ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 5, 1987 Механика

УДК 533.6.013.42

КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ, БЛИЗКИХ К ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ

ЛАМПЕР Р. Е., ЛЕВИН В. Е.

В конструкцию летательного аппарата могут входить упругие тонкостенные баки-оболочки. Для расчета их колебаний используются различные методы, схемы которых основаны на допущении об осевой симметрии оболочек. Это позволяет провести решения с разделением переменных.

Назначение конструкции бака или технология изготовления могут вызвать сознательное или случайное отступление от некоторой исходной формы при сохранении упругих параметров исходной оболочки.

Рассмотрим частично заполненную жидкостью оболочку S, подкрепленную шпангоутами. Предположим, что она мало отличается от осесимметричной «основной» оболочки S_0, имеющей одинаковые с S жесткостные характеристики. Для срединных поверхностей оболочек используем те же обозначения. Отличие оболочки S от S_0 можно считать начальной неправильностью.

Сформулируем задачу о колебаниях бака S, отнеся его к области, занимаемой основным баком. Пренебрежем массой сухого бака и энергией волнообразования на свободной поверхности жидкости.

1. Поверхность вращения S_0 отнесем к цилиндрическим координатам z, r, θ и параметризуем главными координатами $\alpha^1=s$, $\alpha^2=\theta$ (s—длина меридиана, θ—окружная координата). Между поверхностями S и S_0 установим взаимнооднозначное соответствие

$$\vec{r}(s,\theta)=\vec{r}_0(s,\theta)+\mu\vec{U}(s,\theta) \tag{1.1}$$

где $\vec{r}(s,\theta)$, $\vec{r}_0(s,\theta)$—радиусы-векторы поверхностей S и S_0; $\vec{U}(s,\theta)$—вектор начальной неправильности оболочки S_0, μ—малый параметр.

В силу (1.1) поверхность S также параметризована координатами s, θ. Такой способ параметризации (метод фиктивной деформации) применен к пластинам и оболочкам в работах [1, 2].

По выражению радиуса-вектора (1.1) можно вычислить компоненты метрических тензоров поверхности S и символы Кристоффеля, а затем развернуть тензорные соотношения выбранного варианта теории оболочек применительно к оболочке S. Можно действовать и иначе. Радиус-вектор оболочки S после деформации запишем в аналогичной (1.1) форме

$$\vec{r}^*(s,\,\vartheta)=\vec{r}(s,\,\vartheta)+\vec{u}(s,\,\vartheta) \tag{1.2}$$

где $\vec{u}(s,\,\vartheta)$—вектор упругого перемещения оболочки S.

Векторы $\vec{U}(s,\,\vartheta)$ и $\vec{u}(s,\,\vartheta)$ разложим на компоненты по единичным ортогональным векторам $\vec{i}_s,\ \vec{i}_\vartheta,\ \vec{i}_n$ локального базиса основной оболочки S_0.

$$\vec{U}(s,\,\vartheta)=U(s,\,\vartheta)\vec{i}_s+V(s,\,\vartheta)\vec{i}_\vartheta+W(s,\,\vartheta)\vec{i}_n$$

$$\vec{u}(s,\,\vartheta)=u(s,\,\vartheta)\vec{i}_s+v(s,\,\vartheta)\vec{i}_\vartheta+w(s,\,\vartheta)\vec{i}_n$$

Компоненты первой и второй квадратичных форм недеформированной и деформированной оболочек определяются по формулам

$$a_{ij}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^i}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha^j},\qquad b_{ij}=\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}\,\vec{n},\quad a^*_{ij}=\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial\alpha^i}\,\frac{\partial\vec{r}^*}{\partial\alpha^j},\quad b^*_{ij}=\frac{\partial^2\vec{r}^*}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}\,\vec{n}^*$$

где $\vec{n}$—внешняя нормаль к поверхности, значком (*) снабжены параметры деформированной оболочки. Компоненты тензоров тангенциальной и изгибной деформации оболочки S будут

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij}=a^*_{ij}-a_{ij},\quad \tilde{\beta}_{ij}=b^*_{ij}-b_{ij}$$

