

УДК 532.516

О РАЗВИТИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
 МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ДВИЖУЩИМИСЯ  
 ПЛОСКОСТЯМИ

БАБАДЖАНЫАН Г. А., МНАЦАКАНЯН Р. Ж.

1. За последние годы опубликован ряд работ [1], [2], [3], в которых рассматривается взаимодействие потока жидкости или газа с подвижными поверхностями. Имеется много актуальных приложений этих исследований в современной технике.

Скольжение поверхностей относительно обтекающего потока имеет место в различных процессах, так например, при непрерывной обработке листовых материалов в металлургии, в химической технологии, при пленочном или завесном охлаждении и т. д.

В большинстве вышеперечисленных работ теоретические исследования закономерности движения у подвижных поверхностей проводились в приближении пограничного слоя. Эти исследования ограничивались, в основном, для стабилизированной области течения.

Изучение развития течения жидкости или газа между подвижными поверхностями имеет большое теоретическое и практическое значение.

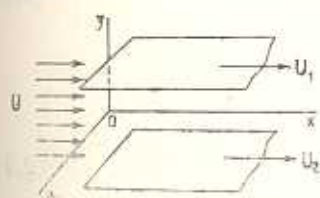
Рассмотрим задачу о развитии течения жидкости между параллельными движущимися плоскостями, простирающимися в направлениях осей  $x$  и  $z$  до бесконечности (фиг. 1). Движение плоскостей происходит в своих плоскостях. Обе плоскости движутся или по положительному или по отрицательному направлению оси  $Ox$  с заданными постоянными скоростями  $U_1$  и  $U_2$ . Между плоскостями движется жидкость, для которой на входе в канал формулируется плоский однородный профиль скорости.

Если предположить вязкую жидкость несжимаемой, движение ее ламинарным, стационарным, изотермическим и плоскопараллельным, то при отсутствии массовых сил приближенные уравнения с частичным учетом слагаемых от вязкости и ускорения будут иметь вид [4]

$$U \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

В этой системе уравнений  $U$  есть средняя расходная скорость основного потока по сечению в начале трубы,  $v_x$



Фиг. 1

и  $v_y$  — соответствующие скорости по осям  $OX$  и  $OY$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Пусть расстояние между плоскостями будет  $2h$ .

Если начало оси  $OY$  возьмем на средней линии между плоскостями, то граничные условия для задачи о развитии течения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad v_x=U=\text{const}, \quad p=p_n \\ \text{при } y=h \quad x>0 \quad v_x=U_1, \quad v_y=0 \\ \text{при } y=-h \quad x>0 \quad v_x=U_2, \quad v_y=0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $p_n$  — значение давления в начале трубы.

Если ввести новые переменные

$$z = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{v_x - U}{U}, \quad v = \frac{v_y}{U}, \quad p = \frac{p - p_n}{\rho U^2}$$

то система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{при } z=0 \quad u=0, \quad P=0$$

$$\text{при } y=1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_1 - U}{U}, \quad v=0 \quad (1.4)$$

$$\text{при } y=-1 \quad z>0 \quad u = \frac{U_2 - U}{U}, \quad v=0$$

В системе уравнений (1.3)  $\text{Re} = Uh/\nu$  — число Рейнольдса.

2. Уравнение (1.3) при граничных условиях (1.4) решаем с помощью операционного исчисления. Если воспользоваться функциональным преобразованием Лапласа, из (1.3) и (1.4) для искомых функций  $v_x$ ,  $v_y$  и  $p$  получим следующие значения:

$$\begin{aligned} v_x = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 + U_2}{4} \left(\frac{3y^2}{h^2} - 1\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y + \\ + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{\cos \mu_n y/h}{\cos \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) + \\ + \frac{U_1 - U_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi n y/h}{n} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} v_y = \frac{(U_1 + U_2 - 2U)}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right) - \\ - \frac{U_1 - U_2}{\text{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}h} x\right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$p = p_n + \delta U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left[-\frac{3x}{\text{Re}h} - \frac{1}{5} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\text{Re}h} x\right)\right] \quad (2.3)$$

где  $\mu_n$  — простые корни уравнения  $\operatorname{tg} \mu = \mu$ .

Найдем значение силы трения

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \left\{ -\frac{3U}{h^2} y + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right.$$

$$\left. + (U_1 + U_2 - 2U) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n y/h}{h \sin \mu_n} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \pi n y/h \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{h} - \frac{\sin \mu_n y/h}{\sin \mu_n}\right) \mu_n^2 \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2 (U_1 - U_2)}{\operatorname{Re}^2 h} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 [(-1)^n \cos \pi n y/h - 1] \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right\}$$

3. Проведем анализ полученных результатов.

