ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 6, 1987 Механика

УДК 539.3:532.59

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ С ПРИМЕСЯМИ

БАГДОЕВ А. Г., МОВСИСЯН Л. А.

Нелинейные волны в диспергирующих средах являются сложным процессом и даже в случае малых возмущений возможны качественно различные картины волнового движения, возникшего из начального монохроматического профиля:

а) в случае значительной дисперсии волна меняется медленно и амплитуды огибающих пакетов удовлетворяют уравнениям модуляций;

б) в случае большого значения параметра нелинейности синусоидальный профиль превращается в солитоны, которые описываются уравнением совершенно иного вида—$K\partial B$ [1—3].

Для пластин и оболочек различные аспекты первого типа задач исследованы в [4—6] и др. В частности, показано, что как правило, для металлических пластин и оболочек волны модуляции неустойчивы, в то время как для биологических сред устойчивы.

В настоящей работе для цилиндрической оболочки, содержащей жидкость с примесью, изучаются задачи развития возмущений с сильной и слабой нелинейностями. Получены уравнения $K\partial B$ и модуляции и обсуждены возможности применения решений к различным задачам, в частности, к гемодинамическим.

1. Основные уравнения

Рассмотрим движение смеси несжимаемой жидкости с деформируемыми (жидкость или газ) частицами в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке в предположении равенства скоростей компонент смеси. Как известно, плотность смеси определяется формулой [7, 8]

$$\rho=\rho_f(1-\beta)+\rho_g\beta,\quad \rho_f=\text{const} \tag{1.1}$$

где ρ_f, ρ_g—плотности несущей жидкости и примеси, а β—концентрация примеси.

Определяющие соотношения для смеси в предположении политропности колебания частиц включений можно брать в виде [7, 8]

$$P_g=\rho_g^n\text{const},\quad \rho_g=\frac{\text{const}}{r^3},\quad \frac{1-\beta}{\beta P_g^{1/n}}=\text{const} \tag{1.2}$$

Здесь r—радиус частиц, n—показатель политропы.

Вообще говоря, для газовых пузырьков в жидкости [7, 8] давление в пузырьках P_g связано с давлением смеси P уравнением Релея, которое после отбрасывания нелинейных и вязких членов имеет вид

$$P_g = P - \rho r \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Одномерные уравнения движения оболочки и жидкости берем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$(w+R) \frac{\partial \rho}{\partial t} + 2(\rho_0 + \rho) \frac{\partial w}{\partial t} + (v_0 + v)(R + w) \frac{\partial \rho}{\partial x} +$$
$$+ (\rho_0 + \rho)(R + w) \frac{\partial v}{\partial x} + 2(\rho_0 + \rho)(v_0 + v) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (1.3)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \gamma_2 \varkappa + \frac{Eh}{R^2} w - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P + \bar{\rho} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

где ρ_0, v_0, P_0—начальная плотность, скорость и давление смеси, R—начальный радиус оболочки

$$\varkappa = \frac{2Eh^3}{81(1-\nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{3h^2}{10} A^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3 + [2A^2(1+3\nu^2) + B^2 - 6\nu AB] \left(\frac{w}{R}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} +$$
$$+ \frac{8Eh}{27R(1+\nu)} \left\{ [2A^2(1+\nu^2) - 4\nu AB(1+\nu^2) + 2B^2\nu^2] \left(\frac{w}{R}\right)^3 + \frac{h^2}{12} [2A^2(1+\right.$$
$$\left. + 3\nu^2) - 6\nu AB + B^2] \frac{w}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \right\}$$

$$A = \frac{1-\nu+\nu^2}{(1-\nu)^2}, \quad B = \frac{4\nu - 1 - \nu^2}{(1-\nu)^2}$$

Система (1.3) отличается от известных уравнений движения оболочки с жидкостью тем, что для включений давление связано с плотностью уравнениями (1.2). Как будет показано ниже, для металлических оболочек в вопросах нелинейности и дисперсии это является определяющим.

