ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XL, № 3, 1987 Механика

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ТОНКИХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В СЛУЧАЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ИХ В УЗЛАХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СЕТКИ

СТАДНИК М. М., СИЛОВАНЮК В. П.

Вопросы определения поля напряжений в телах с упругими включениями и накладками являются предметом исследований многих авторов. В частности, разработке методов приближенного решения таких задач в случае тонких включений и накладок посвящены работы [1—6].

В настоящей работе на основании подхода [5, 6] исследована задача о концентрации напряжений в пространстве с системой упругих включений, периодически размещенных в одной плоскости.

Рассматривается упругое пространство, содержащее бесконечное число одинаковых тонких сфероидальных включений с полуосями a и $c (a \gg c)$. Пусть центры включений размещены в узлах прямоугольной сетки с делениями $2l$ и $2kl$ (k—действительное число). На бесконечности задано однородное поле одноосного растяжения в направлении нормальном к плоскости включений. Ставится задача определения напряженного состояния в окрестности включений.

Предложенная в работе [6] модель тонкого упругого включения позволяет свести задачу к некоторому эквиваленту теории трещин, общие уравнения которого получены в работе [7]. Для рассматриваемого случая, учитывая периодический характер поля напряжений около включений, проблема сводится к решению двумерного интегрального уравнения второго рода

$$u_2(x, y) + \frac{(1-\nu^2)\varepsilon}{\pi} L(u_2(x, y)(h(x, y)) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ (i=j\neq 0)}}^{\infty} \iint\limits_S u_2(\xi_2, \eta_2) \times$$

$$\times L(((x-\xi_2-2l_i)^2+(y-\eta_2-2kl_j)^2)^{-1/2}) d\xi_2 d\eta_2 =$$

$$= 4p(1-\varepsilon)(1-\nu^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}/\pi E \qquad (1)$$

Здесь $u_2(x, y)$ — смещения берегов математического разреза вдоль срединной области S одного из включений; ν, E—коэффициент Пуассона и модуль упругости материала матрицы; $h(x, y) = c\sqrt{1-(x^2-y^2)/a^2}$; $\varepsilon = E_1/E$, E_1—модуль упругости материала включений; интегральный оператор

$$L(\varphi(x, y)) = \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_S \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2-a^2)}\,[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]} \times$$

$$\times \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi_1, \eta_1)\sqrt{a^2-\xi_1^2-\eta_1^2}}{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}\, d\xi_1 d\eta_1$$

Система декартовых координат $Oxyz$ выбрана в центре одного из включений так, что ось Oz совпадает с направлением приложенной нагрузки.

Непрерывное решение интегрального уравнения (1), обращающееся в нуль на контуре области S, будем искать в виде

$$u_z(x, y) = (A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 xy + A_5 y^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2} \tag{2}$$

где A_j $(j = 0, \ldots, 5)$ — неизвестные коэффициенты.

При выборе функции перемещения $u_z\ (x,\ y)$ в таком виде с учетом разложения ядра интегрального уравнения в степенной ряд, что возможно при условии

$$\max(a/l,\ a/kl) < 1$$

решение получается с точностью до малых величин в пятой степени.

Подстановка выражения для функции $u_z\ (x,\ y)$ (2) в интегральное уравнение (1) даст следующие соотношения для нахождения коэффициентов:

$$A_0 = 4p(1-\varepsilon)(1-\nu^2)\gamma_1\Biggl(1+\lambda^3\gamma_1 \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i=j\neq 0)}}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Biggl(\frac{1}{2q^3} + \frac{7\lambda^2}{240q^5} -$$

$$-25\lambda^2(1-\nu^2)\varepsilon\beta\gamma_2(9\pi+16\beta\varepsilon(1-\nu^2))/6q^5\Biggr)\Biggr)/E$$

$$A_3 = \frac{180\lambda^3}{l^2E} p(1-\nu^2)(1-\varepsilon)\gamma_1\gamma_2 \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i=j\neq 0)}}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Biggl(\Biggl(-\frac{1}{12q^5} + \frac{i^2}{3q^7}\Biggr)(45\pi +$$

