

УДК 532.5

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ  
 АНТИПЛОСКОГО СДВИГА И ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ  
 ЖИДКОСТИ В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ С ПРОДОЛЬНОМ  
 РАЗРЕЗОМ

НАЗАРОВ С. А.

1°. *Постановка задачи.* Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  — простые замкнутые гладкие контуры, причем  $\Gamma_1$  охватывает  $\Gamma_2$ , а  $\Gamma_2 - \Gamma_3$  (не исключается случай, когда контур  $\Gamma_3$  пуст). Обозначим через  $\Omega$  и  $\omega$  области, ограниченные контурами  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_2, \Gamma_3$ , соответственно. Введем цилиндр  $Q_h = \{(x, z) : x = (x_1, x_2) \in \Omega, |z| < h/2\}$  и множество  $M = \{(x, z) : x \in \omega, z = 0\}$ . Предположим, что характерные размеры  $d_j$  контуров  $\Gamma_j$ , а также расстояния между ними являются величинами одного порядка, а отношения  $h/d_j$  — малыми параметрами. Не ограничивая общности, далее будем считать, что масштабированием размер  $d_1$  сведен к единичному, а  $h$  является малым положительным безразмерным параметром.

В области  $G_h = Q_h \setminus M$  (фиг. 1) рассмотрим задачу Неймана

$$-\Delta_{x,z} u(h, x, z) = h^{-1} f(x, h^{-1} z), \quad (x, z) \in G_h \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \left( h, x, \pm \frac{h}{2} \right) = \varphi^\pm(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial z} (h, x, \pm 0) = \psi^\pm(x), \quad x \in \omega \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} (h, x, z) = \frac{1}{h} g \left( x, \frac{z}{h} \right), \quad (x, z) \in S_h^1 \cup S_h^3 \quad (1.3)$$

где  $\Delta_{x,z} = \Delta + \partial^2 / \partial z^2$ ,  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ;  $S_h^1 = \Gamma_1 \times (-h/2, h/2)$ ,  $S_h^3 = \Gamma_3 \times \{(-h/2, 0) \cup (0, h/2)\}$ ;  $f, \varphi^\pm, \psi^\pm, g$  — гладкие функции на своих областях определения. Допустим, что выполнено условие

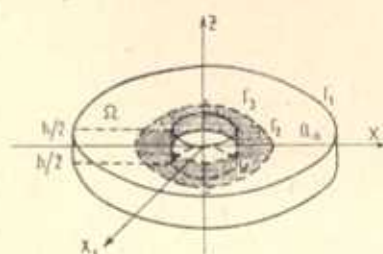
$$\frac{1}{h} \int_{Q_h} f \left( x, \frac{z}{h} \right) dx dz + \frac{1}{h} \int_{S_h^1 \cup S_h^3} g \left( x, \frac{z}{h} \right) ds_x dz + \sum_{\pm} \left\{ \int_{\Omega} \varphi^\pm(x) dx - \int_{\omega} \psi^\pm(x) dx \right\} = 0 \quad (1.4)$$

Краевую задачу (1.1) — (1.3) следует интерпретировать как эллиптическую краевую задачу в тонкой области. Построению асимптотических разложений решений подобных задач в цилиндрических областях малой высоты посвящено значительное количество работ ([1–6] и др.). Рассматриваемая ситуация осложнена наличием у

разреза  $M$  особой линии—ребра (или в двумерном случае—угловых точек), где производные решения исходной задачи имеют особенности. Асимптотика решений некоторых задач с такими особенностями строилась в [7—10].

Согласно § 5 [II] полное асимптотическое разложение решения  $u(h, x, z)$  задачи (1.1)–(1.3) при  $\pm z > 0$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 u(h, x, z) \sim & \sum_{k=0}^{\infty} h^{k-1} \left\{ \chi_{\Omega \setminus \omega}(h, x) v_k(x) + \right. \\
 & + \chi_{\omega}(h, x) v_k^{\pm}(x) + h^2 \chi_{\Omega}(h, x) w\left(x, \frac{z}{h}\right) + \\
 & + \chi(n_1) V_k\left(s_1, \frac{n_1}{h}, \frac{z}{h}\right) + \chi(n_2) V_k^{\pm}\left(s_2, \frac{n_2}{h}, \frac{z}{h}\right) + \\
 & \left. + \chi(n_2) W_k\left(s_2, \frac{n_2}{h}, \frac{z}{h}\right) \right\} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

