

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ МОДУЛЯЦИИ В ПЬЕЗОДИЭЛЕКТРИКАХ С ШАРИКОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

БАГДОЕВ А. Г., ШЕКОЯН А. В.

Особенности распространения квазимонохроматических волн в пьезодиэлектриках и в упругих композитах с шариковыми включениями изучены в работах [1—3]. В этих работах уравнения модуляции получены из исходной системы уравнений непосредственной подстановкой квазимонохроматического решения в нее. В работах [4, 5] для обычной и электропроводящей жидкостей с пузырьками газа уравнение модуляции получено из уравнения коротких волн, которое описывает поведение среды вблизи волны.

В рамках модели, описанной в статьях [1—3], изучено распространение пучка упругой волны в полупространстве, где учтены исходные постоянные деформации, появляющиеся из-за наличия E_3^0 . Исходя из уравнений теории упругости и Максвелла для гексагональных и тетрагональных кристаллических сингоний, выведено уравнение коротких волн, где учтены дисперсия, диссипация и нелинейность. В отличие от указанных работ затухание берется по координате, что позволило получить для не очень малой диссипации уравнения стационарных пучков. Решение последнего уравнения ищется в виде квазимонохроматической волны, ограничиваясь первыми, вторыми гармониками и свободными членами.

Получена система уравнений для амплитуд, которая решается для сильной и слабой дисперсии. В случае сильной дисперсии в уравнении для второй гармоники пренебрегаются всеми производными, получено уравнение модуляции, которое решается для гауссовского пучка. Получены графики хода пучка, получены фокусные расстояния и фокальные пятна, приведены их таблицы для типичных пьезоэлектриков с включениями. Оценены пределы применимости для полученного по нелинейной теории упругости решения.

В случае слабой дисперсии в уравнении второй гармоники сохранены дифференцируемые члены. Система уравнений для амплитуд приводится для гауссовских пучков к обыкновенным уравнениям для ширины, амплитуд, кривизны и дополнительных фаз первой и второй гармоники, которые решаются методом Рунге-Кутты. Показано наличие фокусирования для данного уточненного решения.

1. Постановка задачи. Предполагается, что в полубесконечной пьезодиэлектрической, анизотропной тетрагональной или гексагональной сингониями среде, вдоль оси симметрии шестого или четвертого

порядка распространяется пучок квазипродольной волны. В среде есть маленькие неоднородности типа шариков, которые под действием упругой волны колеблются. Тогда на основании известных порядков искомых величин и размеров области вблизи волны [6, 7], примененных в работах [1—3], дается упрощение среды. В отличие от [1—3] учитываются также начальные постоянные деформации $\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, которые появляются из-за постоянного электрического поля E_3^0 . При этом предполагается, что начальное деформированное состояние — одномерное по x_3 . С учетом последнего, система упрощенных уравнений, описывающая распространение упругой волны, имеет следующий вид:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_1} + c_{44} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - e_{13} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \quad (1.1)$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - e_{13} \frac{\partial E_2}{\partial x_2} - e_{31} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \quad (1.2)$$

$$\rho_2 p \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + (1-p)\rho_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (c_{11} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + c_{44} \Delta_1 u_2 + C_{33} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - e_{13} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) - b \frac{\partial E_3}{\partial x_3} - a_{23} E_3 \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + (3c_{22} + C_{322}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \tau_{33} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x_3^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + 2q \frac{\partial}{\partial t} (u_n - u_2) + \Omega^2 (u_n - u_2) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} = 0 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{11} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} (e_{13} + e_{31}) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} e_{13} \Delta_1 u_2 + \varepsilon_{33} \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + b \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + (a_{33} - \varepsilon_{33}) \frac{\partial E_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + a_{23} E_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} = 0 \quad (1.7)$$

