$$

$$k_{k3}^4 = k_{k4}^2 = [\operatorname{Re} Q_2(p_k) F_k + \operatorname{Im} Q_2(p_k) E_k] (1 + a^2)^{-1/2}$$

$$Q_1(p) = u^+(p, \varphi) [\delta'(p, \varphi)]^{-2}$$

$$Q_2(p) = [u^+(p, \varphi) \delta'(p, \varphi) - u^+(p, \varphi) \delta''(p, \varphi)] [\delta'(p, \varphi)]^{-2}$$

Учитывая (6.1), (6.2), подставим выражение (3.16) в граничные условия (3.9). В образовавшихся двойных рядах поменяем порядки суммирования. Приравнявая множители при функциях $\cos q_k X$ и $\sin q_k X$, получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^4 \left\{ (d_{ki}^i H + e_{ki}^i) X_{ki} + (2x_1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{ks}^{ni} H + c_{ks}^{ni}) \exp(-(q_n + q_k) H) X_{ni} \right\} = \\ = 4G(x_1)^{-1} q_k \exp(-q_k H) (\beta_{ks}^1 H + \beta_{ks}^2), \quad k=1, 2, \dots, \quad s=3, 4 \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left\{ (\tilde{d}_{ki}^i H + \tilde{e}_{ki}^i) X_{ki} + (2x_1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{b}_{ks}^{ni} H + \tilde{c}_{ks}^{ni}) \exp(-(q_n + q_k) H) X_{ni} \right\} = \\ = 4Gx_1^{-1} q_k \exp(-q_k H) (\beta_{ks}^3 H + \beta_{ks}^4), \quad k=1, 2, \dots, \quad s=3, 4$$

Эта система является нормальной по Пуанкаре-Коху, в ней недиагональные матричные элементы экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов. Неизвестные $X_{ki} = X_{ki}(\varphi)$ могут быть найдены из соответствующей редуцированной системы.

Применив к полученному решению для полуплоскости обратное преобразование Фурье (3.8), перейдем от трансформированных к исходным компонентам напряженно-деформированного состояния полуплоскости.

В частности, коэффициент интенсивности касательных напряжений на продолжении l -ой щели определяется по формуле

$$N^t = \frac{G}{z_3 \sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi + \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} C_k(\varphi) \exp(-i\varphi l) d\varphi \right] \quad (6.4)$$

где

$$C_k(\varphi) = [X_{k1} \operatorname{Re} T_{k1} - X_{k2} \operatorname{Im} T_{k1} + X_{k3} \operatorname{Re} T_{k2} - X_{k4} \operatorname{Im} T_{k2}] \exp(-q_k H)$$

FLAMANT PROBLEM FOR HALF-PLANE WEAKENED BY PERIODIC SYSTEM OF INCLINED CRACKS

G. A. KAMYSHEVA, B. M. NULLER

ԹԵՔ ՀԱՔԵՐ ՊԱՐՔԵՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՎ ՔՈՒԱՑՎԱՍ
ԿԻՍԱՀԱՐՔՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՅԱՄԱՆԻ ԿՆԿԻՐԸ

Գ. Ա. ԿԱՄՅԵՎԱ, Բ. Մ. ՆՈՒԼԵՐ

Ա մ ֆ ո ֆ ու մ

Դիտարկվում է առածրական կիսահարթության դեֆորմացիայի խնդիրը որը թուլացված է կիսաանվերջ, փակ, թեք ճաքերի պարբերական համակարգով: Ենթադրվում է, որ ճաքերում շոշափող լարումները համասար են զրոյի, ճաքի ափերը դեֆորմացիայի բնթացքում չեն հեռանում, կիսահարթության եզրին կիրառված է կենտրոնացված նորմալ ուժ, իսկ անվերջությունում երկու հարևան ճաքեր ձգված են կամայական երկայնական ուժերով: Այս խնդրի օրինակով մշակված է կտոր առ կտոր համասեռ լուծումների մեթոդի մի տարբերակ, որը թույլ է տալիս Ֆուրյեի դիսկրետ ձևափոխությունների հետ համատեղ լուծել քվադրապարբերական խառը խնդիրների մի ամբողջ դաս: Խնդիրը բերված է Պուանկարե-Կոչի նորմալ համակարգի: Ստացված է բանաձև ցանկացած ճաքում լարումների ինտենսիվության գործակցի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. Камышева Г. А., Нуллер Б. М. Об одном классе смешанных периодических задач теории упругости, разрешимых в квадратурах—Докл. АН СССР, 1979, т. 249, №2, с. 311—314.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.
3. Камышева Г. А., Нуллер Б. М., Рыжик М. Б. Деформация упругой плоскости, подкрепленной периодической системой неперпендикулярно нагруженных наклонных полубесконечных стрингеров.—МТТ, 1982, №3, с. 118—123.
4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1977. 403 с.

Ленинградская Лесотехническая академия
им. С. М. Кирова.

ВНИИГидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила в редакцию
18.VI.1985.