На основании (1.2) и (1.3) получим

$$\frac{n}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{P_g} \frac{\partial P_g}{\partial t}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} = (\beta - 1) \frac{\beta}{nP_g} \frac{\partial P_g}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial P_g}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{nP_g}{\beta[\rho_f + \beta(\rho_g - \rho_f)]}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{r}{3nP_g} \frac{\partial P_g}{\partial t} \qquad (1.4)$$

и такие же соотношения для производных по x.

2. Уравнение коротких волн

Для изучения решения (1.3) при наличии (1.4) вблизи фронта волн следует ввести новую переменную

$$\tau = t - \frac{x}{a} \tag{2.1}$$

где a — невозмущенная скорость волны, и оставить в уравнениях главные по порядку величины ($P \approx P_к$). Тогда получаются соотношения

$$vV_0 = \frac{P}{\rho_0 a} = \frac{Ehw}{\rho_0 a R^2}, \quad V_0 = 1 - \frac{v_0}{a}$$

$$\rho = \frac{P}{c_0^2}, \quad c_0^2 = \frac{nP_0}{\beta_0 [\rho_f + \beta_0(\rho_ж - \rho_f)]} \tag{2.2}$$

$$\beta = (\beta_0 - 1)\beta_0 \frac{\rho}{\rho_0}, \quad r = -\frac{r_0}{3\rho_0}\rho$$

где $\beta = \beta_0 + \beta$, $r = r_0 + r$, $\rho = \rho_0 + \rho$ и формула для скорости волны

$$\frac{1}{a^2} = V_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_ж^2} \right), \quad c_ж^2 = \frac{Eh}{2\rho_0 R} \tag{2.3}$$

В уравнениях (1.3), записанных в переменных (x, τ), подставляя в нелинейные и дисперсионные слагаемые (1.6), оставляя в них лишь производные по τ и исключая $\partial\rho/\partial\tau$ и $\partial w/\partial\tau$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \eta v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \zeta \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} + \delta \frac{\partial^5 v}{\partial \tau^5} + \frac{\gamma_2}{\rho_0 a} \bar{\chi} = 0 \tag{2.4}$$

где введены обозначения

$$\eta = \frac{B_1}{A_1}, \quad \zeta = \zeta_1 + \frac{C_1}{A_1}, \quad \delta = \frac{D_1}{A_1}, \quad A_1 = \frac{v_0 a}{c_0^2} V_0 + \frac{2R\rho_0 v_0 a}{Eh} V_0 + 1 + \frac{1}{V_0}$$

$$B_1 = V_0 \left(\frac{3a^2}{c_0^2} V_0^2 \frac{R\rho_0}{Eh} - \frac{2}{c_0^2} - \frac{5R\rho_0}{Eh} - \frac{V_0^2}{c_0^4} \frac{na^2}{\beta_0^2} \right) \tag{2.5}$$

$$C_1 = \frac{aR}{2\rho_0 c_ж^2} V_0^2 \left(\frac{T_0}{a^2} - \bar{\rho} h \right), \quad D_1 = -\frac{1}{2\rho_0 c_ж^2} V_0^2 \frac{D}{a^3}, \quad \zeta_1 = -\frac{r_0^2}{3ac_0^2} V_0$$

$\bar{\chi}$ есть значение $\frac{\partial\chi}{\partial\tau}$, в котором w заменено на v по (2.2) и принято $\frac{\partial}{\partial x} \approx -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau}$.

Уравнение (2.4) описывает длинноволновые возмущения и при несинусоидальных волнах последний член можно отбросить (задача второго типа). В частном случае, когда жесткость оболочки мала, из (2.4) получаем уравнение КдВ [1]

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \eta v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \zeta \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = 0 \tag{2.6}$$

которое с использованием соотношения $\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \tau}$ и заменой переменных

$$\xi = -\frac{\sigma}{l}\tau, \quad z = \frac{v'}{l}t, \quad u = -\frac{a^2\eta}{v'}v \tag{2.7}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \tag{2.8}$$

где $\sigma^2 = -\frac{l^2 v'}{a^4 \zeta}$, l, v'—постоянные, характеризующие длину и амплитуду начального импульса.