где $C_{33} = c_{33} + (3c_{33} + C_{333}) \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33} + a_{33} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$, ρ_1 и ρ_2 — плотности среды и шарика, c_{ij} , C_{ijk} , e_{ik} , ε_{ik} , a_{23} , τ_{33} — соответственно модули линейной, нелинейной упругости и пьезомодуль, тензоры диэлектрической проницаемости, электрострикционный тензор и коэффициенты вязкости в матричных обозначениях, $b = e_{23} + a_{23} E_3^0$, $q = \frac{9}{2} \rho_1 (2\omega^2 + 1) \rho_2^{-1} (2\omega^2 + 1)^{-1}$, $\Omega^2 = 9\rho_1 \rho_2^{-1} \chi^{-2} (2\omega^2 + 1)$, $\omega = v v_1^{-1}$, $\chi = l_0 v^{-1}$, v_1 — линейная скорость поперечной волны; l_0 — радиус шарика; p — концентрация шариков; u_i — компоненты вектора смещения; E_i — компоненты вектора электрического напряжения, u_n — смещение шарика. В уравнениях (1.3) и

(1.6) множители $1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$ заменены единицей в силу малости $\frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}$.

Включения учтены в уравнении (1.3) согласно модели [8]. При выводе уравнений (1.1)–(1.7) используется система Лагранжевых переменных. Учтены геометрическая, стрикционная нелинейности и линейная вязкость. Основным по порядку величины является компонента скорости $\frac{\partial u_3}{\partial t}$ и электрического поля E_3 вдоль оси x_3 , $\Delta_1 \equiv$

$$\equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

2. Вывод уравнений коротких волн. Введя новую переменную $\tau = \tau_1 - t$, $\tau_1 = x_3 v^{-1}$, упрощая систему уравнений обычной процедурой, принятой в теории дифракции волн [1,7] и последовательно исключая неизвестные функции, получим для скорости частицы $u = \frac{\partial u_3}{\partial t}$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} - \frac{1}{2} L(u) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \tau} + D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + B_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + Q_1 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} \right) \quad (2.1)$$

где

$$L(u) = -2A_0 \rho_1^{-1} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

если $n=1$, то имеется аксиально-симметричный пучок, а $n=0$ означает, что рассматривается плоская задача, v —скорость упругой волны.

$$D = -\gamma_{33} \rho_1^{-1}, \quad B_1 = v^2 \rho_2 \rho \Omega^{-2} \rho_1^{-1}, \quad \Gamma = \rho_1^{-1} [(2a_{33} - \varepsilon_{33}) b^2 (\varepsilon_{33}')^2 + (3c_{33} + C_{333})]$$

$$Q_1 = -2v^2 \rho \rho_2 \rho_1^{-1} \Omega^{-4}, \quad \rho_1 = [-2C_{33}' + 2b(\varepsilon_{33}')^{-1}] v^{-1}, \quad A_0 = (c_{13} + c_{44}) \mu_1 + c_{44} +$$

$$+ (\varepsilon_{33}')^{-1} \left[e_{13} b + \varepsilon_{11} (\varepsilon_{33}')^{-1} b^2 + \frac{1}{2} (e_{15} + e_{31}) b \mu_1 v^{-1} - \frac{1}{2} e_{15} b \right]$$

$$\mu_1 = - \left[(c_{13} + c_{44}) - \frac{1}{\varepsilon_{33}'} (e_{15} + e_{31}) b \right] (\rho_1 - c_{44} v^{-1})^{-1} v^{-1}$$

Линейная скорость волны в среде, где есть только пьезоэлектричество, имеет следующий вид:

$$v^2 = \rho_1^{-1} (c_{33} + b^2 \varepsilon_{33}^{-1})$$

В уравнении (2.1) члены $D \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ и $B_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}$ обуславливают поглощение, а $Q_1 \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4}$ — дисперсию. Для случая $\rho_1 < 0$ или $-\rho_1 < 0$ получится $Q_1 > 0$ или $Q_1 < 0$, что приводит, как и для жидкости [5], к отрицательной дисперсии. Это выполняется при $b^2 \varepsilon_{33}^{-1} > c_{33}$ или для полей E_3^0 порядка $8 \cdot 10^5 \text{ В} \cdot \text{Н}^{-1}$.