При сохранении первых степеней μ для малых деформаций получим выражения

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=r^{i+j-2}\,(\varepsilon_{ij}+\mu\varepsilon^0_{ij}),\quad \tilde{\beta}_{ij}=r^{i+j-2}\,(\beta_{ij}+\mu\beta^0_{ij}) \tag{1.3}$$

Введем обозначения $e_{ij}=e_{ij}(u,\,v,\,w)$, $e^0_{ij}=e_{ij}(U,\,V,\,W)$. Величины $e_{ij}(u,\,v,\,w)$ определяются формулами

$$e_{11}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{w}{R_1},\quad e_{12}=\frac{\partial v}{\partial s},\quad e_{13}=\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{u}{R_1} \tag{1.4}$$

$$e_{21}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}-\frac{\cos\chi}{r}\,v,\ \ e_{22}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\chi}{r}\,u+\frac{w}{R_2},\ \ e_{23}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial\vartheta}-\frac{v}{R_2}$$

где $R_{1,2}$—главные радиусы кривизны поверхности S_0; χ—угол между внешней нормалью к S_0 и отрицательным направлением оси z. Через (1.4) параметры в формулах (1.3) определяются так:

$$\varepsilon_{11}=e_{11},\quad \varepsilon^0_{11}=e_{11}e^0_{11}+e_{12}e^0_{12}+e_{13}e^0_{13}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\,(e_{12}+e_{21}),\quad \varepsilon^0_{12}=\frac{1}{2}\,(e_{11}e^0_{21}+e^0_{11}e_{21}+e_{12}e^0_{22}+e^0_{12}e_{22}+e_{13}e^0_{23}+e^0_{13}e_{23})$$

$$\varepsilon_{22}=e_{22},\quad \varepsilon^0_{22}=e_{22}e^0_{22}+e_{21}e^0_{21}+e_{23}e^0_{23}$$

$$\beta_{11}=\frac{\partial e_{13}}{\partial s}-\frac{e_{11}}{R_1},\quad \beta_{12}=\frac{\partial e_{23}}{\partial s}-\frac{e_{21}}{R_1},\quad \beta_{22}=\frac{1}{r}\,\frac{\partial e_{23}}{\partial\vartheta}+\frac{\cos\chi}{r}\,e_{13}-\frac{e_{22}}{R_2}$$

$$\beta^0_{11}=\frac{e_{23}e^0_{23}}{R_1}-\frac{e_{13}e^0_{13}}{R_1}-e_{13}\frac{\partial e^0_{11}}{\partial s}-e^0_{13}\frac{\partial e_{11}}{\partial s}-e_{23}\frac{\partial e^0_{12}}{\partial s}-e^0_{23}\frac{\partial e_{12}}{\partial s} \tag{1.5}$$

$$\beta_{12}^0 = [(e_{12}-e_{23})e_{13}^0 + (e_{12}^0 - e_{23}^0)e_{13}]\frac{1}{R_2} + [(e_{22}-e_{11})e_{23}^0 + (e_{22}^0 - e_{11}^0)e_{23} +$$

$$+ e_{13}e_{21}^0 + e_{13}^0 e_{21}]\frac{\cos\chi}{r} - \frac{1}{r}e_{13}\frac{\partial e_{11}^0}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{13}^0\frac{\partial e_{11}}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{23}\frac{\partial e_{12}^0}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{23}^0\frac{\partial e_{12}}{\partial\vartheta}$$

$$\beta_{22}^0 = (e_{13}e_{13}^0 - e_{23}e_{23}^0)\frac{1}{R_2} + [(e_{22}-e_{11})e_{13}^0 + (e_{22}^0 - e_{11}^0)e_{13} - (e_{12}+e_{21})e_{23}^0 -$$

$$-(e_{12}^0 + e_{21}^0)e_{23}]\frac{\cos\chi}{r} - \frac{1}{r}e_{13}\frac{\partial e_{21}^0}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{13}^0\frac{\partial e_{21}}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{23}\frac{\partial e_{22}^0}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}e_{23}^0\frac{\partial e_{22}}{\partial\vartheta}$$

Результаты двух подходов к вычислению компонентов тензоров деформаций совпадают.