Задавая начальные данные в виде [1]

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi) \tag{2.9}$$

можно получить для больших σ набор солитонов, число которых определяется формулой

$$N = \frac{\sigma}{\pi\sqrt{6}} \int\limits_{\varphi>0} \sqrt{\varphi}\, d\xi \tag{2.10}$$

Как известно, уравнение KdB допускает рассмотрение задач с начальным или граничным условиями. В частности, в (2.9), характеризующем возмущение, локализованное в интервале l можно поменять $t=0$ на $x=0$.

Представляет интерес задача о первоначально синусоидальном возмущении большой амплитуды

$$P_{t=0} = -\rho_0 \frac{v'}{a\eta} V_0 \sin\xi \tag{2.11}$$

Численный расчет уравнения KdB показывает [9] распад синусоидального возмущения на солитоны.

Для примера рассмотрим стальную трубу, внутри которой движется жидкость с пузырьками, с небольшой скоростью $V_0 \approx 1$. Принимая $\beta_0 = 0.1$, $\rho_0 R = \bar{\rho} h$, будем иметь $c_0 = 50$ м · сек$^{-1}$, $a \approx c_0$. При этом параметр дисперсии $\zeta = aR^2\left(\frac{1}{c_2^4} + \frac{r_0^2}{3R^2 c_0^4}\right)$, где $c_l = \sqrt{E/\bar{\rho}} = 5 \cdot 10^3$м·сек$^{-1}$. Отсюда видно, что при $r_0/R \gg 10^{-4}$ пузырьковая дисперсия преобладает по сравнению с оболочечной; параметр σ может быть сделан достаточно малым, и при этом применима теория модуляций [4—6]. С другой стороны, для кровеносных сосудов, в которых с некоторой точностью эритроциты можно описывать моделью (1.2) (с приведенными значениями радиуса сфер), где жидкие [15] примеси—эритроциты, имеют показатель политропы $n \approx 5$ и скорость звука в трубке $c_l = 10$ м · сек$^{-1}$, оболочечная дисперсия является определяющей. Для нестационарных процессов длительностью $t = 2 \cdot 10^{-2}$ сек, принимая $l/R = 20$, $R/h = 10$, получим $\sigma = 28$, то есть нелинейность велика.

Следует отметить, что для длительных процессов (порядка десятков секунд) величина σ очень большая, что приводит к большим N.

При этом солитоны сливаются и получается ударная волна, имеющая осциллирующую структуру, чем объясняются звуки Короткова [9].

3. Исследование волн модуляции

В случае монохроматических волн решение (2.4) можно брать в виде волновых пакетов с учетом (2.2)

$$w=w_0+w_1e^{i\theta}+\bar{w}_1e^{-i\theta}+w_2e^{2i\theta}+\bar{w}_2e^{-2i\theta}, \quad \theta=k'x-\omega\tau \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.4) и приравнивая слагаемые при одинаковых гармониках, можно получить нелинейное уравнение дисперсии для длинных волн ($kR\ll 1$)

$$\omega=\omega_0(k)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0 w_1^2 \tag{3.2}$$

где ω_0—линейная частота и $k=k'+\omega/a$

$$\omega_0=ak+\zeta a^4k^3-\theta a^6k^5 \tag{3.3}$$

Следует отметить, что при получении как ω_0, так и $(\partial\omega/\partial w_1^2)_0$ учтено, что $kR\ll 1$.