3. Уравнение модуляции для стационарных пучков. Для функции u было получено уравнение коротких волн (2.1). Ввиду наличия дис-

персии и диссипации можно искать решение (2.1). Ввиду наличия дисперсии и диссипации можно искать решение (2.1) в виде квазимонохроматических волн

$$u = \frac{1}{2} \{ u_{01} \exp[-\nu x^2 \tau_1 + i\theta] + u_{02} \exp[-2\nu x^2 \tau + 2i\theta] + u_0 + \text{к. с.} \} \quad (3.1)$$

где $\theta = x\tau - \omega t$, x — основная, а ω — приращение частоты за счет малых диссипаций, дисперсии и нелинейности; u_{01} , u_{02} — медленноменяющиеся амплитуды первой и второй гармоник; u_0 — свободный член (среднее течение).

Вычисляя производные от (3.1), подставляя в (2.1) и приравнявая нулю $e^{i\theta}$, $e^{2i\theta}$ и свободные члены, можно получить уравнения для u_{01} , u_{02} , u_0 .

Граничное условие для u при $x_3 = 0$ задается в виде гауссова пучка

$$u = \frac{1}{2} \left\{ a_0 \exp \left[\frac{r^2 r_0^{-2}}{2} \right] \cdot [\exp(-ixt - i\omega t)] + \text{к. с.} \right\} \quad (3.2)$$

тогда основной по порядку в (3.1) будет u_{01} , а u_{02} , u_0 — малые более высокого порядка, генерируемые за счет нелинейности. Для волн высокой частоты x приравнявая в уравнении для первой гармоники наибольшие по порядку недифференцируемые члены, получим уравнение линейной дисперсии и затухание

$$\omega = -B_1 x^3 v^{-1}, \quad \nu = -Dv^{-1} - Q_1 x^2 v^{-1} \quad (3.3)$$

Так же, как и в работе [2], можно показать, что для малых $\xi = -\omega x^{-1}$ и νx , вкладом u_0 в уравнения, описывающие u_{01} и u_{02} для дифракционных задач, в которых $r \sim x^{-1/2}$, можно пренебречь и получится

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial \tau_1} \left(ix + \nu x^2 + \frac{2Q_1}{\nu x^4} - 3i\omega \right) - \frac{1}{2} L(u_{01}) = \frac{x^2 \Gamma}{2\nu} (1 + 6i\nu x) u_{02} u_{01}^* e^{-2\nu x^2 \tau_1} \quad (3.4)$$

$$u_{02} \left(-12\omega x + 4i\nu x^3 + \frac{24iQ_1 x^5}{\nu} \right) + \frac{\partial u_{02}}{\partial \tau_1} (2ix + 30i\omega - 12Q_1 x^4 v^{-1}) - \\ - \frac{1}{2} L(u_{02}) = \Gamma v^{-1} x^2 (1 + 2ix) u_{01}^2 \quad (3.5)$$

Уравнения (3.4) и (3.5) отличаются коэффициентами от уравнений работ [2,3], поскольку в (3.1) вместо $\exp(-\nu x^2 t)$ стоит $\exp(-\nu x^2 \tau_1)$, что позволяет и для не очень малых νx получить стационарные уравнения.