Энергию деформации оболочки при известных допущениях можно выразить через деформации ее срединной поверхности (например, [3])

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint\limits_{S_0}[S^{\alpha\beta}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} + H^{\alpha\beta}(-\tilde{\beta}_{\alpha\beta})]\sqrt{a}\,d\alpha^1 d\alpha^2$$

где

$$S^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}[\nu a^{\alpha\beta}a^{ij}\tilde{\varepsilon}_{ij} + (1-\nu)\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta}]$$

$$H^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[\nu a^{\alpha\beta}a^{ij}(-\tilde{\beta}_{ij}) + (1-\nu)(-\tilde{\beta}^{\alpha\beta})]$$

a^{ij} —контравариантные компоненты первого метрического тензора поверхности S; ν—коэффициент Пуассона; E—модуль упругости материала оболочки; h—толщина оболочки. С учетом (1.5) энергию деформации оболочки с неправильностью можно представить в виде основного слагаемого и малого добавка:

$$\Pi = \Pi_0 + \mu\Delta\Pi \tag{1.6}$$

где

$$\Pi_0 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\iint\limits_{S_0}[\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2]r\,ds\,d\vartheta +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\iint\limits_{S_0}[\beta_{11}^2 + 2\nu\beta_{11}\beta_{22} + \beta_{22}^2 + 2(1-\nu)\beta_{12}^2]r\,ds\,d\vartheta$$

$$\Delta\Pi = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}\iint\limits_{S_0}[2\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}^0 + 2\varepsilon_{22}\varepsilon_{22}^0 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}^0 + 2\nu\varepsilon_{22}\varepsilon_{11}^0 +$$

$$+4(1+\nu)\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}^0 - 4\varepsilon_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})(e_{12}^0 + e_{21}^0) - 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2(e_{11}^0 + e_{22}^0) -$$

$$-2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}(e_{11}^0 + e_{22}^0) + \varepsilon_{11}^2(e_{22}^0 - 3e_{11}^0) + \varepsilon_{22}^2(e_{11}^0 - 3e_{22}^0)]r\,ds\,d\vartheta +$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\iint\limits_{S_0}[2\beta_{11}\beta_{11}^0 + 2\beta_{22}\beta_{22}^0 + 2\nu\beta_{11}\beta_{22}^0 + 2\nu\beta_{22}\beta_{11}^0 +$$

$$+4(1+\nu)\beta_{12}\beta_{12}^0-4\beta_{12}(\beta_{11}+\beta_{22})(e_{12}^0+e_{21}^0)-2(1-\nu)\beta_{12}^2(e_{11}^0+e_{22}^0)-$$

$$-2\nu\beta_{11}\beta_{22}(e_{11}^0+e_{22}^0)+\beta_{11}^2(e_{22}^0-3e_{11}^0)+\beta_{22}^2(e_{11}^0-3e_{22}^0)]rdsd\vartheta$$

В рамках аналогичной схемы записывается и энергия деформаций первоначально кольцевого шпангоута, претерпевающего вместе с оболочкой S_0 фиктивную деформацию. Примем допущение о том, что ось шпангоута совпадает с линией его контакта с оболочкой. Упругие деформации оси шпангоута $\tilde{\varepsilon}$, изменение его кривизн в направлении меридиана и нормали $\tilde{\varkappa}_s$, $\tilde{\varkappa}_n$ и кручение $\tilde{\varkappa}_{ns}$ можно представить в подобной (1.3) форме с выделением слагаемых, в которые μ входит в первой степени

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon+\mu\varepsilon^0,\quad \tilde{\varkappa}_s=\varkappa_s+\mu\varkappa_s^0,\quad \tilde{\varkappa}_n=\varkappa_n+\mu\varkappa_n^0,\quad \tilde{\varkappa}_{ns}=\varkappa_{ns}+\mu\varkappa_{ns}^0$$