Здесь  $\chi$ —срезающая функция с малым носителем, равная единице вблизи  $n=0$ ;  $s_j$  и  $n_j$ —касательная и нормальная координаты в окрестностях контуров  $\Gamma_j$ ;  $\chi_{\pm}(h, x) = 1 - \chi(h^{-1}n_{\pm})$  в  $\Xi$  и  $\chi_{\pm}(h, x) = 0$  вне  $\Xi$ ;  $V_k$ ,  $W_k$  и  $V_k^{\pm}$ —функции, описывающие пограничные слои для боковой поверхности цилиндра  $Q$  и края  $\partial M$  разреза  $M$ ;  $V_k(s, t, \tau)$ ,  $V_k^{\pm}(s, t, \tau)$ ,  $W_k(s, t, \tau)$  экспоненциально убывают при  $t \rightarrow \infty$ ;  $v_k \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus \omega)$ ,  $v_k^{\pm} \in C^{\infty}(\bar{\omega})$ ;  $w(x, \eta)$ —функции с нулевым средним по  $\eta$  на отрезке  $[-1/2, 1/2]$ .

В настоящей статье основное внимание уделяется приближенному вычислению коэффициента  $C(h, s_2)$  в представлении  $u(h, x, z)$  вблизи ребра  $\partial M$

$$u(h, x, z) = C_0(h, s_2) + C(h, s_2) \sqrt{r} \cos(\theta/2) + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

где  $(r, \theta)$ —полярные координаты в плоскостях, нормальных к  $\partial M$ , такие, что верхнему  $M^+$  и нижнему  $M^-$  берегам разреза  $M$  соответствуют значения  $0$  и  $2\pi$  переменной  $\theta$ .

2°. Двумерный случай. Пусть  $Q_h$ —прямоугольник  $(b_-, b_+) \times (-h/2, h/2)$ , а  $M$ —отрезок  $\{(x, z) : a_- < x < a_+, z=0\}$ ;  $b_- < a_- < a_+ < b_+$  (фиг. 2). Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет вид

$$-(\partial_x^2 + \partial_z^2)u(h, x, z) = h^{-1}f(x, h^{-1}z), \quad x \in G_h = Q_h \setminus M \quad (2.1)$$

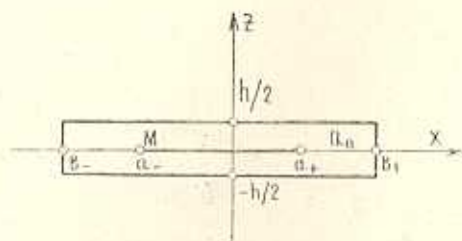
$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(h, x, \pm \frac{h}{2}\right) = \varphi^{\pm}(x), \quad x \in (b_-, b_+); \quad \frac{\partial u}{\partial z}(h, x, \pm 0) = \psi^{\pm}(x), \quad x \in (a_-, a_+) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(h, b_{\pm}, z) = \frac{1}{h} g^{\pm}\left(\frac{z}{h}\right), \quad |z| < \frac{h}{2} \quad (2.3)$$

Если главный член асимптотики решения  $u$  задачи (2.1)–(2.3) искать в виде  $hw(x, h^{-1}z)$ , то, выделяя в (2.1), (2.2) старшие (поряд-

ка  $h^{-1}$  и  $h^0$ ) слагаемые, получаем, например, при  $x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+)$  обыкновенное дифференциальное (по  $\eta = h^{-1}z$ ) уравнение

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) = f(x, \eta), \quad \eta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi^\pm(x) \quad (2.4)$$



Фиг. 2

Задача (2.4) разрешима не при всех правых частях  $f, \varphi^\pm$ . Условием ее разрешимости является равенство

$$-\int_{-1/2}^{1/2} f(x, \eta) d\eta = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) \quad (2.5)$$

Таким образом, не для каждой  $f$  и  $\varphi^\pm$  правые части уравнений (2.1), (2.2) удастся компенсировать при помощи функции  $hw(x, h^{-1}z)$ . Как обычно [1, 3, 6, 11], изменив вид приближения к  $u$ , представим его как сумму  $h^{-1}v(x) + hw(x, h^{-1}z)$ . Собирая в (2.1) коэффициенты при  $h^{-1}$ , а в (2.2) — при  $h^{-1}$ , получаем для  $x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+)$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) = f(x, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad \eta \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) = \varphi^\pm(x) \quad (2.6)$$

