ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 5, 1987 Механика

УДК 539.3:537.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ СЕКТОРА ИЗ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА

ГАЛПЧЯН П. В.

Разработке общей математической теории, описывающей сопряженные электроупругие процессы в пьезоэлектрической среде при общих условиях механического и электрического нагружения, а также решению задач статики и динамики электроупругого тела посвящен ряд работ, обзор которых приведен в [1].

В работе [2] исследовано равновесие пьезокерамического тела, содержащего внутреннюю трещину. Авторами выведены электрические граничные условия на берегах трещины. Анализируется сопряженное поле вблизи круговой трещины в пьезокерамическом цилиндре кругового поперечного сечения, плоскости которой перпендикулярны поляризации. Показано, что напряжения нормального отрыва обладают корневой особенностью. Такой же характер особенности имеют осевые составляющие напряженности и индукции электрического поля вблизи границы трещины.

В настоящей работе исследуется электроупругое антиплоское напряженно-деформированное состояние призматического тела с поперечным сечением в виде сектора из пьезокристалла класса 6 *mm* гексагональной системы. На контуре сектора даются некоторые определенные механические и электрические граничные условия. Главная ось симметрии пьезокристалла проходит через вершину сектора параллельно к образующим призмы.

1. Задача рассматривается в цилиндрической системе координат r, φ, z. Ось z совпадает с главной осью кристалла ($0 \leqslant r \leqslant r_1$, $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, $-\infty < z < \infty$, $0 < \alpha \leqslant \pi$).

В этом случае система уравнений, описывающая электроупругое равновесие, при отсутствии массовых сил в случае антиплоской задачи имеет вид [3, 4]

$$\Delta u_z = 0; \quad \Delta\Phi = 0 \tag{1.1}$$

Здесь Δ—оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

u_z—упругое перемещение; Φ—электростатический потенциал.

Уравнениями состояния будут:

$$\tau_{zr}=c_{44}\gamma_{zr}-e_{15}E_r, \quad \tau_{\varphi z}=c_{44}\gamma_{\varphi z}-e_{15}E_\varphi$$

$$D_r=4\pi e_{15}\gamma_{zr}+\varepsilon_1 E_r, \quad D_\varphi=4\pi e_{15}\gamma_{\varphi z}+\varepsilon_1 E_\varphi \tag{1.2}$$

где

$$\gamma_{zr}=\frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{\varphi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \quad E_r=-\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

В этих соотношениях τ_{zr}, $\tau_{\varphi z}$—компоненты тензора механических напряжений; γ_{zr}, $\gamma_{\varphi z}$—компоненты деформаций; E_r, E_φ—компоненты вектора напряженности электрического поля; D_r, D_φ—компоненты вектора электрической индукции; c_{44}, e_{15}, ε_1—соответственно, модуль упругости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость.

Граничные условия для электромеханического поля формулируем следующим образом:

$$\tau_{\varphi z}(r, \pm\alpha)=0, \quad \Phi(r, \pm\alpha)=V^{\pm}r \tag{1.3}$$

а при $r=r_1$—двояко

$$u_z(r_1, \varphi)=0, \quad \Phi(r_1, \varphi)=0 \tag{1.4}$$

$$\tau_{rz}(r_1, \varphi)=0, \quad D_r(r_1, \varphi)=0 \tag{1.5}$$

Вводя функцию $\Psi=c_{44}u_z+e_{15}\Phi$, поставленные краевые задачи можно разделить на две независимые относительно Ψ и Φ.

Отсюда следует, что при граничных условиях (1.4)

$$\Psi\equiv 0, \quad u_z=-\frac{e_{15}}{c_{44}}\Phi, \quad \tau_{zr}\equiv 0, \quad \tau_{\varphi z}\equiv 0$$

а при (1.5)

$$\Psi\equiv\mathrm{const}, \quad u_z=-\frac{e_{15}}{c_{44}}\Phi+\mathrm{const}, \quad \tau_{zr}\equiv 0, \quad \tau_{\varphi z}\equiv 0.$$

Таким образом, рассматриваемые задачи (1.1)—(1.5) сводятся к задачам электростатики для потенциала Φ:

$$\Delta\Phi=0, \quad \Phi(r, \pm\alpha)=V^{\pm}r \tag{1.6}$$

$$\Phi(r_1, \varphi)=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\Phi(r_1, \varphi)}{\partial r}=0 \tag{1.8}$$

где берется только одно из граничных условий (1.7), (1.8).