4. Приближенное решение для большой дисперсии. Допустим, что $\omega \tau_1 \gg 1$, $\omega \ll x$, тогда в (3.5) можно пренебречь производными от u_2 и получить

$$u_{02} = \Gamma v^{-1} (x^2 + 2i\nu x^3) \left(-12\omega x + 4i\nu x^3 + \frac{24iQ_1 x^5}{\nu} \right)^{-1} u_{01}^2 \quad (4.1)$$

Уравнение (3.4) при этом примет вид

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial \tau_1} \left(i\alpha + \nu x^2 + \frac{2Q_1 x^4}{v} - i\omega \right) - \frac{1}{2} L(u_{01}) = \frac{x^4 (1 + 8i\nu x) \Gamma^2 e^{-2\nu x^2 \tau_1}}{8\nu^2 \left(-3\omega x + \frac{6iQ_1 x^3}{v} + i\nu x^3 \right)} u_{01} |u_{01}|^2 \quad (4.2)$$

Записывая

$$u_1 = a \exp(i\varphi) \quad (4.3)$$

и отделяя действительные и мнимые части в (4.2), можно получить

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} (1 - 3\xi) + \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \left(\nu x + \frac{2Q_1 x^3}{v} \right) + \frac{A_0 v}{p_1 x} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{n}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right] = \\ = \frac{x_1}{\alpha} a^3 \exp[-2x^2 \tau_1] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} (1 - 3\xi) + a \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \left(\nu x + \frac{2Q_1 x^3}{v} \right) + \frac{A_0 v}{p_1 x} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{n}{r} a \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = \\ = \frac{x_2}{\alpha} a^3 \exp[-2\nu x^2 \tau_1] \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 = \left(3\omega x + 8\nu^2 x^4 + \frac{48x^5 Q_1}{v} \right), \quad x_2 = - \left(\nu x^3 + \frac{6Q_1 x^5}{v} - 24\nu x^3 \xi \right) \\ \xi = \frac{1}{8} \Gamma^2 v^{-2} \left[9\xi^2 + \left(\nu x + \frac{6Q_1 x^3}{v} \right)^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

Решения уравнений (4.4) и (4.5) в виде гауссовых пучков в пренебрежении линейной диссипацией, входящей в левые части, получены в [1] [5] и имеют следующий вид:

$$a = a_0 f^{-1}(\tau_1) \exp \left[-\frac{1}{2} r^2 (r_0 f)^{-2} \right], \quad \varphi = \sigma(\tau_1) + \frac{r^2}{2R_0(\tau_1)} \quad (4.6)$$

где безразмерная ширина пучка $f(\tau_1)$ находится из уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\tau_1^2} = \bar{\xi} f^{-3} \quad (4.7)$$

где

$$\bar{\xi} = 4\nu^2 x_1 \lambda a_0^2 x^{-4} r_0^{-2} \exp[-2\nu x^2 \tau_1] + 4\lambda^2 \mu^2, \quad \tau_2 = x\tau_1 \quad (4.8)$$

и обозначены

$$\lambda = -2A(p_1 v)^{-1}, \quad \mu = v^2 (x r_0)^{-2} \quad (4.9)$$

Из уравнений (4.7) и (4.8) следует, что при большой нелинейности, когда $\bar{\xi} < 0$, кривизна $f(\tau_1)$ отрицательна и имеет место самофокусировка. Кроме (4.7) из уравнения (4.5) получается уравнение, связывающее кривизну фронта $v(R_0 x)^{-1}$ и $\frac{df}{d\tau_2}$. При этом на границе $x_2 = 0$ можно полагать $\tau_2 = 0$

$$f = 1, \quad \frac{df}{d\tau_2} = -R^{-1}(0) v^2 \lambda x^{-2} - x_2 a_0^2 x^{-1} \quad (4.10)$$

Считая, что $\frac{df}{d\tau_2} < 0$ при $\tau_2 = 0$, для первой нисходящей ветви кривой $f(\tau_2)$ можно решение уравнения (4.7) получить в виде:

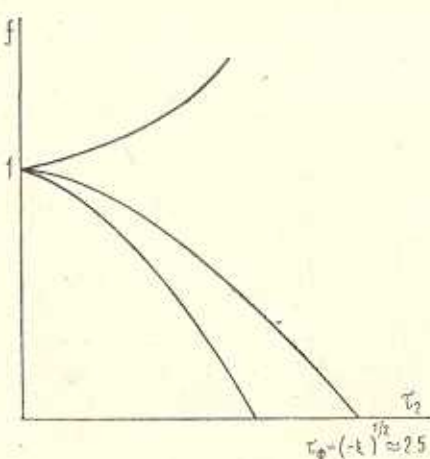
$$\tau_2 = -\frac{1}{c'} [(c'f^2 - \bar{\tau})^{1/2} - (c' - \bar{\tau})^{1/2}] \quad (4.11)$$

где $c' = \bar{\tau} + \{v^2 \lambda R_0^{-1}(0)z^{-2} + z_2 a_0^2 z^{-2} \exp[-2vz^2 \tau_2]\}^2$

Для значений $D=0$; $\xi = -0,1$; $B_1 z^{-1} \approx 0$; $\lambda = \pm \frac{1}{2}$; $v^2 R_0^{-1} z^{-2} \approx 0$; $\mu = 0,4$; $b=0$; $\Gamma \approx 3$; $a_0 v \approx 0,3$, то есть для композита без учета диссипации проведены расчеты по (4.11), результаты которых приведены на фиг. 1. При этом формула (4.8) дает $\bar{\tau} = \mu^2(4\lambda^2 - \frac{a^2}{6} \Gamma^2 \lambda a^2 v^{-4} \xi^{-1} r_0^2)$. Поскольку $\xi < 0$

при $\lambda < 0$, как в обычной акустической среде, $\bar{\tau} > 0$ и имеет место дефокусирование пучка, а при $\lambda > 0$ — самофокусирование, когда $a_0^2 v^{-4} r_0^2 > 24\lambda \xi \Gamma^{-2}$. Формула (4.11)

имеет вид $\tau_2 = -\frac{1}{c'} (\bar{\tau} f^2 - \bar{\tau})^{1/2}$. В общем случае фокусные расстояния из (4.11) имеют вид: $f=0$, $\tau_{fn} = \frac{1}{c'} [(c' - \bar{\tau})^{1/2} - (-\bar{\tau})^{1/2}]$. В случае $\xi < 0$, $f'' > 0$ и имеется фокальное пятно $\tau_{fn} = (c' - \bar{\tau})^{1/2} (c')^{-1}$.



Фиг. 1

Оценки фокальных расстояний и пятен приведены в таблице для кристаллов и керамики BaTiO_3 , когда $\gamma_{33} = \gamma_{32} = a_{33} = E_3^0 = 0$, с свинцовыми шариковыми неоднородностями.

Таблица

К р и с т а л л

$\omega [c^{-1}]$	$r_0 [M]$	$a_0^2 [M^2]$	$R_0 [M]$	$z_\phi [M]$	$z_{\phi n} [M]$	$f_{\phi n}^2$
10^7	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-17}$	0,5	—	0,08	0,8
10^7	10^{-1}	$4 \cdot 10^{-17}$	1,1	—	0,25	0,7
10^8	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-18}$	0,2	0,2	—	—
10^8	10^{-1}	$2 \cdot 10^{-17}$	0,25	0,31	—	—

К е р а м и к а

10^7	10^{-1}	$4 \cdot 10^{-16}$	-0,2	—	0,06	0,8
10^8	10^{-1}	$8 \cdot 10^{-17}$	-1	1	—	—

5. Уточненное решение. Для произвольной дисперсии и диссипации ($\omega \ll \alpha$, $\xi \tau_2$ — любое) в уравнениях (3.4) и (3.5) следует удерживать все члены. Полагая

$$a = v c(\tau_2) \exp[-r^2 r_0^{-2} f^{-2}(\tau_2)], \quad \varphi = \sigma(\tau_2) + \frac{1}{2} \bar{k} \alpha^2 r^2 v^{-2}$$

$$b = v F(\tau_2) \exp[-r^2 r_0^{-2} f_1^{-2}(\tau_2)], \quad \psi = \sigma_1(\tau_2) + \frac{1}{2} \bar{k} \alpha^2 r^2 v^{-2} \quad (5.1)$$