Условием разрешимости задачи (2.6) служит равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x) = -\int_{-1/2}^{1/2} f(x, \eta) d\eta - \varphi^+(x) + \varphi^-(x), \quad x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+) \quad (2.7)$$

(сравни (2.5)), которое будем считать уравнением для функции  $v$ . Аналогично, для функций  $w, v^\pm$ , входящих в приближения  $h^{-1}v^\pm(x) + hw(x, h^{-1}z)$  к решению  $u$  при  $x \in (a_-, a_+)$ ,  $\pm z > 0$ , находим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(x, \eta) &= f(x, \eta) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x), \quad \eta \in A_\pm \\ \frac{\partial w}{\partial \eta}\left(x, \pm \frac{1}{2}\right) &= \varphi^\pm(x), \quad \frac{\partial w}{\partial \eta}(x, \pm 0) = \psi^\pm(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 v^\pm}{\partial x^2}(x) = -2 \int_{A_\pm} f(x, \eta) d\eta \mp 2\{\varphi^\pm(x) - \psi^\pm(x)\}, \quad x \in (a_-, a_+) \quad (2.9)$$

где  $A_+ = (0, 1/2)$ ,  $A_- = (-1/2, 0)$ .

Определим теперь граничные условия, которым следует подчинить старшие члены  $h^{-1}v, h^{-1}v^\pm$  асимптотики  $u$ . Вблизи каждой из боковых сторон прямоугольника  $Q_h$  возникает пограничный слой ([3, 6, 11]), который описывается решением задачи в полуполосе

$$-\Delta_{\xi, \eta} V_\pm(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in (0, \infty) \times (-1/2, 1/2) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial V_0^\pm}{\partial \eta} \left( \xi, \frac{1}{2} \right) = \frac{\partial V_0^\pm}{\partial \eta} \left( \xi, -\frac{1}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial V_0^\pm}{\partial \xi} (0, \eta) = \pm \left( \frac{\partial v}{\partial x}(b_\pm) - g^\pm(\eta) \right)$$

$$|\eta| < \frac{1}{2} \quad (2.10)$$

Здесь для индекса „+“  $\xi = h^{-1}(b_+ - x)$ , а для „-“  $\xi = h^{-1}(x - b_-)$ . При помощи метода Фурье получаем, что экспоненциальное убывание (при  $\xi \rightarrow \infty$ ) решений задач (2.10) обеспечивается равенствами

$$\frac{\partial v}{\partial x}(b_\pm) = \int_{-1/2}^{1/2} g^\pm(\eta) d\eta \quad (2.11)$$

Вблизи концов разреза  $M$  также возникает явление пограничного слоя, которое порождает (см. раздел 3<sup>о</sup>) шесть условий сопряжения функций  $v$ ,  $v^\pm$  в точках  $a_\pm$ :

$$v(a_+) = v^+(a_+) = v^-(a_+), \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x}(a_+) = \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_+) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_+) \quad (2.12)$$

$$v(a_-) = v^+(a_-) = v^-(a_-), \quad 2 \frac{\partial v}{\partial x}(a_-) = \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_-) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_-) \quad (2.13)$$

Отметим, что уравнения (2.7), (2.9) с соотношениями (2.11)–(2.13) имеют решение в силу условия разрешимости задачи (2.1)–(2.3)

$$\int_{Q_1} f(x, \eta) d\eta dx + \sum_{\pm} \left\{ \int_{b_-}^{b_+} \psi^\pm(x) dx - \int_{a_-}^{a_+} \psi^\pm(x) dx + \int_{-1/2}^{1/2} g^\pm(\eta) d\eta \right\} = 0 \quad (2.14)$$

3<sup>о</sup>. *Пограничный слой вблизи концов разреза.* Рассмотрим для определенности левый конец  $(a_-, 0)$  разреза  $M$ . После замены координат  $(x, z) \rightarrow \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) = h^{-1}(x - a_-, z)$  уравнения (2.1), (2.2) переходят в задачу Неймана в полосе с полубесконечным разрезом  $\Pi = \mathbb{R}^2 \times (-1/2, 1/2) \setminus \{ \zeta : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 = 0 \}$  (фиг. 3).