В выражении $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0$ слагаемое, соответствующее упругой нелинейности, не связано с нелинейностью жидкости и поэтому его можно получить, как в [4—6]. Тогда выражение $(\partial\omega/\partial w_1^2)_0$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0=-\frac{1}{6}\,\frac{(Z\eta)^2}{k_*}+\frac{12\bar{c}D}{h^2}\left[2\omega_0\left(\bar{\rho}h+\frac{2\rho_0R}{m^2}\right)+\frac{4\rho_0v_0}{m}\right]^{-1} \tag{3.4}$$

$$Z=\frac{Eh}{\rho_0aR^2V_0}$$

$$\bar{c}=\frac{\gamma_2}{9}\left[\frac{\nu_1h^4k^8}{20}+\frac{4}{R^4}(1+\nu)^4(1-\nu)+\frac{h^2k^4}{R^2}\,\frac{1-2\nu+4\nu^3-3\nu^4-2\nu^5+2\nu^6}{(1-\nu)^3}\right]$$

В силу предположения $kR\ll 1$ слагаемое от θ в (3.4) отброшено.

В [6, 11] приведено неточное значение $\bar{c}$. Для несжимаемого материала ($\nu=0{,}5$) формулы (3.4) и работ [6, 11] совпадают и дают

$$\bar{c}=\frac{3\gamma_2}{4R^4}\left[\frac{3}{2}+\frac{h^4k^8R^4}{30}+\frac{1}{3}h^2k^4R^2\right] \tag{3.5}$$

что получено в [5].

В случае металлических труб $a\approx c_0$, $\omega_0\approx c_0k$ и получится (при $\nu=0{,}5$)

$$\frac{R^4kc_0}{c_l^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0=A_2+\frac{2}{3}\,\frac{\bar{c}'}{1+\dfrac{2\rho_0R}{\bar{\rho}h(kR)^2}}$$

$$A_2=\frac{1}{8}\,\beta_0^{-1}\left(\frac{c_l}{c_0}\right)^2\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^2\left(\frac{h}{r_0}\right)^2, \quad \bar{c}'=R^4c \tag{3.6}$$

Хотя $\gamma_2<0$, первое слагаемое в (3.6) (связанное с жидкостью) намного больше второго и $\partial\omega/\partial w_1^2>0$. Согласно (3.3) $\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\approx 6\zeta a^4 k$ и при отсутствии натяжения ($T_0=0$) $\frac{d^2\omega_0}{dk^2}<0$, что следует из (2.5).

Таким образом, благодаря изменению знаков обоих множителей (по сравнению с оболочкой без жидкости) вновь имеет место соотношение

$$\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0<0 \tag{3.7}$$

что приводит к неустойчивости волн модуляции.

Рассмотрим случай биологических сосудов. В этом случае [12] $\beta_0=0{,}5$ и $c_0=14$ м · сек$^{-1}$, $a=7$ м · сек$^{-1}$. Как известно [12], при $T_0\geqslant 0{,}18\,Eh$, $\zeta>0$, $\frac{d^2\omega_0}{dk^2}>0$ и знак $\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}$ определяет устойчивость. Как известно [12], кровеносные сосуды, в основном, состоят из эластика и коллагена, причем нелинейные характеристики их различные (для эластика $\gamma_2>0$, а для коллагена $\gamma_2<0$). В нормальных условиях влияние эластина преобладает и для всего сосуда $\gamma_2>0$. Тогда $\partial\omega/\partial w_1^2>0$ и имеет место устойчивость волн модуляций. Для малых T_0 и (или) для старых сосудов (преобладание коллагена) имеет место неустойчивость волн. В последнем случае возмущение распадается на солитоны [1, 13]. Для вычисления амплитуды и количества солитонов следует решить уравнение типа Шредингера [1]:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial x}+p\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+q|\psi|^2\psi=0 \tag{3.8}$$

где $\psi=w_1e^{i\Phi}$, а Φ—добавочная фаза за счет нелинейности,

$$p=\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0}{dk^2}\left(\frac{d\omega_0}{dk}\right)^{-3},\quad q=-\left(\frac{\partial\omega}{\partial w_1^2}\right)_0\left(\frac{d\omega_0}{dk}\right)^{-1},\quad \xi=t-\frac{x}{\omega_0'(k)}$$

Следует [14], возьмем простейший случай прямоугольного импульса

$$\psi(t,0)=\begin{cases}\psi_1 & \text{для}\quad |t|<t_l/2\\ 0 & \text{для}\quad |t|>t_l/2\end{cases}$$

где t_l—время действия граничного импульса амплитуды Ψ_1.