$$+88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - \Biggl(-\frac{1}{12q^5} + \frac{k^2j^2}{3q^7}\Biggr) 8\beta\varepsilon(1-\nu^2)\Biggr) \tag{3}$$

$$A_5 = \frac{180\lambda^3}{l^2E} p(1-\nu^2)(1-\varepsilon)\gamma_1\gamma_2 \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i=j\neq 0)}}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Biggl(\Biggl(-\frac{1}{12q^5} + \frac{k^2j^2}{3q^7}\Biggr)(45\pi +$$

$$+88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - \Biggl(-\frac{1}{12q^5} + \frac{i^2}{3q^7}\Biggr) 8\beta\varepsilon(1-\nu^2)\Biggr)$$

$$A_1 = A_2 = A_4 = 0$$

где

$$\beta = a/c > 1, \quad \lambda = a/l < 1, \quad q = (i^2+k^2j^2)^{1/2}, \quad \gamma_1 = (\pi+4(1-\nu^2)\varepsilon\beta)^{-1},$$

$$\gamma_2 = ((45\pi+88(1-\nu^2)\varepsilon\beta)^2 - 64(1-\nu^2)^2\varepsilon^2\beta^2)^{-1}$$

По найденным значениям перемещений берегов математических разрезов S коэффициенты интенсивности напряжений K_1 могут быть непосредственно найдены по формуле [8]

$$K_1 = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \lim_{r \to a} \frac{\partial u_2}{\partial r}$$

где r—радиус полярной системы координат (r, θ) с началом в центре круговой области S.

Используя соотношения (2), (3) и данные работы [7], нормальные напряжения в окрестности экваториальных сечений включений определяются по формуле

$$\sigma_{22} = p + 4p(1-\varepsilon)\beta\gamma_1 + 4p(1-\varepsilon)\beta\gamma_1 R(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

где

$$R(x,\ y) = \lambda^3 \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i=j\neq 0)}}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\gamma_1(1/12q^3 + 7\lambda^2/240q^5 -$$

$$- 25\lambda^2(1-\nu^2)\varepsilon\beta\gamma_2(9\pi + 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))/6q^5) + 15\gamma_2((-1/4q^5 +$$

$$+ i^2/q^7)(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - (-1/4q^5 + k^2j^2/q^7)8\beta\varepsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 +$$

$$+ 15\gamma_2((-1/4q^5 + k^2j^2/q^7)(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) -$$

$$- (-1/4q^5 + i^2/q^7)8\beta\varepsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(\lambda^8)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи.

а) Пусть $k=1$, то есть центры включений находятся в узлах квадратной сетки с делениями $2l$. В этом случае $R(x,y)$ приобретает вид [9]

$$R(x,\ y) = \gamma_1(0{,}7528\lambda^3 + 0{,}1485\lambda^5 - 20{,}92\lambda^5\gamma_2(9\pi + 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))\beta\varepsilon(1-\nu^2) +$$

$$+ 23{,}85\lambda^3\gamma_2(9\pi + 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))(x^2 + y^2)/l^2 + O(\lambda^8)$$

б) $k=1{,}5$. После вычисления бесконечных сумм для $R(x,\ y)$ получим выражение

$$R(x,\ y) = \lambda^3(\gamma_1(0{,}4436 + 0{,}0772\lambda^2 - 11{,}02\lambda^2(1-\nu^2)\beta\varepsilon\gamma_2(9\pi +$$

$$+ 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))) + \gamma_2(22{,}82(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) + 24{,}10\beta\varepsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 +$$

$$+ \gamma_2(-3{,}012(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - 182{,}5\beta\varepsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(\lambda^8)$$

в) $k=3$. Для этого случая будем иметь

$$R(x,\ y) = \lambda^3(\gamma_1(0{,}2610 + 0{,}06153\lambda^2 - 8{,}790\lambda^2(1-\nu^2)\varepsilon\beta\gamma_2(9\pi +$$

$$+ 16\beta\varepsilon(1-\nu^2))) + \gamma_2(23{,}30(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - 3{,}999\beta\varepsilon(1-\nu^2))x^2/l^2 +$$

$$+ \gamma_2(-0{,}4986(45\pi + 88\beta\varepsilon(1-\nu^2)) - 186{,}4\beta\varepsilon(1-\nu^2))y^2/l^2) + O(\lambda^8)$$