**Утверждение 1.** Для любых экспоненциально убывающих при  $\zeta_1 \rightarrow \pm\infty$  гладких правых частей  $F$ ,  $\Phi^\pm$ ,  $\Psi^\pm$  существует единственное убывающее при  $\zeta_1 \rightarrow -\infty$  решение  $W$  краевой задачи

$$-\Delta_\zeta W(\zeta) = F(\zeta), \quad \zeta \in \Pi \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta_2} \left( \zeta_1, \pm \frac{1}{2} \right) = \Phi^\pm(\zeta_1), \quad \zeta_1 \in \mathbb{R}^1; \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta_2}(\zeta_1, \pm 0) = \Psi^\pm(\zeta_1), \quad \zeta_1 > 0$$

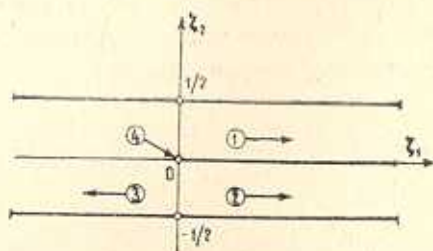
**Утверждение 2.** Всякое решение однородной ( $F$ ,  $\Phi^\pm$ ,  $\Psi^\pm$  равны нулю) задачи (3.1), растущее не быстрее полинома, является линейной комбинацией  $c_1 + c_2 \zeta_1 + c_3 Y(\zeta)$ ,  $c_j = \text{const}$ ,  $Y$  — нечетная по  $\zeta_2$  гармоническая в  $\Pi$  функция, имеющая нулевые данные Неймана на  $\partial\Pi$  и допускающая представление

$$Y(\zeta) = O(\exp(\pi \zeta_1 / 2)) \quad \text{при} \quad \zeta_1 \rightarrow -\infty \quad (3.2)$$

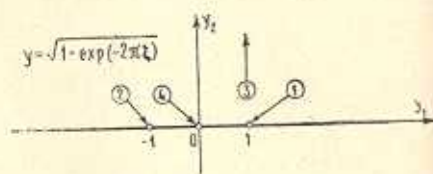
$$Y(\zeta) = \pm \zeta_1 \pm C_V + O(\exp(-\pi^2 \zeta_1/4)) \text{ при } \zeta_1 \rightarrow +\infty, \pm \zeta_2 > 0$$

Утверждение 3. Для решения  $W$  задачи (3.1) справедливы асимптотические разложения:  $W(\zeta) = o(\exp(\delta^2 \zeta_1))$  при  $\zeta_1 \rightarrow -\infty$  и

$$W(\zeta) = B_0 \zeta_1 + B_{\pm} + o(\exp(-\delta^2 \zeta_1)) \text{ при } \zeta_1 \rightarrow +\infty, \pm \zeta_2 > 0 \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь  $\delta > 0$ , а постоянные  $B_0, B_{\pm}$  вычисляются по формулам

$$B_0 = -\Lambda(F, \Phi, \Psi; X_0), \quad B_{\pm} = \Lambda(F, \Phi, \Psi; X_{\pm}) \quad (3.4)$$

где  $X_0(\zeta) = 1, X_{\pm}(\zeta) = \zeta_1 \pm Y(\zeta), \Lambda(F, \Phi, \Psi; X) = \int_{\Pi} F(\zeta) X(\zeta) d\zeta + \sum_{\pm}$

$$\pm \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{\pm}(\zeta_1) X\left(\zeta_1, \pm \frac{1}{2}\right) d\zeta_1 - \int_0^{+\infty} \Psi^{\pm}(\zeta_1) X(\zeta_1, \pm 0) d\zeta_1 \right\}$$

Доказательство. Утверждения 1, 2 и соотношение (3.3) являются классическими результатами. Отметим лишь, что конформное преобразование  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2 \rightarrow y = \sqrt{1 - \exp(-2\pi\zeta)}, \sqrt{\eta} = |\eta|^{1/2} \exp(i \arg(\eta)/2)$ , переводит  $\Pi$  в полуплоскость (фиг. 3, 4, где стрелками отмечены различные выходы на бесконечность и особая точка). Поэтому

$$Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{y(\zeta_1 + i\zeta_2) - 1}{y(\zeta_1 + i\zeta_2) + 1} \right| \quad (3.5)$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что справедливы представления (3.2), в которых  $c_V = \pi^{-1} \ln 2$ . Кроме того, в окрестности особой точки  $\zeta = 0$  имеем

$$Y(\zeta) = (2\rho/\pi)^{1/2} \cos(\theta/2) + O(\rho) \text{ при } \rho = h^{-1}r \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

Соотношения (3.4) устанавливаются при помощи метода [12].