Тогда решение (3.8) можно записать в виде

$$\psi=s\exp\left(\frac{i}{2}s^2qx\right)\operatorname{sch}\sqrt{\frac{q}{2p}}\,\xi$$

$$s=2\psi_{\text{пр}}\sqrt{\left(\frac{\psi_1}{\psi_{\text{пр}}}\right)^2-\eta_n^2},\quad \psi_{\text{пр}}=\sqrt{\frac{2p}{q}}\frac{\pi}{2t_l}$$

где η_n—корни уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\gamma_n+\gamma_n\Big/\sqrt{\left(\frac{\psi_1}{\psi_{\text{пр}}}\right)^2-\gamma_n^2}=0$$

При этом число солитонов меньше или равно целой части $\psi_1/\psi_{\text{пр}}$. В случае стальной трубы $c_0/c_l=10^{-2}$ имеем

$$\frac{\psi_{\text{пр}}}{R}=5\cdot 10^{-7}\,\frac{Rkr_0}{c_l t_l}$$

откуда видно, что даже для очень малых возмущений получатся солитоны.

Для вышеприведенного биологического материала при малых T_0, $\gamma_2=10^4$, $\nu=0{,}5$, $kR=1$ пороговое значение амплитуды равно

$$\psi_{\text{пр}}=\frac{\pi}{8}\,\frac{h^2}{c_{ж}t_l}$$

то есть здесь пороговое значение амплитуд на несколько порядков больше, чем для металлов.

ON THE NON-LINEAR WAVES IN CYLINDRICAL SHELLS CONTAINING FLUID WITH INCLUSIONS

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ԽԱՌՆՈՒՐԴՈՎ ՀԵՂՈՒԿ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՈՒՄ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Ամփոփում

Գլանային թաղանթի համար, որը պարունակում է խառնուրդով հեղուկ, դիտարկվում են թույլ և ուժեղ ոչ գծայնություններով դրգռումների զարգացման խնդիրները: Ստացված են ԿԴՎ և մոդուլյացիաների հավասարումներ և քննարկված են լուծումների օգտագործման հնարավորությունները տարբեր, մասնավորապես հեմոդինամիկայի խնդիրներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
2. *Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные эволюционные уравнения.—Таллин: Валгус, 1984. 154 с.
3. *Островский Л. А., Сутин А. М.* Нелинейные упругие волны в стержнях.—ПММ, 1977, т. *41*, вып. 3, с. 531—537.
4. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Уравнения модуляции в нелинейных диспергирующих средах и их применение к волнам в тонких телах.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1980, т. *33*, №3, с. 169—176.

5. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* К устойчивости распространения пульсовой волны. Механика (Межвуз. сб. науч. трудов), 1982, вып. 1, с. 31—39.
6. *Bagdoev A. G.* and *Movsisian L. A.* Some Problems of Stability of Propagation of Non-Linear Waves in Shells and Plates.—Int. J. Non-Linear Mechanics. 1984, v. 19, № 3, p. 245—253.
7. *Ван-Вейнгарден Л.* Одномерное течение жидкости с пузырьками газа. Реология суспензий (сб. статей). М.: Мир, 1975, с. 69—103.
8. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. *137*, № 6, с. 1331—1333.
9. *Чугаевский Ю. В.* Элементы теории нелинейных и быстропеременных волновых процессов. Кишинев: Изд. «Штиинца», 1974, 183 с.
10. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения, М.: Мир, 1981. 624 с.
11. *Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А.* Некоторые задачи по устойчивости распространения нелинейных волн.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. *37*, № 2, с. 3—11.
12. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
13. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 612 с.
14. *Лукомский В. П.* Самоиндуцированная прозрачность при акустическом ядерном резонансе в антиферромагнетиках. Украинский физический журнал. 1979, т. *24*, № 7, с. 975—981.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила в редакцию
21.XI.1986