2. Легко проверить, что элементарное решение вида

$$\Phi^{(e)}=r\left(v_1\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}+v_2\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) \tag{2.1}$$

где

$$v_1=\frac{V^+-V^-}{2}, \quad v_2=\frac{V^++V^-}{2}$$

удовлетворяет уравнению и граничному условию (1.6).

При $\alpha=\pi/2$, π эти функции не определены и такое поведение решения в [5] называется парадоксом, который устраняется при помощи однородных решений.

Следуя работам [5], [6], будем искать решения задач (1.6)—(1.8) в виде суммы элементарного решения (2.1) и решения следующей однородной задачи:

$$\Delta\Phi^{(0)}=0; \quad \Phi^{(0)}(r, \pm\alpha)=0 \tag{2.2}$$

которое можно построить по методу разделения переменных.

Решение (2.2) представляется в виде

$$\Phi^{(0)}(r, \varphi)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k r^{k\beta}\sin(\alpha+\varphi)k\beta \tag{2.3}$$

где B_k—постоянные, подлежащие определению; $\beta=\pi/(2\alpha)$.

Таким образом, будем иметь следующее решение задачи (1.6):

$$\Phi=\Phi^{(\circ)}+\Phi^{(0)} \tag{2.4}$$

3. Аналогично, как и в [5], совершив в (2.4) предельный переход $\alpha\to\pi/2$, π, получаем, соответственно

$$\Phi(r, \varphi)=\frac{2v_2}{\pi}r(\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\ln r)+v_1 r\sin\varphi+\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)k \tag{3.1}$$

$$A_1=\widetilde{B}_1, \quad A_k=B_k, \quad B_1=\widetilde{B}_1-v_2/\cos\alpha$$

$$\Phi(r, \varphi)=-\frac{v_1}{\pi}r(\varphi\cos\varphi+\sin\varphi\ln r)-v_2 r\cos\varphi+\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{k/2}\sin(\pi+\varphi)\frac{k}{2} \tag{3.2}$$

$$A_1=B_1, \quad A_2=\widetilde{B}_2, \quad A_k=B_k, \quad B_2=\widetilde{B}_2+v_1/\sin\alpha$$

Удовлетворив граничному условию (1.7), определяем коэффициенты разложений A_k соответственно в (3.1) и (3.2)

$$\begin{gathered}A_1=\frac{v_2}{\pi}(2\ln r_1-1), \quad A_k=\frac{2k}{\pi(k^2-1)r_1^{k-1}}\{v_2[(-1)^k-1]+v_1[(-1)^k+1]\}\\ (k=2,\ 3,\ \ldots) \quad \text{при} \quad \alpha=\pi/2\\ A_2=\frac{v_1}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\ln r_1\right), \quad A_k=\frac{2kr_1^{1-k/2}}{\pi(k^2-4)}\{v_1[(-1)^k+1]+v_2[(-1)^k-1]\}\\ (k=1,\ 3,\ 4,\ \ldots) \quad \text{при} \quad \alpha=\pi.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Коэффициенты разложений в (3.1) и (3.2) в случае граничных условий (1.8) определяются по формулам:

$$\begin{gathered}A_1=\frac{v_2}{\pi}(1+2\ln r_1), \quad A_k=\frac{2}{\pi(1-k^2)r_1^{k-1}}\{v_2[(-1)^{k-1}+1]+v_1[(-1)^{k-1}-1]\}\\ (n=2,\ 3,\ \ldots) \quad \text{при} \quad \alpha=\pi/2\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$A_2 = -\frac{v_1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \ln r_1\right), \quad A_k = \frac{4}{\pi(k^2-4)r_1^{k/2-1}}\{v_1[(-1)^k+1]+v_2[(-1)^k-1]\}$$

$$(n=1,\ 3,\ 4,\ \ldots) \qquad \text{при} \quad \alpha = \pi.$$

В случае произвольного угла $\alpha(\alpha \neq \pi/2, \pi)$ коэффициентами разложений B_k в (2.4), соответствующими условию (1.7), будут

$$B_k = \frac{2k\pi r_1^{1-k\beta}}{(k\pi)^2-(2\alpha)^2}\{v_1[(-1)^k+1]+v_2[(-1)^k-1]\} \tag{3.5}$$

4. В случае поперечного сечения в виде полукруга $(\alpha=\pi/2)$ составляющие напряженности и индукции электрического поля, как следует из (3.1), обладают логарифмической особенностью, когда $v_2 \neq 0$. В случае же кругового поперечного сечения с трещиной $(\alpha=\pi)$ составляющие напряженности и индукции вблизи полюса, кроме логарифмической особенности $(v_1 \neq 0)$, обладают корневой особенностью, что следует из (3.2).