Опишем построение пограничного слоя. Обозначим через  $h^{-1}V(h, x, z)$  функцию, совпадающую с  $h^{-1}v(x)$  при  $x \in (b_-, a_-) \cup (a_+, b_+)$  и с  $h^{-1}v^{\pm}(x)$  при  $x \in (a_-, a_+), \pm z > 0$ . Эта функция, вообще говоря, терпит разрывы при  $x = a_{\pm}$ . „Сгладим“ ее, умножив на срезающие функции, равные нулю вблизи этих значений  $x$ :

$$h^{-1} \{1 - \chi(h^{-1}(x - a_+))\} \{1 - \chi(h^{-1}(x - a_-))\} V(x, z) \quad (3.7)$$

где  $\chi \in C_0^\infty((-1, 1))$ ,  $\chi(t) = 1$  при  $|t| < 1/2$ . Выражение (3.7) оставляет невязку в уравнениях (2.1)–(2.3), часть которой сосредоточена в  $h$ -окрестностях точек  $x = b_\pm$  и возникла из-за умножения на указанные срезки. Переходя к координатам  $\zeta$  и выделяя в (2.1) и (2.2) слагаемые порядка  $h^{-3}$ ,  $h^{-2}$  и  $h^{-2}$ ,  $h^{-1}$  соответственно, получаем, что главные члены упомянутой невязки компенсируются при помощи решения задачи (3.1), в которой  $\Phi^\pm = 0$ ,  $\Psi^\pm = 0$  и

$$F(\zeta) = [\Delta_\zeta, \chi(\zeta_1)] \left\{ v(a_-) + h\zeta_1 \frac{\partial v}{\partial x}(a_-) \right\} \quad \text{при } \zeta_1 < 0, \zeta_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$F(\zeta) = [\Delta_\zeta, \chi(\zeta_1)] \left\{ v^\pm(a_-) + h\zeta_1 \frac{\partial v^\pm}{\partial x}(a_-) \right\} \quad \text{при } \zeta_1 > 0, \zeta_2 \in A_\pm$$

где  $[L, M] = LM - ML$  — коммутатор операторов  $L$  и  $M$ . Отметим, что  $F$  — гладкая функция. Решение  $W(h, \zeta)$  этой задачи при  $\zeta_1 < 0$  имеет вид

$$\chi(\zeta_1) \left\{ v(a_-) + h\zeta_1 \frac{\partial v}{\partial x}(a_-) \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_-) - \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_-) \right) Y(\zeta) \quad (3.8)$$

где  $\chi(t) = \chi(t)$  при  $t < 0$ ,  $\chi(t) = 1$  при  $t \geq 1$ . При  $\zeta_1 > 0$ ,  $\pm \zeta_2 > 0$  к выражению (3.8) добавляются функции

$$(1 - \chi(\zeta_1)) \{ v^\pm(a_-) + h\zeta_1 (hv^\pm / \partial x)(a_-) \} \quad (3.9)$$

Построенное решение задачи (3.1) обращается в нуль при  $\zeta_1 < -1$  и допускает представление (3.3), в котором

$$B_0 = h \frac{\partial v}{\partial x}(a_-) - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_-) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_-) \right), \quad B_\pm = v(a_-) - v^\pm(a_-) \pm \\ \pm c_y \frac{h}{2} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_-) + \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_-) \right)$$

Предположение  $W(h, \zeta) = O(h)$  при  $\zeta_1 = O(h^{-1})$  об убывании пограничного слоя приводит к (2.12). Аналогичные рассуждения при построении погранслоя вблизи точки  $(a_+, 0)$  дают условия сопряжения (2.13).

Вблизи левого конца разреза  $M$  построенное приближение к решению  $u$  задачи (2.1)–(2.3) совпадает с пограничным слоем  $h^{-1}W(h, \zeta)$ . Это дает возможность найти асимптотическую формулу для коэффициента  $C_-(h)$  в представлении  $u$  вблизи особой точки

$$u(h, x, z) = \text{const} + C_-(h) \sqrt{r} \cos(\theta/2) + O(r) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

где  $(r, \theta)$  — полярные координаты с центром в  $(a_-, 0)$  и полярной осью, направленной вдоль  $M$ . С учетом (3.8), (3.9) и разложения (3.6) функции (3.5) получаем следующее:

Утверждение 4. Для коэффициента  $C_-(h)$  в представлении (3.10) решения задачи (2.1)–(2.3) справедлива асимптотическая формула

$$C_-(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x}(a_-) - \frac{\partial v^-}{\partial x}(a_-) \right) + O(\sqrt{h}) \quad (3.11)$$

где  $v^\pm$ —решение задачи (2.7), (2.9), (2.11)—(2.13). Аналогичная формула для коэффициента  $C_\pm(h)$  в разложении и вблизи  $(a_-, 0)$  получается из (3.11), если  $a_-$  заменить на  $a_+$ .