STRESS CONCENTRATION NEAR THIN SPHEROID INCLUSIONS IN THE CASE OF THEIR LOCATION IN THE POINTS OF RECTANGLE LATTICE

M. M. STADNIK, V. P. SILOVANYUK

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՑԱՆՑԻ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐՈՒՄ ՏԵՂԱԲԱՇԽՎԱԾ ԲԱՐԱԿ ԳՆԴԱԿԵՐՊ ՆԵՐԴՐԱԿՆԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ

Մ. Մ. ՍՏԱԴՆԻԿ, Վ. Պ. ՍԻԼՈՎԱՆՅՈՒԿ

Ամփոփում

Ստացված է գնդակերպ կոմպլանար ներդրակների երկպարբերական համակարգ պարունակող տարածության ձգման խնդրի մոտավոր լուծումը: Բերված են ներդրակներում և նրանց շրջակայքում լարումների համար բացահայտ տեսքով արտահայտությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние деформированного тела с тонкостенным гибким включением.—Изв. АН Арм.ССР. Механика, 1967, *20*, № 6, с. 19—29.
3. *Перлин П. И.* К решению задач теории упругости для тел с тонкостенными включениями.—Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 5, с. 140—143.
4. *Грилицкий Д. В., Сулым Г. Т.* Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. —Мат. методы и физ. мех. поля, 1975, вып. 1, с. 41—48.
5. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи неоднородной теории упругости. —Прикл. математика и механика, 1974, *38*, № 3, с. 539—550.
6. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением.—Докл. АН УССР, 1976, А, № 7, с. 636—639.
7. *Стадник М. М., Силованюк В. П.* Определение концентрации напряжений в упругом теле с системой тонких включений, размещенных в одной плоскости. —Физ.-хим. механика материалов, 1977, № 6, с. 88—92.
8. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 445 с.
9. *Стадник М. М., Силованюк В. П.* Одно- и двоякопериодическая система тонких упругих включений в трехмерном теле. —Физ.-хим. механика материалов, 1980, т. 16, № 4, с. 84—89.

Физико-механический институт
им. Г. В. Карпенко

Поступила в редакцию
21.V.1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XL, № 3, 1987 Механика

РЕФЕРАТЫ ДЕПОНИРОВАННЫХ НАУЧНЫХ РАБОТ

УДК 624.04

О ПРИВЕДЕНИИ КРАЕВЫХ И НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ К «СТАНДАРТНОЙ» ФОРМЕ С ПОМОЩЬЮ ДЕЛЬТА-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Л. Г. ПЕТРОСЯН

Рассматривается вопрос об эквивалентности краевых и начальных задач с неоднородностями в граничных (начальных) условиях и правой части уравнения применительно к расчету конструкций на статические и динамические нагрузки. Приводится «стандартная» форма задачи, полученная с помощью дельта-преобразования и позволяющая заменить граничные или начальные условия соответствующей нагрузкой на конструкцию в виде дельта-функции и ее производных. Построение «стандартной» формы иллюстрируется на простейших примерах краевой задачи для балки и задачи Коши для системы с одной степенью свободы. Метод дельта-преобразования позволяет достаточно просто строить «стандартную» форму краевых задач. Для задач Коши такое построение можно осуществить еще проще, вводя скачки непосредственно в выражения для искомой функции и ее производных, однако этот прием приводит к нужному результату лишь в случае, если при $t<0$ система находится в покое. В случае краевых задач метод дельта-преобразования предоставляет, по-видимому, наиболее простой путь решения рассматриваемой проблемы.

11 с., ил. 1, библиогр. 6 назв.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ
за № 3695—В 86 от 2 июня 1986 г.

Поступила в редакцию
25.IX.1985