где

$$\varepsilon=e_{22}\quad \varkappa_s=-\frac{1}{r}\left(e_{13}\cos\chi+\frac{\partial e_{23}}{\partial\vartheta}\right),\quad \varkappa_n=\frac{1}{r}\left(e_{13}\sin\chi-\frac{\partial e_{21}}{\partial\vartheta}\right)$$

$$\varkappa_{ns}=\frac{1}{r}\left(e_{21}\sin\chi-e_{23}\cos\chi+\frac{\partial e_{13}}{\partial\vartheta}\right),\quad \varepsilon^0=-e_{22}e_{22}^0+e_{21}e_{21}^0+e_{23}e_{23}^0$$

$$\varkappa_s^0=\frac{1}{r}\Bigg[e_{13}\frac{\partial e_{21}^0}{\partial\vartheta}+e_{13}^0\frac{\partial e_{21}}{\partial\vartheta}+e_{23}\frac{\partial e_{22}^0}{\partial\vartheta}+e_{23}^0\frac{\partial e_{22}}{\partial\vartheta}+e_{22}\frac{\partial e_{23}^0}{\partial\vartheta}+2e_{22}^0\frac{\partial e_{23}}{\partial\vartheta}+$$

$$+e_{13}(e_{11}^0+e_{22}^0)\cos\chi+e_{13}^0e_{11}\cos\chi+e_{23}(e_{12}^0+e_{21}^0)\cos\chi-e_{13}e_{13}^0\sin\chi-e_{21}e_{21}^0\sin\chi\Bigg]$$

$$\varkappa_n^0=\frac{1}{r}\Bigg[-e_{13}\frac{\partial e_{23}^0}{\partial\vartheta}-e_{13}^0\frac{\partial e_{23}}{\partial\vartheta}+e_{21}\frac{\partial e_{22}^0}{\partial\vartheta}+e_{21}^0\frac{\partial e_{22}}{\partial\vartheta}+e_{22}\frac{\partial e_{21}^0}{\partial\vartheta}+2e_{22}^0\frac{\partial e_{21}}{\partial\vartheta}-$$

$$-e_{13}(e_{11}^0+e_{22}^0)\sin\chi-e_{13}^0e_{11}\sin\chi-e_{23}e_{12}^0\sin\chi-e_{23}^0e_{12}\sin\chi-e_{13}e_{13}^0\cos\chi-e_{23}e_{23}^0\cos\chi\Bigg]$$

$$\varkappa_{ns}^0=\frac{1}{r}\Bigg[-\frac{\partial e_{13}}{\partial\vartheta}e_{21}^0-\frac{\partial e_{23}^0}{\partial\vartheta}e_{21}-\frac{\partial e_{11}}{\partial\vartheta}(e_{11}^0+e_{22}^0)-\frac{\partial e_{13}^0}{\partial\vartheta}e_{11}-\frac{\partial e_{11}}{\partial\vartheta}e_{13}^0-\frac{\partial e_{11}^0}{\partial\vartheta}e_{13}-$$

$$-\frac{\partial e_{23}}{\partial\vartheta}e_{12}^0-\frac{\partial e_{23}^0}{\partial\vartheta}e_{12}-\frac{\partial e_{12}^0}{\partial\vartheta}e_{23}+e_{22}e_{23}^0\cos\chi-e_{22}e_{21}^0\sin\chi+2e_{22}^0(e_{23}\cos\chi-e_{21}\sin\chi)\Bigg]$$

Энергия деформаций шпангоута приводится к виду, аналогичному (1.6).

В форме (1.6) можно записать и энергию деформаций упругой опоры, распределенной по длине шпангоута.

2. Обозначим свободную поверхность жидкости в баке S_0 через F_0. Считаем, что бак S заполнен такой же жидкостью и ее свободная поверхность F лежит в одной плоскости с поверхностью F_0. Пусть движения жидкости описываются потенциалом перемещений φ. Граничное условие, выражающее требование совместности нормальных перемещений оболочки S и жидкости, перенесем на смоченную

поверхность оболочки S_0. Для этого используем разложение потенциала перемещений в ряд Тейлора в окрестности поверхности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{\partial\varphi}{\partial s}W_s-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{1}{r}W_\vartheta+\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial s}U+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial n\partial\vartheta}V+\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\quad W=w-e_{13}^0u-e_{13}^0v \tag{2.1}$$

Кинетическую энергию движений жидкости вычислим в предположении о постоянстве градиента потенциала по нормали к слою — разности объемов жидкости в баках S и S_0

$$T=T_0+\mu\Delta T,\quad T_0=\frac{\rho}{2}\iint\limits_{S_0'}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}rdsd\vartheta,\quad \Delta T=\frac{\rho}{2}\iint\limits_{S_0'}(\mathrm{grad}\varphi)^2\,Wrdsd\vartheta$$

Здесь S_0' — смоченная поверхность оболочки.