4°. *Трехмерный случай.* Построение асимптотики решения задачи (1.1)—(1.3) и асимптотики коэффициента в разложении (1.6) решения вблизи края  $\partial M$  плоского разреза проводится практически так же, как и в пп. 2°, 3°. Отметим лишь, что при определении пограничных слоев в окрестности каждого из контуров  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  необходимо сделать следующую замену координат:  $(x, z) \rightarrow (s, \xi_1, \xi_2) = (s, h^{-1}n, h^{-1}z)$ , где  $s$  и  $n$ —касательная и нормальная координаты вблизи  $\Gamma_j$ .

Вдали от  $\Gamma_j$  главным приближением к  $u$  являются функции  $h^{-1}v(x)$  (при  $x \in \Omega \setminus \bar{\omega}$ ) и  $h^{-1}v^\pm(x)$  (при  $x \in \omega, \pm z > 0$ ), которые удовлетворяют следующей краевой задаче:

$$-\Delta v(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x, \eta) d\eta + \varphi^+(x) - \varphi^-(x), \quad x \in \Omega \setminus \bar{\omega} \quad (4.1)$$

$$-\Delta v^\pm(x) = 2 \int_{A_\pm} f(x, \eta) d\eta \pm 2(\varphi^\pm(x) - \psi^\pm(x)), \quad x \in \omega \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(x, \eta) d\eta, \quad x \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial v^\pm}{\partial n}(x) = \int_{A_\pm} g(x, \eta) d\eta, \quad x \in \Gamma_3 \quad (4.3)$$

$$v(x) = v^+(x), \quad v(x) = v^-(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.4)$$

$$2 \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v^+}{\partial n}(x) + \frac{\partial v^-}{\partial n}(x), \quad x \in \Gamma_2 \quad (4.5)$$

Здесь и далее в этом разделе нормаль  $n$  к  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ —внешняя по отношению к  $\Omega \setminus \bar{\omega}$ , а нормаль  $n$  к  $\Gamma_3$ —внешняя по отношению к  $\omega$ . Обозначим правые части уравнений (4.1)—(4.3) через  $F, F^\pm$  и  $H, H^\pm$  соответственно.

Утверждение 5. *Решение задачи (4.1)—(4.5) существует в том и только в том случае, если выполнено равенство*

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} F(x) dx + \sum_{\pm} \int_{\omega} F^\pm(x) dx + \int_{\Gamma_1} H(x) ds_x + \sum_{\pm} \int_{\Gamma_3} H^\pm(x) ds_x = 0$$

*Это решение определено с точностью до аддитивной постоянной.*

Доказательство утверждения проводится по известной схеме (см., например, [13]).

Пограничный слой вблизи края  $\partial M$  разреза  $M$  конструируется так же, как и в 3°. Именно, в  $h$ -окрестности  $\partial M$  решение задачи (1.1)—(1.3) представляется в виде

$$u(h, x, z) = h^{-1}\{J_0(s) + hJ_1(s) + h\xi_1 J_2(s) + hJ_3(s)Y(\xi)\} + O(h)$$

где  $\xi = h^{-1}(n, z)$ ,  $Y$ —функция (3.5),  $J_k$ —гладкие функции на  $\partial M$ ,

$$J_0 = v|_{\partial M}, \quad J_1 = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial M}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \right) \Big|_{\partial M}$$

Указанное соотношение позволяет найти асимптотику коэффициента  $C(h, s)$  при особенностях на  $\partial M$  производных решения задачи (1.1)–(1.3).