При произвольном угле α $(\alpha \neq \pi/2,\ \pi)$ из (2.4) следует, что E_r, E_φ, D_r, D_φ имеют особенность вида $r^{\beta-1}$.

Интересно отметить, что в рассматриваемых задачах для полукругового поперечного сечения и кругового поперечного сечения с трещиной коэффициенты при логарифмической особенности определяются независимо от удовлетворения граничным условиям при $r=r_1$.

В частности, коэффициент особенности составляющей индукции электрического поля D_φ в задаче призмы полукругового поперечного сечения равен

$$-\frac{2v_2}{\pi}\gamma\sin\varphi, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{4\pi e_{15}^2}{c_{44}} + \varepsilon_1$$

откуда следует, что при $v_2=0$ особенность исчезает, что соответствует случаю $V^+=-V^-$. В случае призмы кругового поперечного сечения с трещиной в выражении D_φ коэффициент при логарифмической особенности имеет вид $\frac{v_1}{\pi}\gamma\cos\varphi$, а при корневой особенности —

$\frac{2v_2}{3\pi}\gamma\sin\frac{\varphi}{2}$ при условиях (1.4), $\frac{4v_2}{3\pi}\gamma\sin\frac{\varphi}{2}$ при условиях (1.5).

Отсюда следует, что при $v_1 \neq 0$ и $v_2=0$, что соответствует случаю $V^+=-V^-$, имеется только логарифмическая особенность, а в случае $v_1=0$ и $v_2 \neq 0$ $(V^+=V^-)$ имеется только корневая особенность.

Подставив найденные коэффициенты (3.3)—(3.5) в (3.1), (3.2) и (2.4), окончательно получим решения рассматриваемых выше задач. Отсюда, в частности, согласно (3.1) и (1.4) можно найти составляющую напряженности электрического поля E_φ на краю сечения в виде полукруга $(\varphi=\pi/2)$. Просуммировав в этом выражении получающиеся ряды в случае, когда $V^+=0$, получим $(\xi=r/r_1)$

$$E_\varphi\left(r,\ \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V^-}{2\pi}(3+2\ln\xi) + \frac{2V^-}{\pi}\left[\frac{3\xi^2+\xi+2}{4\xi(1+\xi)} + \frac{(1+\xi^2)\ln(1+\xi)}{2\xi^2}\right]$$

Выражение в квадратной скобке стремится к нулю при $\xi \to 0$. Следовательно, $E_z(r, \pi/2)$ имеет логарифмическую особенность, что было отмечено выше, с коэффициентом особенности $-V^{-}/\pi$.

Автор выражает благодарность Фильштинскому Л. А. за ценные советы.

THE DEFINITION OF SINGULARITY NEAR OF SECTOR EDGE OF PIEZOCRISTAL

P. V. GALPCHIAN

ՊԻԵԶԱԲՅՈՒՐԵՂՅԱ ՍԵԿՏՈՐԻ ԳԱԳԱԹԻ ՄՈՏԱԿԱՅՔՈՒՄ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Պ. Վ. ԳԱԼՓՉՅԱՆ

Ամփոփում

Էլեկտրաառաձգականության գծային տեսության շրջանակներում դիտվում է սեկտորաձև ընդլայնական հատույթով պիեզաբյուրեղյա պրիզմայի հակահարթ խնդիրը։ Ուսումնասիրվել է սեկտորի գագաթի մոտակայքում էլեկտրաառաձգական դաշտի եզակիության բնույթը՝ հատույթի եզրագծի վրա տրված մեխանիկական և էլեկտրական եզրային պայմանների դեպքում։

Ստացված են եզակիության գործակիցների արտահայտությունները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов.—Итоги науки и техники. Серия «Механика твердого деформируемого тела». т. 2. М.: 1978. 251 с.
2. *Половинкина И. Б., Улитко А. Ф.* К теории равновесия пьезокерамических тел с трещинами.—Тепловые напряжения в элементах конструкций.—Киев: Наукова думка, 1978, вып. 18, с. 10—17.
3. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
4. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел.—Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наукова думка, 1975, вып. 15, с. 90—99.
5. *Ting T. C. T.* Elastic wedge subjected to antiplane shear tractions—a paradox explained.—The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, 1985, vol. 38, part 2, p. 245—255.
6. *Саркисян В. С., Белубекян В. М.* Об одной антиплоской задаче для клина.—Ученые записки ЕрГУ, Ереван: 1986, №3.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
8.X.1986