$$u_{01} = a \exp(i\varphi), \quad u_{02} = b \exp(-i\psi)$$

отделяя действительные и мнимые части в них, разлагая $\exp[-r^2 r_0^{-2} f^{-2}]$, $\exp[-r^2 r_0^{-2} f_1^{-2}]$ по степеням r и оставляя члены порядка единицы и r^2 , можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{dc}{d\tau_2} = D^{-1} \left[\Phi_1(1-3\xi) + \Phi_3 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau_2} = \frac{1}{cD} \left[\Phi_1 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) - \Phi_2(1-3\xi) \right] \quad (5.3)$$

$$\frac{dF}{d\tau_2} = D_1^{-1} \left[-\Phi_2 \left(-8\nu \alpha + \frac{52Q_1 \alpha^3}{v} \right) + 2\Phi_4(1-15\xi) \right] \quad (5.4)$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\tau_2} = -D^{-1} F^{-1} \left[\left(8\nu \alpha + \frac{52Q_1 \alpha^3}{v} \right) \Phi_4 + 2(1-15\xi) \Phi_3 \right] \quad (5.5)$$

$$\frac{df}{d\tau_2} = \frac{f^3}{2\nu D} \left[(1-3\xi) \Phi_5 + \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) \Phi_6 \right] \quad (5.6)$$

$$\frac{d\bar{k}}{d\tau_2} = 2D^{-1} \left[\Phi_3 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) - (1-3\xi) \Phi_5 \right] \quad (5.7)$$

$$\frac{df_1}{d\tau_2} = f_1^3 \nu^{-1} F^{-1} D^{-1} \left[-\frac{1}{2} \Phi_7 \left(-8\nu \alpha + \frac{52Q_1 \alpha^3}{v} \right) + \Phi_8(1-15\xi) \right] \quad (5.8)$$

$$\frac{d\bar{k}_1}{d\tau_2} = -2(FD)^{-1} \left[\Phi_8 \left(-8\nu \alpha + \frac{52Q_1 \alpha^3}{v} \right) + 2\Phi_7(1-15\xi) \right] \quad (5.9)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{\lambda}{2} \bar{k} c(1+n) + \frac{\Gamma \eta}{2} \left[\sin(\sigma_1 - 2\sigma) + 6 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) F c \cos(2\sigma - \sigma_1) \right]$$

$$\varphi_2 = -i c \mu f^{-2} (1+n) + \frac{\Gamma \eta}{2} \left[\cos(2\sigma - \sigma_1) - 6 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) \sin(\sigma_1 - 2\sigma) \right] F c$$

$$\Phi_3 = -12\xi F - i \mu F f_1^{-2} (1+n) + \Gamma c^2 [\cos(2\sigma - \sigma_1) - 2\nu \alpha \sin(2\sigma - \sigma_1)]$$

$$\Phi_4 = F \left[\left(4\nu \alpha + \frac{6Q_1 \alpha^3}{v} \right) + \frac{\lambda}{2} \bar{k}_1 (1+n) \right] + \Gamma c^2 [\sin(2\sigma - \sigma_1) + 2\nu \alpha \sin(2\sigma - \sigma_1)]$$

$$\Phi_5 = -2i \bar{k} \mu f^{-2} + \Gamma \eta \left(\frac{\bar{k}_1}{2} - \bar{k} \right) \left[\frac{1}{2} F \cos(2\sigma - \sigma_1) - 3 \left(\nu \alpha + \right. \right.$$

$$+ \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} F \cos(2\sigma - \sigma_1) \Big] + \Gamma \eta_\mu F \left[-\frac{1}{2} \sin(\sigma_1 - 2\sigma) - 3 \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right) f_1^{-2} \cos(2\sigma - \sigma_1) \right]$$