Утверждение 6. Для коэффициента  $C(h, s)$  в представлении (1.6) решения задачи (1.1)–(1.3) справедлива асимптотическая формула

$$C(h, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \left( \frac{\partial v^+}{\partial n} \Big|_{\partial M} - \frac{\partial v^-}{\partial n} \Big|_{\partial M} \right) (s) + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

5°. *Примеры.* а) Рассмотрим задачу об антиплоском сдвиге прямоугольника  $Q_h$  с трещиной  $M$  (см. 2°). Предположим, что массовые силы отсутствуют, берега трещины и боковые стороны  $Q_b$  свободны от напряжений, а на горизонтальных сторонах заданы сдвиговые усилия интенсивности  $\tau(x)$ . Все это означает, что в (2.1)–(2.3)  $\varphi^\pm(x) = 0$ ,  $g^\pm(\eta) = 0$ ,  $\varphi^\pm(x) = \mu^{-1}\tau(x)$ ,  $f(x, \eta) = 0$ , где  $\mu$  — модуль сдвига. В этом случае  $v = 0$  и

$$v^\pm(x) = \pm \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{x-a_-}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^x (y-a_-)\tau(y)dy + \frac{x-a_+}{a_+ - a_-} \int_x^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy \right\}$$

Тогда  $\frac{\partial v^\pm}{\partial x}(a_-) = \pm \frac{2\mu^{-1}}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy$  и по формуле (3.11) коэф-

фициент интенсивности в левой вершине трещины равен

$$\sqrt{\frac{8}{\pi h}} \frac{\mu^{-1}}{a_+ - a_-} \int_{a_-}^{a_+} (y-a_+)\tau(y)dy + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1 \quad (5.1)$$

При  $\tau > 0$  и малом  $h$  коэффициент  $C_-(h)$  отрицателен. Отметим, что в рассмотренном примере функция  $v$  равна нулю на  $[b_-, a_-] \cup [a_+, b_+]$ . Поэтому условия (2.12), (2.13) записываются в виде  $v^\pm(a_\pm) = v^\pm(a_\pm) = 0$ . После этого возможно применение балочной теории трещин (см. § 1.12 [14]; [15] и имеющиеся там ссылки), которая приводит к тому же результату (5.1).

б) Рассмотрим задачу о потенциальном течении идеальной жидкости в трехмерном круговом кольце малой высоты  $h$ , частично перегородженном непроницаемой абсолютно жесткой мембраной (см. 4°). Пусть контуры  $\Gamma_j$  — окружности радиусов  $R_j$  ( $R_1 > R_2 > R_3$ ). Предположим, что жидкость закачивается равномерно через верхнюю часть внутренней боковой стенки  $S_{h,+}^3 = \{(x, z) : |x| = R_3, z \in (0, h/2)\}$ , а откачи-



вается через нижнее основание; поток равен  $\pi q R_3$ . Остальные стенки и мембрана считаются непроницаемыми. Все это означает, что в (1.1)–(1.3)  $f(x, h^{-1}z) = 0$ ,  $\varphi^+(x) = 0$ ,  $\psi^\pm(x) = 0$ ,  $g(x, h^{-1}z) = 0$  при  $(x, z) \in S_h^1 \cup S_{h,-}^3$ ,  $g(x, h^{-1}z) = -h^{-1}\pi q R_3^{-1}$  при  $(x, z) \in S_{h,+}^3$ ;  $\varphi^-(x) = -\pi q (R_1^2 - R_3^2)^{-1}$ . В этом случае

$$v(x) = \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left( R_1^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$v^+(x) = \pi q \ln r + \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left\{ (2R_3^2 - R_1^2) \ln R_2 - \frac{R_2^2}{2} \right\}$$

$$v^-(x) = \frac{\pi q}{R_1^2 - R_3^2} \left( R_3^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{q}{R_1^2 - R_3^2} \left\{ (R_1^2 - 2R_3^2) \ln R_2 + \frac{R_2^2}{2} \right\}$$

и, согласно (4.6), коэффициент  $C(h, s)$  в (1.6) при особенности скоростей  $\nabla u$  на ребре  $\partial M$  обладает асимптотикой

$$C(h, s) = \sqrt{\frac{\pi}{2h}} \frac{q}{R_2} \frac{R_1^2 + R_2^2 - 2R_3^2}{R_1^2 - R_3^2} + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1$$

При малом  $h$  коэффициент  $C(h, s)$  имеет тот же знак, что и  $q$ .

в) Указанный способ приближенного вычисления коэффициентов интенсивности может быть применен и в более общих ситуациях. Рассмотрим, например, задачу об антиплоском сдвиге тонкой криволинейной трещины с трещиной:

$$-\Delta_{x,z} u(h, x, z) = 0, \quad (x, z) \in Q_h \setminus M; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(h, b_\pm, z) = 0, \quad |z| < hl(b_\pm) \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(h, x, \pm hl(x)) = \pm \frac{1}{\mu} \tau(x), \quad x \in (b_-, b_+); \quad \frac{\partial u}{\partial z}(h, x, \pm 0) = 0, \quad x \in (a_-, a_+)$$

где  $l$  — гладкая на  $[b_-, b_+]$  положительная функция,  $Q_h = \{(x, z) : x \in (b_-, b_+), |z| < hl(x)\}$ ,  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial Q_h$  (сравни пример а)).