I. Если в формулах (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4) подставить  $U_1 = U_2 = 0$ , получим результаты работы [4].

II. На бесконечном удалении от начала трубы, то есть для стабилизированного участка течения значения искомых величин будут:

$$v_{\infty, x} = \frac{3U}{2} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) - \frac{U_1 + U_2}{4} \left(1 - \frac{3y^2}{h^2}\right) + \frac{U_1 - U_2}{2h} y, \quad v_{\infty, y} = 0 \quad (3.1)$$

$$p_{\infty} = p_H - \rho U^2 \left(1 - \frac{U_1 + U_2}{2U}\right) \left(\frac{3x}{\operatorname{Re} h} + \frac{1}{5}\right) \quad (3.2)$$

$$\tau_{\infty} = \mu \left(-\frac{3U}{h^2} y + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h^2} y + \frac{U_1 - U_2}{2h}\right) \quad (3.3)$$

III. Из формул (3.1), (3.2) и (3.3) видно, что результаты, полученные для стабилизированного участка в случае, когда исходные уравнения движения принимаются в виде (1.1), отличаются (уточняются) от результатов для этого же участка, когда за исходные уравнения движения принимались уравнения Стокса [5].

IV. Из (2.4) можно найти силы трения на стенках

$$\tau_{y=h} = \mu \left[ -\frac{3U}{h} + \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} + \right.$$

$$\left. + \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.4)$$

$$\tau_{y=-h} = \mu \left[ \frac{3U}{h} - \frac{3}{2} \frac{U_1 + U_2}{h} + \frac{U_1 - U_2}{2h} - \right.$$

$$\left. - \frac{U_1 + U_2 - 2U}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) + \frac{U_1 - U_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2}{\operatorname{Re} h} x\right) \right] \quad (3.5)$$

Для стабилизированного участка силы трения на стенках будут

$$\tau_{y=h} = \frac{\mu}{h} (2U_1 + U_2 - 3U), \quad \tau_{y=-h} = \frac{\mu}{h} (-U_1 - 2U_2 + 3U) \quad (3.6)$$



V. Из формул (3.4), (3.5) получим значение силы трения для неподвижных стенок, если подставить  $U_1=U_2=0$

$$\tau_{y=h} = \frac{\mu U}{h} \left[ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{\text{Re}}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$\tau_{y=-h} = \frac{\mu U}{h} \left[ 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu_n^2 x}{\text{Re}h}\right) \right] \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) видно, что в случае неподвижных стенок значение силы трения в начальном участке больше значения силы трения в стабилизированном участке.

VI. При подвижных стенках значение силы трения, как в стабилизированном участке, так и в начальном участке, зависят от значений скоростей стенок. Так, например, если  $2U_1+U_2=3U$ , то значение силы трения в стабилизированном участке на верхней стенке равно нулю, а если  $U_1+2U_2=3U$ , то на нижней стенке равно нулю. Полученные результаты показывают, что выбором скоростей основного потока и плоскостей, можно изменить распределения скоростей, давлений и силы трения в потоке и на стенках.

## ON THE DEVELOPMENT OF THE VISCOUS LIQUID FLOW BETWEEN PARALLEL MOVING PLANES

G. A. BABADJANYAN, R. Zh. MNATSAKANYAN

ՇԱՐԺՎՈՂ ԶՈՒԿԱԶՆՈՒ ԶԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋԵՎ ՄԱՍՈՒՅՈՒ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԶԱՐԿԱՅՈՒՄԸ

Գ. Ա. ԲԱԲԱԺՅԱՆ, Թ. Ժ. ՄՆԱՏԱԿԱՆՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գտնված են արագության, ճնշման և շիման ուժի փոփոխման օրենքները սկզբնական և հաստատված հատվածներում:

Յույց է տրված, որ հիմնական հոսքի և շարժվող հարթությունների արագությունների ընտրությամբ կարելի է դեկավարել արագությունների, ճնշման և շիման ուժի բաշխումը հոսանքում և պատերի վրա:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Антисhev И. А., Жубрин С. В., Мотулевич В. П., Анализ течения в канале с движущейся стенкой. — ИФЖ, 1985, т. 48, № 4, с. 592—597.
2. Бектурганов Е., Джагааштин К. Е., Сакиной Э. Б., Ярин А. Л., Струйное обтекание движущейся поверхности. — Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1981, № 3, вып. 1, с. 33—41.

3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. — В кн.: Избранные проблемы прикладной механики М.: Наука, 1974, с. 99—104.
4. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 519 с.

Ереванский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
8.XII.1986