$$D = (1 - 3\xi)^2 + \left(\nu \alpha + \frac{2Q_1 \alpha^3}{v} \right)^2, \quad D_1 = \left(\frac{52Q_1 \alpha^3}{v} - 8\nu \alpha \right)^{-2} + 4(1 - 15\xi)^2$$

$$\Phi_6 = 2f^{-4} \mu^2 \lambda - \frac{1}{2} \lambda \bar{k}^2 + \frac{\Gamma F}{2} \left\{ \eta_\mu f_1^{-2} \cos(2\sigma - \sigma_1) + \eta \left(\frac{\bar{k}_1}{2} - \bar{k} \right) \left[\sin(\sigma_1 - 2\sigma) + \right. \right. \\ \left. \left. + 6(\nu \alpha + 2Q_1 \alpha^3 v^{-1}) \cos(2\sigma - \sigma_1) + 6(\nu \alpha + 2Q_1 \alpha^3 v^{-1}) \eta_\mu f_1^{-2} \sin(\sigma_1 - 2\sigma) \right] \right\}$$

$$\eta = \exp[-\nu \alpha \tau_2], \quad \Phi_7 = \left(2f_1^{-4} \mu^2 - \frac{1}{2} \bar{k}_1^2 \right) \lambda F + \Gamma c^2 \left\{ \mu (f_1^{-2} - 2f^{-2}) \cos(2\sigma - \sigma_1) - \right. \\ \left. - 2\nu \alpha \sin(2\sigma - \sigma_1) \right\} - \left(\bar{k} - \frac{\bar{k}_1}{2} \right) \left[\sin(2\sigma - \sigma_1) + 2\nu \alpha \cos(2\sigma - \sigma_1) \right]$$

$$\Phi_8 = \Gamma c^2 \left\{ \mu (f_1^{-2} - 2f^{-2}) \left[\sin(2\sigma - \sigma_1) + 2\nu \alpha \cos(2\sigma - \sigma_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\cos(2\sigma - \sigma_1) - 2\nu \alpha \sin(2\sigma - \sigma_1) \right] \left(\bar{k} - \frac{\bar{k}_1}{2} \right) \right\} - 2\lambda \mu F \bar{k}_1 f_1^{-2}$$

Полученная система (5.2)–(5.9) решалась методом Рунге-Кутты при начальных данных $\tau_2 = 0$; $f = 1$; $f_1 = 1$; $\sigma = 0$; $\sigma_1 = 0$; $c = c_0$; $F = F_0$; $\bar{k} = k_0$; $\bar{k}_1 = \bar{k}_0$ и указанных выше значениях параметров. Для широкого диапазона величин λ , μ , \bar{k}_0 , ξ , ν удается получить значения $f(\tau_2)$, $c(\tau_2)$, $F(\tau_2)$. Для задачи магнитной гидродинамики с пузырьками газа расчеты проведены Сусанной Манукян, которые указывают на уменьшение примерно в 1,5 раза фокусного расстояния по сравнению с приближенным решением (4.11). Такие же выводы получаются и для данной системы.

На фиг. 1 указана форма $f(\tau_2)$ по полученному решению, изображенная кривой 1.

Следует отметить, что решение для пучков путем численного интегрирования уравнения типа (2.1), но с дисперсией такой же, как в [5], и без диссипации пучков, получено в [9] и качественно согласуется с упрощенными решениями, полученными выше, которые описывают решение достаточно точно вдали от фокуса.

6. *Предел применимости теории упругости для пучков.* При фокусировании пучков упругих волн вблизи фокальных точек или фокальных пятен деформации могут настолько возрасти, что деформации становятся пластическими, а в хрупком материале могут появляться разрушения.

Подставляя в условие Мизеса выражения для напряжения, от-

бросив вязкостные члены, дисперсию и нелинейность, а также малые члены порядка σ_{12}^2 , σ_{13}^2 , σ_{23}^2 , получим

$$\left| \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right| \approx \frac{1}{2} \sigma_3 \mu_2^{-1} \quad (6.1)$$

μ_2 — модуль сдвига.