Алгоритм построения асимптотики решения задачи (5.2) не отличается в существенном от изложенного в 2°, 3°. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательную асимптотическую формулу для коэффициента интенсивности

$$C_-(h) = \frac{-2}{\sqrt{\pi hl(a_-)}} \left\{ \mu \int_{a_-}^{a_+} \frac{dy}{l(y)} \right\}^{-1} \int_{a_-}^{a_+} \int_{a_-}^y \tau(t) dt \frac{dy}{l(y)} + O(\sqrt{h}) \quad \text{при } h \ll 1$$

Отметим, что при  $l(x) = 1/2$  последняя формула переходит в (5.1).

# STRESS INTENSITY FACTORS FOR ANTIPLANE SHEAR AND FLOW OF IDEAL LIQUID IN THIN REGIONS WITH A LONGITUDINAL CUT

S. A. NAZAROV

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՃԱՔԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԹԱՐԱԿ ՏԻՐՈՒՅՔՆԵՐՈՒՄ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ՍԱՀՔԻ ԵՎ ԻԳԵԱԼԱԿԱՆ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀՈՍՔԻ ԽԵՊԻՐՆԵՐՈՒՄ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԸ

Ս. Ա. ՆԱԶԱՐՈՎ

Ա մ ֆ ո թ ու մ

Կառուցված է կենտրոնական հարթության մեջ ճաք ունեցող, փոքր և բարձրությամբ զլանային տիրույթում Լապլասի օպերատորի համար նեյմանի խնդրի  $h=0$  լուծման ղեկարում ասիմպտոտիկայի գլխավոր անդամը: Եռաչափ տիրույթի ղեկարում խնդիրը համապատասխանում է իդեալական հեղուկի պոտենցիալ հոսքի խնդրին, իսկ երկչափում—նաև հակահարթ սահ- չի և ոլորման խնդիրներին: Արտածվում են լուծումների գրադիենտի եզա- կիության գործակիցների համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր: Դիտարկված են կոնկրետ խնդիրներ, որոնցում այդ բանաձևերը ունեն առավել բացահայտ տեսք:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.—ПММ, 1962, т. 26, №4, с. 668—686.
2. Гольденвейзер А. Л., Колос А. В. К построению двумерных уравнений упругих тонких пластин.—ПММ, 1965, т. 29, №1, с. 141—161.
3. Джавадов М. Г. Асимптотика решений краевой задачи для эллиптических уравнений в тонких областях.—Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, №10, с. 1901—1909.
4. Зиню И. Е., Тропи Э. А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 256 с.
5. Бердичевский В. Л. Вариационно-асимптотический метод построения теории оболочек.—ПММ, 1979, т. 43, №4, с. 664—687.
6. Назаров С. А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях.—Вестник ЛГУ, 1982, №7, с. 65—68.
7. Морозов Н. Ф., Назаров С. А., Семенов Б. Н. Об изгибе тонких пластин, ослабленных надрезами.—Тр. XII всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 3, Ереван: Изд-во ЕГУ, 1980, с. 78—84.
8. Асаларян О. Б., Назаров С. А. Об изменении коэффициента интенсивности при запайке продольной трещины в призматическом стержне.—Докл. АН Арм. ССР, 1981, т. 72, №1, с. 18—21.
9. Назаров С. А., Ромашов Ю. А. Изменение коэффициента интенсивности при разрушении перемычки между двумя коллинеарными трещинами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1982, №4, с. 30—40.
10. Назаров С. А. Асимптотика решений эллиптических уравнений в тонких областях с кусочно-гладкой границей.—Дифференциальные уравнения и их применения, вып. 33. Вильнюс: Изд-во АН Лит. ССР, 1982, с. 62—83.

11. Назаров С. А. Введение в асимптотические методы теории упругости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 120 с.
12. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками. — Math. Nachr., 1977, Bd. 76, s. 29—60.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. Сяелян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
15. Михайлов А. М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин. — Прикл. механика и техническая физика, 1969, №3, с. 171—174.

Ленинградский госуниверситет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию  
23.IV.1985