Задача о собственных колебаниях формулируется как задача на экстремум функционала

$$\Pi_0+\mu\Delta\Pi-\omega^2(T_0+\mu\Delta T)$$

Кинематически возможные состояния оболочки с жидкостью S определяются потенциалом перемещений жидкости и перемещениями оболочки. Потенциал перемещений задается в основном объеме, тангенциальные перемещения оболочки — на основной поверхности. Нормальные перемещения смоченной части оболочки определяются из перенесенного на основную поверхность условия совместности нормальных перемещений оболочки и жидкости. Нормальные перемещения несмоченной части бака задаются независимо.

Решение задачи можно разыскивать в виде рядов по формам собственных колебаний основной оболочки с жидкостью. При этом определяются поправки к основным частотам и формам.

Здесь ограничимся примерами, в которых оболочка S остается осесимметричной.

Применение описанной методики к тестовым, имеющим точное решение, задачам [4] о колебаниях полностью заполненных безмоментных цилиндра с жестким днищем и свободной сферы для случаев фиктивной деформации, переводящей цилиндр в цилиндр и сферу в сферу изменением радиуса, дает те же поправки к частотам, что и линеаризованные в окрестности основных оболочек точные решения задачи. При использовании форм колебаний залитой жидкостью цилиндрической оболочки с жестким плоским днищем получены частотные параметры для следующих видов начальной неправильности при заполнении $H/R=4$, $\nu=0{,}32$.

Коническая неправильность

$$W=\frac{s}{H},$$

Неправильность типа бочки

$$W=1-\left(2\frac{s}{H}-1\right)^2$$

Λ_1	$0{,}0679+0{,}0175\,\mu$,	$0{,}0679-0{,}0470\,\mu$
Λ_2	$0{,}5350-0{,}2832\,\mu$,	$0{,}5350-0{,}4521\,\mu$
Λ_3	$1{,}2191-0{,}8680\,\mu$,	$1{,}2191-1{,}2347\,\mu$
Λ_4	$1{,}9482-1{,}5863\,\mu$,	$1{,}9482-2{,}1932\,\mu$
Λ_5	$2{,}6739-2{,}3291\,\mu$,	$2{,}6739-3{,}1831\,\mu$

Здесь H—высота оболочки, отсчет дуги s производится от днища, $\Lambda_i=\frac{\rho R^3(1-\nu^2)}{Eh}\omega_i^2$, ρ—плотность жидкости, R—радиус цилиндра.

VIBRATIONS OF LIQUID FILLED SHELLS CLOSE TO AXISYMMETRIC ONES

R. E. LAMPER, V. E. LEVIN

ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՑՎԱԾ, ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿԻՆ ՄՈՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ռ. Ե. ԼԱՄՊԵՐ, Վ. Ե. ԼԵՎԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է մասամբ հեղուկով լցված թաղանթ, որը քիչ է տարբերվում «հիմնական» առանցքասիմետրիկից:

Սեփական տատանումների մասին խնդիրը ձևակերպվում է հիմնական թաղանթի պլատիցրած տիրույթի համար: Թաղանթի դեֆորմացիայի տենզորի բաղադրիչները հաշվվում են հիմնական մակերևույթի մետրիկայում: Լուծման մեջ մտցված են ուղղումներ հիմնական հաճախությունների և տատանման ձևերի համար:

Բերված են հաշվարկային մեթոդի կիրառության օրինակներ կոնական և տակառաձև անմոմենտ թաղանթների վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паймушин В. Н.* Соотношения теории тонких оболочек типа Тимошенко в криволинейных координатах поверхности отсчета.—ПММ, 1978, т. *42*, №4, с. 753—758.
2. *Паймушин В. Н.* К проблеме расчета пластин и оболочек со сложным контуром.—Прикладная механика, 1980, т. *16*, №4, с. 63—70.
3. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Л.: ЛГУ, 1964, 395 с.
4. *Пшеничнов Г. И.* Точные решения некоторых задач о колебаниях жидкости и упругих безмоментных оболочках.—ПММ, 1971, т. *35*, №4, с. 739—744.

Новосибирский электротехнический институт

Поступила в редакцию 17.III.1986