Ограничиваясь в выражении (3.1) первой гармоникой и выполняя дифференцирование, можно найти $\frac{\partial u_{01}}{\partial x_3}$.

Подставляя полученное выражение в (4.3) и взяв его максимальное значение, получим $\left| \frac{\partial u_{01}}{\partial x_3} \right| \approx ka$, где амплитуда a для гауссовского пучка на оси имеет вид $a = a_0 f^{-1}$. Тогда из (6.1) получим значение ширины пучка, на оси которого условие упругости среды нарушается. Это значение следующее:

$$f_n = 2\mu_2 a_0 k \sigma_3^{-1}, \quad k = \alpha v^{-1} \quad (6.2)$$

где σ_3 — известное число для данного вещества, входящее в условие Мизеса.

Очевидно $f_n < 0$, так как иначе упругость не имела бы места в начальном сечении $x_3 = 0$, что противоречит первоначальному предположению.

Для анизотропной среды, каковым является пьезодиэлектрик, приближенно можно применять выведенное выше выражение.

Для хрупких веществ полученную формулу (6.2) можно использовать для оценок радиуса пучка и рассеяния, при которых появляются разрушения, причем под σ_3 понимается предел прочности. Оценки показывают, что упругость сохраняется до расстояний, близких к фокальным.

NONLINEAR STEADY MODULATION WAVES IN PIEZODIELECTRICS WITH SPHERICAL INCLUSIONS

A. G. BAGDOEV, A. V. SHEKOYAN

ՈՉ ԳՄԱՅԻՆ ՍՏԱՅԻՌԱՆԱՐ ՄՈՂՈՒՎԱՅՎԱԾ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԳՆԳԱՅԻՆ ՄԻԱՑՈՒՄՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ՊԻԵԶԱԳԻԵԼԵԿՏՐԻԿ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒԾ

Ա. Գ. ԲԱԳԳՈՅԵՎ, Ա. Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Արտածված են կարև ալիքների հավասարումը, մոդուլյացիայի հավասարումը փնդային միացումներ ունեցող պիեզոպիելեկտրիկ միջավայրի համար և ուսումնասիրված են նշված հավասարումների լուծումները: Յուրջ է տրված, որ հնարավոր է ալիքային փնջի ֆոկուսացում: Աշխատանքում բերված են լուծումների գրաֆիկները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Трехмерные, нелинейные упругие волны в пьезоэлектриках и пьезополупроводниках.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1981, т. 34, № 4, с. 9—15.
2. Bagdoyev A. G. and Shekoyan A. B. Focusing of nonlinear ultrasonic Waves in Viscous Thermoelastic Materials with Spherical Inclusions.—Phys. stat. sol (a), 1985, v. 89, p. 499.
3. Багдоев А. Г., Шекоян А. В. Упругие волны в композитах при наличии диссипаций пьезосвойств.—В кн.: Материалы второй всесоюзной научно-технической конференции «Прочность, жесткость изделий из композиционных материалов», т. 1.—Ереван: ЕГУ, 1984, с. 96—101.
4. Багдоев А. Г., Оганян Г. Г. Эволюция квазимонохроматических волн в релаксирующей газожидкостной смеси.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1984, т. 37, № 1, с. 34—44.
5. Багдоев А. Г., Петросян Л. Г. Распространение волн в микрополярной электропроводящей жидкости.—Изв. АН АрмССР, Механика, 1983, т. 36, № 5, с. 3—16.
6. Рыжков О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1958, т. 22, № 5, с. 586—599.
7. Энгельбрехт Ю. К., Нигула У. К. Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
9. Пейпман Т. А. Нелинейные волновые процессы в среде с дисперсией.—Автореф. дис. Таллин: 1984. 15 с.

Институт механики АН Армянской ССР
НИИОСС АЭС ин-та «АТОМТЕПЛОЭЛЕКТРОПРОЕКТ»

Поступила в редакцию
14.VII.1986